

# *Spolia Atlantica.*

---

Bidrag til Kundskab

om

de tre pelagiske Tandhval-Slægter

*Steno, Delphinus* og *Prodelphinus*

af

**Chr. Fr. Lütken.**

Med 1 Tavle og 1 Kort.

*Avec un résumé en français.*

---

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og matematisk Afd. V. 1.

---

**Kjøbenhavn.**

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1889.



**E**fter Udgivelsen af mine «kritiske Studier over nogle Tandhvaler» skrider jeg til den dér bebudede Redegjørelse for det Materiale af Skeletter og Kranier af pælagiske Delfiner, som har ophobet sig i vort «Cetaceum» ved de samme Indsamlinger og Rejser, ved de samme gennem en Række af Aar fortsatte Bestræbelser af Skibsførerne Hygom, Andréa, Corneliussen, Iversen o. a., hvem vi skyldte den allerstørste Del af det Materiale til Oplysning om Livet i det aabne Hav, de «*Spolia Atlantica*», der med eller uden denne Titel ere blevne offentliggjorte i d. K. D. Vid. Selskabs Skrifter. Dette Materiale af pælagiske Delfiner — derunder indbefattet enkelte Stykker, som fandtes i vore Samlinger alle-rede fra en noget ældre Tid — er saa betydeligt, at det strax ved min Tiltrædelse af Bestyrelsen af Museets Hvirveldyr-Afdeling stillede sig som en af de Opgaver, jeg maatte søge at løse, at bringe et videnskabeligt Resultat — saadan som det nu kunde blive — ud af det. Jeg antog jo nok, at afdøde Prof. Reinhardt havde gjort Forarbejder til dets Behandling, hvilket ogsaa til en vis Grad har bekræftet sig, men jeg saa tillige snart, at det kun var den første Begyndelse dertil, som han havde faaet gjort. Oprindeligt er dette Materiale fremkommet derved, at vore Skibsførere harpunerede Delfiner under Overrejsen for af deres fortræffelige Kjød at skaffe sig og deres Mandskab en Afvexling i Skibskostens Ensformighed, og saa bragte os Hovedskallerne eller stundom Skeletterne med Spørgsmaal om vi brød os om dem og havde Brug for dem, — et Spørgsmaal, som i Tidens Løb besvaredes med stedse indstændigere Opfordringer til, ikke at lade noget af denne Art gaa tabt, alt som det klarere viste sig, at der ogsaa paa dette Punkt maatte kunne gøres en lille videnskabelig Høst.

Næsten enhver Rejse bragte os nu et eller flere Delfinskeletter, meget ofte ledsagede af Angivelser om Dyrenes Farve og Tegning, af Udmaalinger, Papirmodeller af deres Ryg- og Halefinne eller disse selv, næsten altid ogsaa af Angivelse af Fangstedets Længde og Brede. For at forstaa, at slige Indsamlinger kunne have Betydning udover den, der ligger nærmest, nemlig at de udfylde Huller i Museets Rammer, vil det være nødvendigt at klare sig, hvordan Cetologiens Stilling og Standpunkt for Tiden er. — Da

Cetologien tog sit store Opsving efter det stærke Stød fremad, som fremfor alle Eschricht havde givet den, vendte Interessen sig først og stærkest mod Bardehvalerne, til hvilken Underorden jo ganske i Almindelighed Ordenens større Former, Havets Kæmpedyr, høre, og det var først efterhaanden at Tandhvalerne, — i det hele jo de mindre, men talrigere — fik Lod og Del i det opløstrende cetologiske Liv, og da først og fremmest saadanne mere abnorme Former som Næbhvaler, Kaskelotter, Ganges- og Amazon-Delfiner o. s. v., mindst og sidst de typiske Springer- og Delfinforme. Som allevegne maatte Zoologernes Bestræbelser ogsaa paa Cetologiens Omraade først og fremmest rettes paa at klare Grunden ved at skaffe Lys i Systemet, ved at drage Grænserne mellem Arter, Slægter og Grupper, bestemme Formernes Udbredning o. desl.; og at det her er Osteologien, Benbygningen, man især har at holde sig til, vil ikke undre nogen, der har en Forestilling om den Ensformighed, der raader over disse nøgne, fiskedannede Dyrs Ydre. Men der møder os her den Vanskelighed, at Benbygningen dels er underkastet en ikke ringe individuel Variation, hvis Grænser kun kunne bestemmes ad Erfaringens Vej, rent empirisk, ved Undersøgelse og Sammenligning af et større Materiale, dels er undergivet en langsomt fremskridende Udvikling, fra Dyret er ungt til det er gammelt, ved at stedse flere bruskede, hindede, bindevævsagtige eller ligamentøse Dele drages ind i Forbeningsprocessen. Forskjellen mellem et ældre og et yngre Dyrs osteologiske Karakterer er ofte, indenfor samme Art, paafaldende stor og kan saa meget lettere give og har givet Anledning til Antagelse af rent nominelle Slægter og Arter, der maa stryges, altsom den rette Sammenhæng opklares, som Skelettets fuldstændige Forbening hos Hvaldyret først indtræder forholdsvis sent og i det hele foregaar ualmindelig langsomt. Dertil kommer vel endnu, at man her af forskellige letforstaaelige Grunde lettere end ved andre Pattedyr faar med Subjekter at gøre, som endnu langt fra have afsluttet deres Udvikling, uden at man paa Forhaand kan vide, paa hvilket Aldersstandpunkt de befinde sig, da dette ikke røber sig meget i deres Ydre, forudsat da, at de ere ud over den rene Barnealder.

Sagen staar da saaledes, at man nu for Hvaldyrene i Almindelighed er kommen til Klarhed over Slægterne, medens der endnu med Hensyn til Arterne hersker den største Usikkerhed, paa sine Steder endog Forvirring. For Bardehvalernes Vedkommende er der maaske en vis Udsigt til Ro og Klarhed over disse Forhold, hvis det viser sig at holde Stik, at de Former, der tilhøre de koldere Havbælter, ere mere indskrænkede i deres Udbredning, saaledes som f. Ex. de nordlige og sydlige *Balæna*-Arter<sup>1)</sup>, Graahvalen (*Rhachianectes*) i det nordlige stille Hav og Slægten *Neobalæna* i den sydlige Del af samme. Forsaavidt disse Slægter optræde baade Nord og Syd for Ækvator, antages de at være differentierede i

<sup>1)</sup> Jeg har i Tillæget til min Afhandling om Hvallusene berørt de Tvivl, der synes at begynde at gøre sig gjældende med Hensyn til Artsforskjelligheden indenfor Sydhvals- og Nordkapertypen indenfor *Balæna*-Slægten (K. D. V. S. Skr. 6 R. IV, 4. 1887).

udprægede Arter, hver med sit geografiske Omraade, hvorimod de Arter, der mere høre hjemme i de varmere Have, i Regelen ere saa kosmopolitiske i deres Optræden, at de uden Forskjel træffes baade i det atlantiske og det indopacifiske Verdenshav, tildels med saa vide Grænser for deres Udbredning mod Nord og Syd, at der ikke mangler meget i, at de med fuldeste Ret betragtes som allesteds nærværende. I Modsætning til «Nordhvalens», de andre «Sletbages» og «Graahvalens» skarpt begrænsede hydrografiske Omraade, er man nu ikke tilbøjelig til at tro, at der Verden over ikke findes andre Arter af Finhvaler og Pukkelhvaler end de selvsamme 5, som ere kjendte fra vore nordiske Have, og vist er det i alt Fald, at disse 5 Typer komme igjen næsten allevegne. De have ganske vist faaet mange forskellige systematiske Artsnavne, alt efter som de iagttoges i det nordlige eller sydlige Atlanterhav, i den ene eller anden Del af det stille Hav, men Grunden dertil laa meget ofte i en forudfattet Mening om, at de maatte være forskellige; man kunde jo i sin Tid knap tro, at den bergenske og den grønlandske «Vaagehval» vare den samme, langt mindre, at den samme Art kunde fanges ved Nyzelands, Patagoniens eller Kaliforniens Kyst. Som man vil se, simplificeres det cetologiske Studium overordentligt, hvis man kan slaa sig til Ro ved dette Resultat, der tidligere er bleven afvist som aldeles urimeligt, og det er for de cetologiske Samlinger af en særdeles praktisk Betydning. Sandsynligheden for dets Rigtighed synes mig at styrkes ved at se hen til de analoge Erfaringer, som vi gjøre med Hensyn til andre pelagiske Dyretyper. Det har alt længe været tydeligt, at de pelagiske Fiske, der fortrinsvis eller udelukkende have hjemme i de varmere Have — Baandmakreler, Sugefiske, Hajer, Makrelgjedder, Klumpfiske, Sværdfiske, Thunfiske, Boniter, Albacorer, Havbrasener, Dolfiner o. s. v. — forekomme i uforandret Skikkelse i begge Verdenshave, med andre Ord: ere kosmopolitiske, og jeg tror ved mine egne Undersøgelser<sup>1)</sup> at have slaaet dette Resultat, der ganske stred mod, hvad man tidligere antog, fast for adskillige af de ovennævnte Typers Vedkommende. Det selv samme viser sig jo at være Tilfældet med saa smaa pelagiske Dyreformer som Salper og Vingesnegle, i alt Fald med de fleste af disse — bortset ogsaa her fra de arktiske og antarktiske Former — og saa meget mindre kan det da undre os, om det samme er Tilfældet med Havets Kæmpedyr. Fuldstændig fastslaaet for disses Vedkommende kan denne Lov nu vistnok ikke siges at være — tværtimod, den bestrides jo nu atter for Pukkelhvalernes<sup>2)</sup>, — men den synes paa den anden Side mere og mere at stadfæstes for Tandhvalernes. Den forholdsvist indskrænkede Udbredning, der karakteriserer Narhvalen, Hvidfisken og maaske Døglingen, staar i en skarp Modsætning til Kaskelottens, Dværgkaskelottens, visse Næbhvalers, maaske ogsaa Grindehvalernes kosmopolitiske Udbredning, men forstaas lettere

<sup>1)</sup> Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om Formforandringer hos Fiske o. s. v. (K. D. Vid. S. Skr. 5 R. XII, 6. 1880).

<sup>2)</sup> Berørt i det ovennævnte Tillæg til min Afhandling om Hvallusene.

gjennem hine Analogier og ved Modsætningen mellem arktiske og tropiske Typer. For de mindre Tandhvalers, Delfinernes, store Hærskare hersker der endnu altfor stor Usikkerhed med Hensyn til Arternes Antal og indbyrdes Begrænsning, til at man kan opstille Resultater, udformede som almindelige Sætninger. Altfor meget har man ogsaa her, gaaende ud fra, at Delfiner fangne i forskjellige Have maatte være artsforskjellige i samme Forhold, som f. Ex. vore littorale Fiske og lavere Havdyr ere det, opstillet Arter paa let henkastede Skitser eller paa enkelte Kranier, der, naar de senere ere bleve sammenstillede med andre i naturlige Rækker, viste sig at danne saa uafbrudte Kjæder, at man maatte anerkjende Arternes Uholdbarhed. Der er allerede ved Fischers<sup>1)</sup> og Flowers<sup>2)</sup> Studier kastet meget Lys over disse Forhold; jeg haaber, at der skal komme lidt mere ved den Beretning om Museets Skeletter og Kranier af Slægterne *Steno*, *Delphinus* og *Prodelphinus*, som jeg her forelægger. — Man vil skjønne, at hvilke Resultater end de mindre Tandhvaler, Delfinerne, i denne Henseende ville give os, have disse, foruden deres umiddelbare Betydning, ogsaa den, at virke tilbage paa Opfattelsen af Forholdene hos de store Hvaler. Ingen skaffer sig let et Studiemateriale af en større Række Kranier og Skeletter af samme Art af Bardehvaler, Kaskelotter eller andre Kæmpehvaler; derimod er det ikke saa vanskeligt at skaffe sig et saadant af Delfiner, og de Erfaringer, man her høster, ville kaste deres Strejflys ogsaa paa Storhvalerne. Visselig havde allerede Eschricht og andre gjort dette for Marsvins og andre Smaahvalers Vedkommende, men Undersøgelsen vinder aabenbart i Interesse, naar den kan udvides til flere Former og større geografiske Omraader.

Reinhardt var som sagt endnu ikke naaet ud over Forarbejderne og synes heller ikke at have ilet med dem. Han stod vel desuden endnu paa et cetologisk Standpunkt, som nu fraviges mere og mere, det, hvis yderste Retning J. E. Gray repræsenterede, det, hvorfra man troede at kunne skjelne meget fint paa dette Omraade. Erfaringen har mere og mere vist, at dette ikke er muligt, og Tendensen gaar derfor mere og mere mod en Reduktion af Arterne og derved tillige mod en Simplifikation af Systemet. Selvfølgelig maa man ikke af denne Tendens lade sig forlede til at tage Undersøgelsen mere let. Tværtimod følte jeg Trang til, forinden jeg gav mig i Færd med de ovennævnte pelagiske Slægter, at anstille nogle Prøvestudier eller forberedende Undersøgelser af andre Delfin-slægter, hvor jeg mere kunde støtte mig til andres Erfaringer og for Cetologien alt indvundne Resultater. I det Haab, at de ikke alene skulde have nogen Betydning for mig selv som vejledende mine Fjed i et mere ubekjendt Land, men at de ogsaa skulde have nogen

<sup>1)</sup> T. Fischer: Cétacés du sud-ouest de la France (Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux, Vol. XXXV, 1881).

<sup>2)</sup> W. H. Flower: On the characters and divisions of the family *Delphinidae*. (Proceedings of the Zoological Society of London. 1883).

Værd i og for sig og for andre Cetologer, har jeg, som alt berørt, offentliggjort disse indledende Studier under Titelen «Kritiske Studier over nogle Tandhvaler af Slægterne *Tursiops*, *Orca* og *Lagenorhynchus*» i d. K. D. Videnskabernes Selskabs Skrifter 6te Række 4de Bind, og det er først efter denne Forberedelse, at jeg har vovet mig til at tage det aabne Havs Delfiner, til hvis Studium der hos os er en hidtil enestaaende Lejlighed, under Behandling. Men der er endelig den særlige Grund til at foretage en Bearbejdelse af det i vort «Cetaceum» opsamlede nye Materiale af Kranier og Skeletter, med tilhørende Udmaalinger, Farveskitser, Finnemodeller o. s. v., af pelagiske Delfiner — som skyldes den Iver, hvormed de Skibsførere, hvis Navne allerede figurere saa hyppigt i de udgivne «*Spolia Atlantica*», forfulgte de dem tilgængelige Havpattedyr, som de iagttog paa deres Rejser over Atlanterhavet, ikke mindre end de lavere Dyr, — at de pelagiske Delfiner af naturlige Grunde ere mindre hyppige i de cetologiske Samlinger end de mere littorale. Den Usikkerhed, for ikke at sige Forvirring, som i Henseende til Arternes Værdi og Begrænsning har behersket Cetologien, og som vistnok paa mange andre Punkter er i Færd med at tabe sig, trænger derfor netop paa dette Omraade til at spredes og afløses af den noget større Sikkerhed og Paalidelighed, som en slig Undersøgelse muligvis maatte kunne yde. Den Bemærkning maa dog endnu tilføjes, at jeg ingenlunde vil hævde, at de Delfinformer — *Steno*, *Delphinus* og *Prodelphinus* — som i det følgende afhandles, ere de eneste, der fortljene Navn af pelagiske Atlanterhavs-Delfiner. Muligt er det, at større Delfin-Former med lignende Levemaade ikke ere komne med, ikke fordi de manglede i de samme Havstrøg eller ikke observeredes, men blot fordi deres Størrelse gjorde det vanskeligt eller umuligt at fange dem paa den angivne Maade <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Exempelvis skal jeg her anføre to Dagbogs-Optegnelser af Reinhardt. Andre kunne findes i forskellige Naturforskeres Rejsebeskrivelser. <sup>11</sup>/<sub>5</sub> 50. 47° 4' N. Br. 9° 30' V. L. To store Delfiner, som lignede Grindehvaler. <sup>12</sup>/<sub>5</sub> 50. 46° 23' N. Br. 11° 15' V. L. Ved Middagstid krydsede en Delfinflok paa henvend 100 Stykker Skibets Kurs i sydøstlig Retning; det var en stumphovedet Art, 15—20 Fod lang. Rygfinnen temmelig høj, men kort; de viste ikke andet end den øverste Del af Legemet over Vandet; den syntes at være sort. Deres «Spout» kunde tydelig høres i en Afstand af 2 til 3 Kabellængder.

I tvende Dagbogs-optegnelser af Kapt. V. Hygom paa Rejser til og fra Brasilien, paa hvilke 4 Ruter over Atlanterhavet der i alt observeredes Delfiner fra Skibet mindst 30 Gange og harpuneredes Delfiner 7 Gange, findes «rundhovedede Delfiner», hvorved det maaske ligger nærmest at tænke paa Grindehvaler, anførte 5 Gange:

d. <sup>1</sup>/<sub>6</sub> 1863 (N. f. St. Paul). En Flok rundhovedede Delfiner af forskjellig Størrelse løb længe i Nærheden af Skibet.

d. <sup>13</sup>/<sub>8</sub> saaes sort- og graaspottede Delfiner samt en Del rundhovedede med store og hvide Pletter — midtvejs mellem Bermudas-Øerne og Madeira.

d. <sup>23</sup>/<sub>8</sub>. Rundhovedede Delfiner (Grindehvaler?). (Midtvejs mellem Azorerne og Indløbet til Kanalen).

d. <sup>21</sup>/<sub>11</sub>. En Del rundhovedede Delfiner (midtvejs mellem Azorerne og Cap Finisterre).

d. <sup>3</sup>/<sub>12</sub>. Et Par rundhovedede Delfiner (c. 20<sup>1</sup>/<sub>2</sub>° N. Br. og 26° V. L.).

Der synes aldrig at være gjort Forsøg paa at harpunere disse Delfiner, jeg antager paa Grund af deres Størrelse og Vægt, paa hvilke de almindelige Haand-Harpuner ikke ere beregnede.

## I.

Af Slægten *Steno* foreligger der et helt Skelet og 5 Hovedskaller, som, saavidt jeg skjønner, tilhøre en og samme Art; for saa vidt der vides noget om disse Stykkers Oprindelse, ere de fra Atlanterhavet. Hos denne Form, som jeg derfor betragter som den typiske *Steno rostratus*, findes der 20—24 Tænder i hver Række; disses største Højde over Kjæveranden er 15—17 Mm. (sjældnere kun 14 Mm.), deres Tværmaal ved Grunden 7—8 Mm., og 3 af de større Tænder i Underkjæven optage tilsammen, deres Mellemrum indbefattede, fra 30—34 Mm. Underkjævens Forening (Symfyse) svarer til 12—13 Tænder. Selve Hjerne-kassens Længde fra Nakkeledknudernes Bagrand til en Linie mellem «*incisura anteorbitales*» er i Almindelighed mindre end eller lig med dens Brede over Tindingbenenes Kindbuegrene, og Snudens Brede bagtil, over sidste Par Tænder, indeholdes 6—6½ Gang i hele Hovedskallens Længde. I Regelen ere Tænderne uslidte; paa en enkelt Hovedskal, der hører til det nedenfor beskrevne Skelet, ere de dog noget slidte, især paa Forfladerne, fornemlig de af dem, der sidde noget bagtil i Kjæven. Længden af disse Hovedskaller varierer fra 505 til 535 Mm.<sup>1)</sup> De to af dem, hvis Kjøen er kendt, vare Hunner, ligesom det af Professor Peters beskrevne Exemplar, som senere vil komme paa Tale.

Foruden disse 6 Hovedskaller af den typiske *S. rostratus* er der i Samlingen 2 Hovedskaller (Nr. 2 og 5), der muligvis kunde tilhøre en anden — men dog meget nærstaaende — Art; de ere lidt spinklere, Snuden (Næbet) noget smallere og mere sammentrykt; Tændernes Antal lidt større, 24—26 i hver Række, selve Tænderne noget mindre, højest 13½—14 Mm. høje, deres Tværmaal ved Grunden 6 Mm., og 3 af dem optage tilsammen 28—29 Mm.; Underkjævens Symfyse er snarest lidt længere, svarer til 14—15 Tænder. Hjerne-kassens Længde er lig med dens Brede, og Snudens Brede ved dens Grund indeholdes fra 6½ til næsten 8 Gange i Totallængden. Det ene af disse Kranier

<sup>1)</sup> Udmaaling af 8 Hovedskaller:

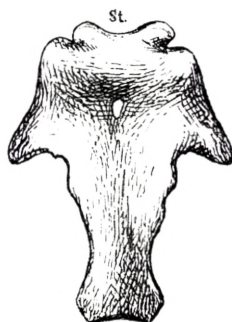
Nr.	Hovedskallens Længde.	Hjerne-kassens Længde.	Hjerne-kassens Brede.	Underkjæve- Symfysens Længde.
2	540 Mm.	213 Mm.	213 Mm	155 Mm.
6	535 —	224 —	225 —	158 —
1	530 —	220 —	226 —	150 —
10	530 —	217 —	231 —	153 —
9	520 —	209 —	210 —	163 —
5	512 —	198 —	198 —	160 —
3	510 —	218 —	218 —	145 —
4	505 —	217 —	221 —	135 —



er ganske sikkert fra det stille Hav; Prof. Reinhardt fik det paa «Galathea-Expeditionen» i Honolulu. Det andets Oprindelse kjendes ikke. Deres Længde er henholdsvis 512 og 540 Mm.; Kjøen ubekjendt. Afgivelserne fra det normale ere hverken store eller skarpt afgrænsede; at de tilhøre en anden Art (*S. compressus* Gr., *S. Reinwardtii* Schl.) end de først omtalte, vil jeg derfor paa ingen Maade paastaa; maaske er det kun individuelle eller Kjønssforskjelligheder. Jeg kommer senere tilbage til dette Spørgsmaal. Det kan dog her straks bemærkes, at Originalen til Schlegels «*S. Reinwardtii*» var fra det indiske Øriges Kyster.

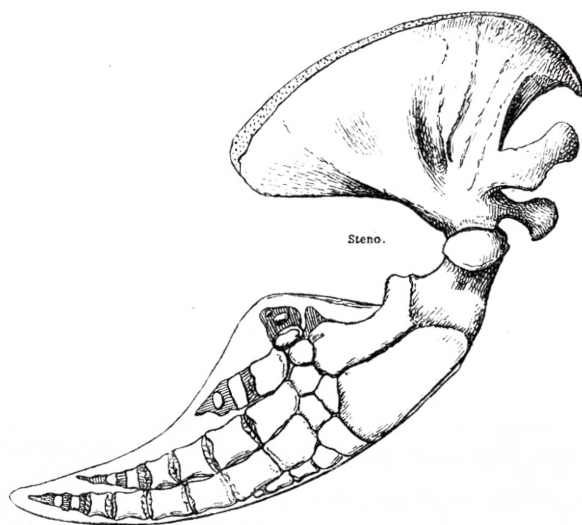
Det eneste mig foreliggende *Steno*-Skelet har en Totallængde af c. 2400 Mm., hvoraf Hovedskallens udgjør 530 Mm. Hvirvlernes Antal er  $65 = 7 + 13 + 15 + 30$ . I øvrigt ligner det de ægte Delfiners overmaade meget. Af Halshvirvlerne ere de to første i den Grad sammenvoxne, at man vilde kunne opfatte dem som én Hvirvel med to Buer og med et Rudiment af en Tværtap bagved og over den til Atlas hørende korte og tykke Tværtap. Tredje Hvirvel har paa hver Side en lodret, flad, triangulær Udvæxt, gjennebrudt af et stort Hul: de forenede Para- og Diapofyser. Paa de tre følgende Hvirvler indtræder denne Forening derimod ikke: Udsnittet mellem den øvre og nedre Tværtap bliver stedse større, altsom den sidstnævnte rykker længere ned, hvorhos denne tillige bøjes stedse stærkere fortil; paa den syvende Hvirvel findes der som sædvanlig en temmelig lang Diapofyse, men ingen Parapofyse. — Der er paa hver Side 13 Ribben, de forreste meget stærke, de bageste — med jævne Overgange — meget spinkle. Kun de 6 første Par have dobbelt Ledforbindelse med Rygraden. Den første Torntap findes paa den anden Brysthvirvel; den og de nærmest følgende ere rettede stærkt bagover; de tiltage baade i Højde og Brede, men begynde fra de sidste Brysthvirvler at krumme sig forover og antage paa de sidste Lændehvirvler en saa godt som lodret Holdning. Paa de første Halehvirvler er Torntappen igjen lidt foroverbøjet, men den gaar paa de øvrige atter over til at være rettet skraat bagud. De højeste Torntappe findes paa 5te—8de Lændehvirvel og have (med Buerne) en Længde, der overskrider 4 samlede Hvirvellegemers. Helt uden Spor til Ørebuer ere kun de sidste 10 i Halefinnen indesluttede Hvirvler. Af Nedrebuer er der 20 tydeligt udviklede, og de ere i det hele store og brede, saa at de i et betydeligt Stykke af Rygradens Haledel ere lige saa høje som eller endnu højere end Ørebuerne med deres Torntappe, paa de samme Hvirvler; de to forreste ere ikke forenede i Midtlinien, men allerede den tredje har en lav nedre Torntap, der paa de følgende tiltager baade i Længde og Brede. Bagved den 20de Nedrebue er der paa den i Halefinnen optagne Del af Rygraden endnu nogle adskilte Smaaknuder paa Nedrebuernes Plads, i det mindste 3, altsaa 23 Nedrebuer i alt. Tværtappene ere gennemgaaende brede; de længste findes paa anden Lændehvirvel og have næsten samme Længde som tre samlede Legemer af Hvirvler; de sidste Spor til Tværtappe findes paa 14de Halehvirvel. Metapofyserne ere

meget tydelige fra sjette Brysthvirvel af og omfatte paa de øvrige Brysthvirvler og paa de forreste Lændehvirvler den foranliggende Hvirvel skarpt og stærkt, ligesom med en dyb Gaffel; altsom de rykke højere op, blive de derimod svagere, men helt slippe de ikke Taget førend paa den 10de Halevirvel; endnu paa den 17de ere de overmaade tydelige. De perforerende lodrette Karkanaler optræde først paa den 6te eller 7de Halevirvel; paa nogle af de sidste Halevirvler foran dem, der omslutes af Halefinnen, ere de kun lidet tydelige.



lige. — Brystbens-Haandtaget har et lille Hul paa den ene Side af Midtlinien og paa hver Side en stærk Udvæxt eller Tap. Skulderbladet synes mig mest at udmærke sig ved den Maade, hvorpaa dets Plade og Udvæxt (*acromion*) ligesom sende Forlængelser mod hinanden. Forlemmernes Længde fra Skulderled til Spidse indeholdes  $5\frac{1}{2}$  Gang i Total længden. Der er som sædvanlig 5 Haandrodsben og 5 Fingre med følgende Ledtal i begge Hænder: I: 4; II (den længste): 8; III: 6; IV: 3; V: 3; men det sidste Led i hver Finger er kun en lille Knort. Det bør her bemærkes, at Dyret aabenbart er gammelt og fuldt udvoxt. — Den «Guillochering», som udmærker Tænderne af denne Slægt, men som ifølge Flower

skal kunne blive utydelig hos gamle Individuer, er her tydelig nok, hvor Tænderne ikke ere slidte, hvad de rigtignok, som ovenfor bemærket, for en stor Del ere, især paa Forfladen. Der er overhovedet intet af de 10 Kranier eller Kjæver af *Steno*, som foreligge, hvor denne ejendommelige Beskaffenhed af Tandoverfladen mangler.



Hr. Kapt. A. F. Andréa, som fangede eller harpunerede dette Dyr i Atlanterhavet d. 4de Marts 1864 paa  $1^{\circ}14'$  S.Br. og  $17^{\circ}20'$  V.L. fra Grwch., har tillige meddelt Museet en koloreret Skitse — efter hvilken den her medfølgende lithograferede Afbildning til Dels er udført — samt de Maal, som her anføres (i danske Fod og Tommer):

Længden af hele Dyret . . . . .	8' 3"
Højden lige foran Rygfinnen . . . . .	2' 2"
Fra Snuden til Rygfinnen . . . . .	3' 7"
Fra Snuden til Øjet . . . . .	1' 4"
Fra samme til Blæsegattet . . . . .	1' 2"
Fra samme til Lufferne . . . . .	2' 1"

Der medfulgte tillige Papirsmodeller

af begge Luffer og af Halefinnen, hvilke ere benyttede ved Udførelsen af Afbildningen; derimod ikke, synes det, nogen Model af Rygfinnen. I dette Punkt har jeg derfor maattet benytte andre Kilder. Farvefordelingen vil fremgaa af Afbildningen. Afdøde Prof. Reinhardt, som antog denne Delfin-Art for ny og opstillede den i Museet under Navn af «*Glyphidelphis ornata*», har ikke efterladt sig, saa vidt jeg veed, nogen anden Optegnelse om den end følgende Linier, tilføjede med Blyant paa Andréas Skitse: «Maa sammenlignes med Pernetty's Delfin, der har Bugen stænket med Smaapletter ligesom denne, men rigtignok synes at have haft en Fold, som dannede Grænsen mellem Snuden (Næbet) og det øvrige Hoved, jvfr. Pernetty, Voyage aux Iles Malouines, 2 vols. 8vo. Paris 1770». At denne «Fold» skulde have manglet paa Andréas Steno, er der dog ikke tilstrækkelig Grund til at antage, fordi den ikke er tydeligt angivet paa Kaptainens Skitse. Det er overmaade usandsynligt, at den skulde mangle hos nogen Steno. Ogsaa i denne Henseende har jeg derfor ændret Afbildningen. Den findes rigtignok heller ikke paa van Bredas Afbildning<sup>1)</sup>, men er tydelig nok paa Peters's (jvfr. nedenfor). At den af Pernetty (l. c. pl. II fig. 2) afbildede, paa Bugen sortplettede Delfin, som viste sig for ham i Nærheden af de kapoverdiske Øer, var den samme Form, forekommer ogsaa mig meget sandsynligt<sup>2)</sup>. v. Bredas Afbildning af hans *Delphinus bredanensis* (Less.)<sup>3)</sup> — som er anerkjendt at være *Steno rostratus* Desm. — viser os rigtignok en smækker, langstrakt Delfinform, hvis stærke Næb fortsætter sig uden Grænse eller Antydning af en Fold over i Pandedelen; Rygfinnen er stor og Bugens lyse Farve gaar temmelig jævnt over i Sidernes og Ryggens mørke. Men er Afbildningen først udført efter Udstopningen, turde jeg dog hverken lægge Vægt paa dens Farvefordeling eller paa den Form, Hoved og Næb have faaet — dertil har jeg tilstrækkelig Erfaring fra andre lignende Lejligheder.

Den ombord paa det tydske Krigsskib «Gazelle» paa 32° 29' 7 S. Br. og 2° 1' V. L. harpunerede, 1850 Mm. lange, af afd. Prof. Peters<sup>4)</sup> beskrevne «*Steno perspicillatus*», en Hun, viste dog efter Prof. Studers Optegnelser heller ikke noget Spor til den ejendommelige Tegning, det Udstyr med Stjernepletter i den mørke Del og med mørke Smaapletter i den lyse, som udmærker Andréas Steno. Idet jeg forøvrigt henviser til Prof. Peters's udførlige Redegjørelse, fremhæver jeg kun, at den beskrives som sort med gulhvide Sider og

<sup>1)</sup> Nieuwe Verhandel. v. h. k. Nederlandsche Institut te Amsterdam, tweede Deel, 1829. Aanteekening omtrent eene nieuwe soort van Dolfijn; pl. I.

<sup>2)</sup> Dens Farve beskrives saaledes: «Ryggen sortagtig, Bugen perlegraa, lidt gulagtig, smaaplettet (moucheté) med sort og graat».

<sup>3)</sup> Hvorfor baade Schlegel og Flower lade van Breda benævne den «*D. planiceps*», er det ikke lykkedes mig at udfinde. S. lader I. B. Fischer (Synopsis Mammalium, 1829) være Ophavsmand til Navnet «*D. bredanensis*».

<sup>4)</sup> Mittheilung über die von S. M. S. Gazelle gesammelten Säugethiere. Monats-Berichte d. kön. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin f. 1876 (1877) S. 360 pl. II og III.

hvid Bug, og at Grænsen mellem begge Farver falder efter Afbildningen helt anderledes end paa Andréas Delfin; Øjet var indfattet af en brun Linie, der tillige fulgte den Fure, som adskiller Pande og Næb; Rygfinnen var forholdsvis stor, og Luffen ikke indskaaren ved Roden som paa vor og v. Bredas Figur. Tændernes «Guillochering» omtales ikke. Deres Antal var  $\frac{23-24}{22-23}$ , deres Højde  $14\frac{1}{2}$  Mm. og deres Tværmaal 6 Mm.; 3 optog til sammen 28 Mm.; Hvirvlerne  $66 = 7 + 12 + 15 + 32$ ; kun de 5 første Par Ribben havde Ribbens-«Hoveder»; der var 25 Nedrebuer, af hvilke de 3 første ikke vare forenede i Midtlinien. Antallet af Led i Mellemlhaand og Fingre var, naar de bruske Endestykker ikke medregnes, 3, 8, 6, 3, 2. — Der er dog i denne Delfins Osteologi, saavidt den er oplyst, intet, der giver tilstrækkelig Grund til at anse den for artsforskjellig fra *Steno rostratus* eller fra den her beskrevne. I Henseende til Tændernes Lidenhed, skjønt just ikke i Henseende til deres Antal, vilde «*S. perspicillatus*» dog komme nærmest til den som *S. compressus* eller *S. Reinwardtii* fremhævede Varietet eller Form. — De senere Tidens Delfinstudier — særligt P. Fischers — have lært os ikke at lægge for megen Vægt paa Forskjelligheder i Tegning, forsaavidt disse ikke støttes af osteologiske Karakterer. Det maa i al Fald overlades til Fremtiden nærmere at belyse eller muligvis udjævne de udhævede Forskjelligheder i Farvefordeling og Tegning hos Stenonerne. Den af Fr. Cuvier publicerede Figur af et ved Brest fanget Exemplar (Histoire naturelle des Cétacés (1836) pl. X fig. 2) kaster kun for saa vidt lidt Lys over Sagen, som den viser nogle smaa, isolerede Pletter i den lyse Bug, — altsaa dog maaske en Begyndelse til den plettede Tegning, der udmærkede baade Pernetts og Andréas Delfiner.

Med Hensyn til *Steno*-Slægtens Synonymi skal jeg i øvrigt henvise til Prof. Flowers Afhandling «On the characters and division of the family Delphinidæ» (Proceed. Zool. Soc. London 1883. S. 482 flg.). Ogsaa han skjelner, for det ham foreliggende Materiales Vedkommende, mellem to Former af Hovedskaller i denne Slægt, hvilke han dog ikke betragter som repræsenterende to Arter men kun «to vel udprægede Varieteter». Den mere bredsnudede, i Museerne hyppigere Form med de færre Tænder (20—23) er den typiske *S. rostratus*, den mere smalsnudede med de flere (23—24) Tænder<sup>1)</sup> svarer til *Steno compressus* Gray<sup>2)</sup> eller *Delph. Reinwardtii* Schl.<sup>3)</sup>; men der er, siger Flower, en saa successiv Gradation mellem Yderformerne, at det er umuligt at drage nogen Grænse, og der er, efter Analogien med *Delphinus* og *Tursiops*, nogen Sandsynlighed for, at det kan være en Kjønsforskjel. — De ældre Angivelser gaa ud paa, at *S. rostratus* skulde fore-

<sup>1)</sup> At Flower ikke her angiver Talforholdene paa en med min Erfaring aldeles stemmende Maade, men lidt for lavt, vil være indlysende af det foregaaende; men det er aabenbart den samme Forskjel, som han har for Øje.

<sup>2)</sup> Voyage of h. m. s. Erebus and Terror, p. 43, tab. 27.

<sup>3)</sup> Abhandlungen aus dem Gebiete der Zoologie und vergl. Anat. p. 27 pl. III f. 23.

komme baade i Atlanterhavet (v. Bredas Exemplar var fra Hollands Kyst, F. Cuviers fra Brest), i det indiske og røde Hav og i Stille-Havet<sup>1</sup>). Der synes altsaa ikke at kunne fastholdes nogen Forskjel mellem en mere bredsnudet Form fra Atlanterhavet og en mere smalsnudet fra det indiske og stille Hav. Hvad enten «*Steno rostratus*» opfattes som et snævrere eller videre Begreb, synes den at maatte opstilles som en af de kosmopolitiske Arter, der ere udbredte over de varmere Bælter af begge de store Verdenshave og af og til forvilde sig, kan man vel sige, op i de middelvarme Have.

---

## II.

### *Delphinus* L. (s. str.).

Fra dens nærmeste Slægtninge — *Steno*, *Prodelphinus* og *Tursiops* — skjelnes denne Slægt skarpt ved Hovedskallens Ganefurer; Reinhardt føjer dertil i en af sine haandskrevne Optegnelser «og ved, at Mellemkjævebenene ere indbyrdes sammenvoxne». Jeg tilføjer denne Bemærkning, da jeg ikke har set dette Forhold ellers optaget blandt Slægtsmærkerne, hvad det dog uden Tvivl bør, da det synes at være aldeles konstant hos alle ikke aldeles unge Individuer. Der er ikke fuld Vished for, at man kjender mere end én Art af denne Slægt, den vidt udbredte klassiske *D. delphis* L., som, mærkeligt nok, først er bleven godt afbildet af Reinhardt<sup>2</sup>) og nogle Aar efter, ikke mindre godt, af Flower<sup>3</sup>). Vi skyldte desuden P. Fischer (l. c.) flere Afbildninger, der oplyse den Variation i Farvetegningen, som kan findes hos denne Art, selv hos Individuer, der ere fangne i de samme Have — i dette Tilfælde i den «spanske Sø», ved Arcachon. — Lafont havde gjort 5 Arter af dem (*D. fusus*, *sowerbianus*, *balteatus*, *variegatus* og *moschatus*); Fischer reducerede dem alle til 2 Varieteter: den med graa og den med gule Sider! Da der blandt 15 Stykker, hvis Kjøen var kjendt, kun var 3 Hanner, kunde det ikke tilfulde oplyses, hvorledes denne Variation forholdt sig til Alder og Kjøen; men man sér dog, at den gulsidede Afart forelaa i 2 lige store voxne Individuer, Han og Hun,

---

<sup>1</sup>) P. Fischer opfører — efter Lesson — ogsaa en «*Steno* (?) *santonicus*» (Cétacés du sud-ouest de la France, Actes de la Soc. Linn. de Bordeaux, Vol. XXV, 1881). Det behøver ikke at udvikles nærmere, at hvad det saa er, er det ikke en «*Steno*» i den Betydning, hvori dette Slægtsbegreb her er taget.

<sup>2</sup>) Videnskabelige Meddelelser fra den naturhistoriske Forening for 1866, tab. V.

<sup>3</sup>) Transactions of the Zoological Society, Vol. XI, 1880, pl. I, fig. 1.

og man maa vel derfor nærmest antage, at denne Variation i Farven er uafhængig af Alder og Kjøen.

Efter de Erfaringer, som man har havt Lejlighed til at gjøre paa det nævnte Sted, skulde Hunnerne være meget talrigere end Hannerne eller maaske nærmere sig Kysten mere og derved være mere udsatte for at fanges. Det er stadigt i Vintermaanederne (September til Marts), at de fanges ved denne Del af Frankrigs-Kyst. I Henseende til Størrelsen synes der ikke at være nogen Forskjel paa Kjønnene. Voxne «Springere» havde en Længde af 2100 à 2150 Mm. — ifølge en Meddelelse af v. Beneden naa de endog en Længde af 2350 Mm. — men de ere allerede forplantningsdygtige ved 1700 Mm. De største Hovedskaller havde en Længde af 479—485 Mm. (Hanner) og 460 Mm. (Hunner). Ved at sammenligne Hovedskallen af én Han og én Hun af samme Størrelse mente P. Fischer at finde, at Hannens Næb er længere, afsmalner mere regelmæssigt fortil og er mindre bredt paa Midten; at Hjørnekassen er lidt højere, ligesaa dets Kamme; Tindinggruben mere ægdannet, og Mellemkjævebenenes Yderrande omtrent\*parallele med Overkjævebenenes. «Hos Hunnen har Næbet en mere triangular Form; «Trianglen» er bredere, Snudespidsen mindre tynd, Tindinghulen stor og rundagtig»<sup>1)</sup>. Tændernes Antal er meget variabelt, ofte forskjelligt i de to Sider af samme Kjæve; snart er der flest i Overkjæven, snart i Underkjæven. Variationen falder mellem 39 og 53 i Overkjæven, mellem 42 og 51 i Underkjæven<sup>2)</sup>. Hvirvlernes Antal er som Regel 74 (sjældnere 73 eller 75); de to første ere sammenvoxne, de andre frie. Ribbenenes Antal kan være 14 eller 15 paa hver Side; det var i 2 Tilfælde af ni 14 paa den ene Side og 15 paa den anden, en Gang 16 paa begge Sider. Bækkenbenenes Størrelse var hos yngre Hunner  $\frac{1}{39}$ , hos ældre  $\frac{1}{29}$ — $\frac{1}{22}$  af Totallængden. Fingerleddenes Antal varierede — hvis Skeletterne have været fuldstændige — som følger: I: 2—3; II: 8—9; III: 5—7; IV: 2—4; V: 1—2. Forlemmernes Længde er  $\frac{1}{7}$  af Totallængden (hos Fosteret  $\frac{1}{5}$ ); Halefinns Brede  $\frac{1}{5}$  (hos Fosteret  $\frac{1}{6}$ ) af samme. Med Hensyn til de undersøgte Individuers særlige Farvetegning o. s. v. maa jeg henviser til P. Fischers udførlige Meddelelse. Af hans Optegnelser om de enkelte Skeletter anfører jeg nedenfor, hvad der synes mig oplysende til Sammenligning med vore og kan samles i tabellarisk Form, i Forbindelse med hvad der kan af Talforhold aflæses paa det af P. Gervais i «Ostéographie des Cétacés» afbildede Skelet<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Det maa bemærkes, at dette kun synes at være Resultatet af Sammenligningen mellem et enkelt Par og ikke skal betragtes som en paa et større Materiale bygget Abstraktion.

<sup>2)</sup> Det synes imidlertid at fremgaa af Specialbeskrivelserne, at de smaa forreste Tænder ikke altid ere komne med.

<sup>3)</sup> Forkortelserne i Overskrifterne ville forhaabentlig være forstaaelige ved Sammenligning med de følgende Tabeller.

Kjøn.	Dyrets Længde.	Hovedskallens Længde.	Hvirvler.	Ribben.	Rudimentære Ribben m. Hals og Hoved.	Lændehvirvler.	Halehvirvler.	Nedrebuer.	1ste Kar kanal.	Sidste Parapof.	Sidste Hamap.	Bækkenb.	Fingerled.		
	M.	M.										Mm.			
	2,150	0,445	74	14	5	22	31	24		59			3,8,5,3,1		
♀	2,120	0,435	75	14	1/1	54		25				75		{ Manubrium perforatum.	
♂	2,110	0,485	74	14/15	1/0	52				58	65		2,8,6,2,1		
♀	2,110	0,460	74	14	1/1	53				58	65		2,8,6,2,1		
♀	2,100	0,460	74	14/15	1/2	52				56	63	92	3,8,6,2,1	{ Manubrium perforatum.	
♀	1,560	0,365	74	16	3/3	5	19	32	24	52	58	65	40	2,9,7,4,2	{ Manubrium fissum.
	1,810	0,440	74	15	2/2	5	21	31		53	57	63	75	3,8,6,4,1	{ Manubrium fissum.
Efter Afbildn. i «Osteographie»			74	15			21	31	21	55	57	60-61	3,10,7,3,2	{ 28-41de Hvirvel uden Metapofyser.	

Flower har undersøgt en Række Skeletter af den ved Tasmaniens Kyst, omkring Ny-Holland og Ny-Zeeland forekommende Delfin-Form, som er bleven beskrevet under Navnene *D. novæzelandiæ* Gr., *D. Forsteri* Gr.; *D. fulvofasciatus* Hombr. & Jacqu. (hvortil vel endnu vil være at føje *D. tasmaniensis* Gerv.). Han var ikke istand til at skjelne dem fra den ved Europas Kyster forekommende Form, og han antager, at *D. Bairdii* Dall fra den nordlige Del af det stille Hav heller ikke er andet. Til *D. delphis* fører P. Gervais som Race: *Delphinus mediterraneus* Loche. Derimod holder Flower ude fra den typiske *D. delphis* 3 Former, der rigtignok kun ere kjendte hver af et enkelt Kranium; 1) *D. major*, opstillet paa en 523 Mm. lang Hovedskal med  $\frac{46-46}{47-47}$  Tænder; 2) *D. janira*, mindre, med bredere Hoved, kortere Næb og 44 Tænder, formentlig identisk med *D. pomeegra* Owen fra Madras; og 3) *D. longirostris* Gerv. (non Gray) fra Malabarkysten; Snudedelen er her mere end dobbelt saa lang som Hjørnekassen, men Tændernes Antal ( $\frac{55-55}{54-53}$ ) er ikke større end det kan være hos *D. delphis*<sup>2)</sup>.

Af Delphiner (i denne mere indskrænkede Betydning) har der foreligget mig i Samlingen 13 Kranier, uden de tilhørende øvrige Skeletdele; flere af dem ere dog mere eller

<sup>1)</sup> Jeg maa forstaa Sagen saaledes, at Tallene paa disse to Stykker ere ens, for saa vidt andet ikke udtrykkelig er bemærket.

<sup>2)</sup> I «List of the specimens of Cetacea in the Zoological Department of the British Museum» (1885) henføres dettes *Delphini* til 5 Arter: 1) *D. delphis* (hvortil henføres *D. fulvofasciatus*, *Forsteri* og *novæzelandiæ*), 2) *D. janira*, 3) *D. pomeegra* (næppe forskjellig fra *D. janira* og formodentlig kun en lille Form af *D. delphis*), 4) *D. capensis* (mere langsnuget end nogen anden *Delphinus* i Samlingen med Undtagelse af den følgende) og 5) *D. major* (maaske identisk med *D. capensis*: «afviger kun fra *D. delphis* ved sin betydeligere Størrelse»). Med andre Ord: alle disse Formers Artsforskjellighed fra *D. delphis* er og bliver usikker, for ikke at sige: højst tvivlsom!

mindre defekte; kun 4 af dem bære Lokalitets-Angivelse: «Atlantehavet, ved Afrikas Kyst» (Nr. 10), «Spanske Sø» (Nr. 11), «Hollandske Kyst» (Nr. 12) og «Azorerne» (Nr. 16). Desuden har jeg for mig 11 Skeletter af hvilke dog de to ere defekte, idet de enten mangle Brystbenet og tildels Ribbenene eller Lemmerne; de 3 bære kun den almindelige Angivelse «Atlantehavet» (Nr. 2, 3 og 6); ét (Nr. 1) er i Novbr. 1865 fanget eller strandet ved Glatved Strand; for syvs Vedkommende er det opgivet, hvor de ere harpunerede i Atlantehavet, nemlig:

Nr. 4 paa 36° NB. og 140° VL.,	Nr. 21 paa 45°14 NB. og 16°4 VL.,
- 5 — 42°18 — - 12° — ,	- 22 — 44°25 — - 25°30 — ,
- 7 — 1/2° — - 32° — ,	- 23 Ud for Kanalen.
- 8 — 39° — - 12° — ,	

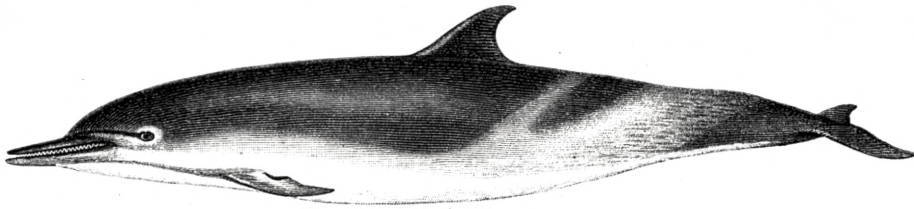
(To af Kapt. Andréa paa 34° SB. og 7°3 VL., og 35°38 SB. og 10° ØL. harpunerede Exemplarer kom desværre til Museet i Liverpool; jfr. nedenfor). Kun for 3 af disse Skeletter er Dyrets Kjøng angivet: Nr. 1 er af en Han, Nr. 3 og 5 af Hunner. Da der med Nr. 21 fulgte et Foster med samme Lokalitätsangivelse, er det rimeligvis dette Dyrs Foster, Nr. 21 altsaa ogsaa en Hun. Maal haves af Nr. 3 og 5, af Nr. 5 ogsaa en Skitse af Farvetegningen, som her er gjengivet i Træsnit; en fuldstændig Afbildning af Nr. 1 er, som anført, publiceret i «Vidensk. Meddel. fra den naturh. Foren.» for 1866. Det kan bemærkes, at denne Afbildning er af et forholdsvis ungt Dyr.

Jeg skal meddele de Maal, der ere opgivne, i Fod og Tommer:

Nr. 3:	Nr. 5:
Totallængden omtrent . . . . . 5'	Totallængden . . . . . 6'
Tykkelsen umiddelbart bagved Lufferne . . . 3' 1 1/2"	Fra Snudespidsen til Rygfinnens Begyndelse . . 2' 8"
— — — Rygfinnen . . . 2' 6 1/2"	- — - Luffens Udspring . . . . . 1' 6"
Fra Rygfinnen til Halefinnen . . . . . 2' 7"	- — - Øjet . . . . . 1'
- Næsefuren - Rygfinnen . . . . . 2' 3'	- — - Blæsegattet . . . . . 1' 1/2"
- — - Luffen . . . . . 1' 2"	- Kjønsaabningen til Gattet . . . . . » 2"
Rygfinnens Længde ved dens Grund . . . . . » 10"	- Gattet til Indsnittet i Halefinnen . . . . . 1' 7"
Snudens Længde til Næsefuren . . . . . » 5 1/4"	- Navlen til Kjønsaabningen . . . . . 1' 1 1/2"
Fra Næsehulens Midte til Øjet . . . . . » 8"	- Rygfinnen til Indsnittet i Halefinnen . . . . 2' 4"
Fra Gattet til Halefinnen . . . . . 1' 8"	Kroppens Omfang foran Rygfinnen . . . . . 2' 11 1/2"
Mellem Gattet og Kjønsaabningen . . . . . » 2"	— — — Halefinnens Udspring . 1' 4"

Farvefordelingen hos dette Exemplar (Nr. 5) — i hvilket Reinhardt, ligesom i det under Nr. 5 opførte, mente at gjenkjende *Delphinus Walkeri* Gr. eller en meget nærstaaende Form — har jeg saa godt som muligt, efter den noget raa Skitse indtegnet i en Konturfigur af *D. delphis*. Det vil ses, at Ryggen var ensartet sort eller mørk, Bugen hvid, Siderne





graaagtige, Halefinnen og de nærmeste Dele af Halen ovenpaa atter ensartet mørke ligesom Ryggen. Men mellem disse to mørkere Partier laa der to Skraabælter, det forreste lysere graaligt med en mørk Plet i, det andet lysere med mørkere Skygninger. Omkring Øjet var der en hvid Plet; dog gik der fra dets Forrand en mørk, skarpt begrænset Stribe hen til Snuden og fra denne igjen en mørk Linie til Brystfinnens Udspring.

Imod Reinhardts Opfattelse af disse Individuer som «*D. Walkeri* Gr.» har jeg for saa vidt intet at indvende, som denne efter min Mening ikke er andet end *D. delphis*. Derimod maa jeg erklære mig mere uenig med ham, for saa vidt han havde opstillet et af de andre Skeletter (Nr. 7) i Museet som en egen Art under Navn af «*D. Hygomi*». Jeg nærer ingen Tvivl om, at samtlige 11 Skeletter og 13 Hovedskaller kun tilhøre en eneste Art, den gamle «*D. delphis*». Men jeg har trot det rigtigst lige over for disse Tvivl at meddele mine Maalinger og Tællinger af disse Stykker (S. 19 og 22-23) i en mere detailleret, tabellarisk Form end i andre lignende Tilfælde.

Prof. Flower har i sin citerede Afhandling om Delphinidernes Slægter og Arter ikke taget noget Hensyn til en lille Artikel af J. E. Gray i «Proc. Zool. Soc. 1865», «Description of three species of Dolphins in the free Museum of Liverpool». Gray meddeler deri, at Hr. Moore, Bestyrer af Museet i Liverpool, havde sendt ham til Undersøgelse tre Delfin-skeletter, som vare forærede det nævnte Museum af en Kaptain Walker, Fører af Skibet «Trenton», som paa en Rejse fra Ostindien til Liverpool havde ikke alene «samlet» dem (∴ fanget Delfinerne) og bevaret «Knøglerne, Halerne og Brystfinnerne», men ogsaa udført Tegninger af Dyrene, alt som de bleve fangne. Disse Tegninger, ledsagede af Papmodeller af Rygfinnerne, havde Hr. Moore sendt til Dr. Gray tilligemed Skeletterne, og formindskede Kopier af dem ere optagne S. 736-38 i sidstnævntes Meddelelse. Men alt dette forholder sig noget anderledes: det er i Virkeligheden vor Kaptain A. F. Andréa, som har harpuneret, udmaalt og skeletteret disse Delfiner, udført Modellerne af Finnerne, skitseret Dyrenes Farvetegning og foræret det hele til ovennævnte Kaptain Walker, som tog ham og hans Mandskab ombord i sit Skib «Trenton», da dette traf Andréas Skib brændende i Lasten — en Kulladning — midt paa Atlanterhavet. Gray gjorde de tre ham foreliggende Skeletter, af hvilke de to tilhørte Slægten *Delphinus* (s. str.), det tredje *Clymene* (eller *Prodelphinus*, som vi nu kalde den), til tre nye Arter, idet han rigtignok udtaler, at de to ægte Delfiner havde

næsten aldeles ensartede Kranier, men vare meget(?) forskellige i Farvetegningen. Det er aabenbart denne Forskjel, som har bevæget ham til i dem at se to forskellige Arter, og han udbreder sig over, hvor ubesindigt man handler i at henføre Kranier fra alle Verdens Have til «*Delphinus delphis*», al den Stund disse to, i Kraniet saa ens og i Tegning saa forskellige, Delfiner vare fangne i faa Graders Afstand fra hinanden: nemlig paa 34° SB. og 7°3' VL., og paa 35°38' SB. og 10° ØL. Forskjellen i Farven indskrænker sig dog til, saavidt jeg kan forstaa, at den ene («*D. Moorii*») var sort paa hele Ryggen, Oversiden af Hovedet, Rygfinnen og Halefinnen, med en sort Brillefigur fra Øje til Øje langs Næsefuren, graa paa Overnæbet, langs Siderne af Krop og Hale og paa Lufferne, hvid paa Bugen til Mundspalten; hvorimod den anden («*D. Walkeri*»), ligeledes en Hun, havde et mere mørkegraat Parti indskudt mellem det sorte og graa paa Siderne af Bagkrop og Hale. Der udhæves tillige nogle ubetydelige Forskjelligheder i Formen af Skulderbladet og i Formen af Ganen, men der kan, efter hvad der nu vides om Variationen indenfor Arten *Delphinus delphis*, ikke være Tvivl om, at begge Exemplarer høre til denne Art. Jeg kan derfor indskrænke mig til at henvise til, hvad der ellers anføres om dem af Maal o. s. v. i Grays Meddelelse, og behøver ikke at dvæle videre ved dem her.

Det vil fremgaa af de S. 19 meddelte Maal af 24 Delfin-Hoveder, at der er nogen Variation i Hovedskallens Proportioner; Hjerne-kassens Længde, maalt fra Nakkeledknudernes Bagrand til en Linie mellem *incisuræ anteorbitales*, er saaledes i Almindelighed noget mindre end dens Brede mellem de mest fremspringende Dele af Kindbue-Udvæxterne; men Forskjellen er højst 10—13 Mm., og ikke sjælden er der ingen; eller — i 4 Tilfælde (Nr. 10 og 17, 22 og 23) — er Længden endog større (2—12 Mm.) end Bredden, saa at Hjerne-kassen faar en mere langstrakt Form, der dog ikke er meget iøjnefaldende. Jo større Dyret er, desto længere er i Regelen forholdsvis Hovedskallens Snudedel. Plovbenet er i Almindelighed synligt som en ganske fin Bensplint paa Hovedets Underside i en Strækning, der omtrent svarer til den, som indtages af en halv Snes (6—13) Tænder, gennemsnitlig omtrent fra den 16de til den 27de bagfra; i enkelte Tilfælde synes det at være helt skjult. Variationen i Snudedelens Brede er ikke meget kjendelig, derimod nok, at den af Mellemkjævebenene dannede Ryg snart kan være mere høj og hvælvet, snart mere plan. De individuelle Forskjelligheder i Henseende til Ganekjølens Form ere lige saa store som de, man ser paa Afbildningerne i «*Ostéogr. d. Cétacés*», pl. XXXIX af *D. delphis*, «*tasmaniensis*» og «*fulvofasciatus*». Snart ere Næsebenene adskilte ved et større Mellemrum fra Nakkekammen, snart ere de, saa at sige, knyttede umiddelbart op til denne ved forbenet Binde-væv. Afstanden fra *incisuræ anteorbitales* til den bageste Tand er næsten altid mere end Snudedelens (Næbets) halve Brede ved dens Grund, mellem hine «*incisuræ*». Tændernes Antal er det ikke altid let at angive med fuldstændig Skarphed, fordi de forreste i Overmunden (c. 6) og i Undermunden (c. 4) paa hver Side ere meget smaa, skjulte i Gummerne,

Udmaalinger af 24 Hoveder af *Delphinus delphis* L.

Nr. og Kjø.	Hele Hovedskallens Længde fra Nakkedkn. til Snudespids.	Hovedskallens Brede over Kindbuegrenene.	Forhold mellem Totallængden og Brede.	Hjerne-kassens Lgd. til en Linie mell. Indsnitt.	Forholdet mell. denne og Totall.	Snudens Længde fra Indsnittene.	Forholdet mell. Hovedskallens og Snudens Lgd.	Forholdet mell. Hjerne-kassens og Snudens Lgd.	Snudens Brede ved Grunden mell. Indsnitt.	Forholdet mell. Snudens Længde og største Brede.	Afstand fra Indsnitt. til sidste Overkjevæetand	
	Mm.	Mm.		Mm.		Mm.			Mm.		Mm.	
22	470	175	1 : 2,7	177	1 : 2,7	289	1 : 1,6	1 : 1,6	90	1 : 3,2	51	{ Atlanterhavet. 44°25' NB. 25°30' VL.
2	454	183	1 : 2,5	173	1 : 2,6	284	1 : 1,6	1 : 1,6	92	1 : 3,1	54	Atlanterhavet.
4	454	180	1 : 2,5	170	1 : 2,7	290	1 : 1,6	1 : 1,7	89	1 : 3,3	53	{ Atlanterhavet, 36° NB. 190° VL.
16	450	175	1 : 2,6	172	1 : 2,6	284	1 : 1,6	1 : 1,7	90	1 : 3,1	52	Azorerne.
15	450	176	1 : 2,6	176	1 : 2,6	280	1 : 1,6	1 : 1,6	91	1 : 3,1	47	
28	450	174	1 : 2,6	172	1 : 2,6	283	1 : 1,6	1 : 1,6	93	1 : 3	57	
21	450	185	1 : 2,4	178	1 : 2,5	275	1 : 1,7	1 : 1,6	91	1 : 3	51	45°14' NB. 16°4' VL.
6	440	178	1 : 2,5	173	1 : 2,5	271	1 : 1,6	1 : 1,6	88	1 : 3,1	54	Atlanterhavet.
8	434	175	1 : 2,5	170	1 : 2,6	273	1 : 1,6	1 : 1,6	85	1 : 3,2	47	{ Atlanterhavet, 39° NB. 12° VL.
7	432	176	1 : 2,5	168	1 : 2,5	268	1 : 1,6	1 : 1,6	87	1 : 3,1	47	{ Atlanterhavet, 42° NB. 32° VL.
18	430	175	1 : 2,5	175	1 : 2,5	265	1 : 1,6	1 : 1,5	85	1 : 3,2	41	
17	424	174	1 : 2,4	178	1 : 2,4	257	1 : 1,7	1 : 1,4	90	1 : 2,9	46	
11	424	180	1 : 2,4	168	1 : 2,5	264	1 : 1,6	1 : 1,6	90	1 : 2,9	59	Spanske Sø.
10	420	163	1 : 2,6	170	1 : 2,5	253	1 : 1,7	1 : 1,5	86	1 : 2,9	49	{ Atlanterhavet udfor Afrikas Kyst.
3 (♀)	420	170	1 : 2,5	167	1 : 2,5	256	1 : 1,6	1 : 1,5	86	1 : 3	45	Atlanterhavet.
29	420	178	1 : 2,4	172	1 : 2,4	260	1 : 1,6	1 : 1,5	95	1 : 2,7	60	
13	—	145	—	—	—	200	—	—	70	1 : 2,9	42	(Defekt.)
9	415	173	1 : 2,4	165	1 : 2,5	255	1 : 1,6	1 : 1,5	90	1 : 2,8	53	
1 (♂)	410	172	1 : 2,4	170	1 : 2,4	246	1 : 1,7	1 : 1,5	82	1 : 3	44	Glatved Strand.
5 (♀)	410	175	1 : 2,3	162	1 : 2,5	254	1 : 1,6	1 : 1,6	85	1 : 3	46	{ Atlanterhavet, 42° 18' NB. 12° VL.
14	407	170	1 : 2,4	170	1 : 2,4	240	1 : 1,7	1 : 1,4	83	1 : 2,9	45	
23	390	168	1 : 2,3	170	1 : 2,3	234	1 : 1,7	1 : 1,4	87	1 : 2,7	44	Udfor Kanalen.
12	385	160	1 : 2,4	159	1 : 2,4	253	1 : 1,7	1 : 1,4	81	1 : 2,9	45	Hollandske Kyst.
30	380	162	1 : 2,5	157	1 : 2,4	223	1 : 1,7	1 : 1,4	77	1 : 2,9	40	

og derfor ofte gaa tabt ved en mindre forsigtig Behandling; det opgives derfor ofte for lavt. Exempler paa, hvad jeg efter nøje Prøvelse anser for fuldstændige Tandformler, der ikke kunne mangle meget i Nøjagtighed, ere:

$$\frac{49-49}{43-43}, \frac{46-47}{46-45}, \frac{45-46}{45-44}, \frac{49-48}{49-48}, \frac{50-50}{46-46}, \frac{47-48}{47-49}, \frac{51-50}{49-47}, \frac{51-52}{49-50}, \frac{55-55}{49-50}, \frac{?}{54-52} \text{ } ^1).$$

Variationen er altsaa ikke ubetydelig, fra  $\frac{45}{43}$  til  $\frac{55}{54}$ ; i Almindelighed er der lidt færre Tænder i Undermundens end i Overmundens; men det modsatte Tilfælde kan ogsaa forefalde, f. Ex.  $\frac{46}{50}$ , naar Mellemkjæven viser sig tandløs. Tændernes Højde over Kjæverne varierer fra 8 til 10 Mm., og der gaar hos de større 5—5 $\frac{1}{2}$ , hos de mindre 6—7 $\frac{1}{2}$  paa en dansk Tomme; endelig kan anføres, at Overkjævens Tandrækker gaa saa meget længere tilbage end Underkjævens, at der sidder fra 1—6 Overtænder bagved den sidste Undertand.

Intet af vore Skeletter er af ret gamle Dyr; Hvirvelenderne (Epifyserne) ere i al Fald frie, selv paa de største af dem. Hvirvlernes samlede Antal kan variere fra 74 til 76, af hvilke den sidste i Almindelighed dog kun repræsenteres af en yderst lille Benknort. Brysthvirvlernes og Ribbensparrenes Antal er 14 eller 15; i Regelen er det sidste eller endog de to sidste Par — dette er f. Ex. Tilfældet paa et af de Skeletter, hvor der var 15 i alt — løse og mere eller mindre rudimentære<sup>2)</sup>. Lændehvirvlernes Antal, bestemt paa den sædvanlige Maade, varierer efter Tabellen (S. 22-23) fra 17—21, Halehvirvlernes fra 33 til 35; dog ere disse Tal jo ikke at stole paa, da det allerførreste lille Par Nedrebuer kan mangle — det vil sige, være overset ved Præparationen eller ikke være forbenet — uden at savnes. Nedrebuerne (Hæmapofysernes) Antal varierer tilsyneladende fra 17—22—27; men de lavere af disse Talangivelser hidrøre fra, at de sidste — i Halefinnen — ere gaaede tabt ved Præparationen. Det første Par af de større Karkanaler, som gjennemgaa Parapofyserne ved deres Grund i en Del af Haleregionen, findes omtrent paa den 53de (52—55de) Hvirvel, den sidste Tværtap omtrent paa den 56de (55—58de), den sidste Ørebue omtrent paa den 62de (61—64de Hvirvel. I flere Tilfælde er det iagttaget, ligesom hos andre Tandhvaler, at denne lodrette Karkanal, der første Gang optræder f. Ex. paa den 53de Hvirvel, er meget tydelig paa den ene Side, men paa den anden endnu er meget fin eller mangler aldeles, og at to lige udviklede *foramina perforantia* først optræde paa den følgende Hvirvel.

Regelen er, at de 5 første Par Ribben have baade Hals og Hoved, altsaa dobbelt Ledforbindelse med Rygraden; paa 3 Skeletter var dette dog kun Tilfældet med de 4 første, paa et fjerde, det næstmindste af dem alle, endog kun med de 3 første! paa det

<sup>1)</sup> P. Fischer fandt følgende Tal:

$$\frac{39-39}{43-42}, \frac{42-42}{46-45}, \frac{47-44}{48-50}, \frac{47-48}{43-43}, \frac{48-48}{46-45}, \frac{48-49}{47-47}, \frac{48-48}{48-48}, \frac{49-48}{50-49}, \frac{50-48}{47-48}, \frac{53-53}{49-51}.$$

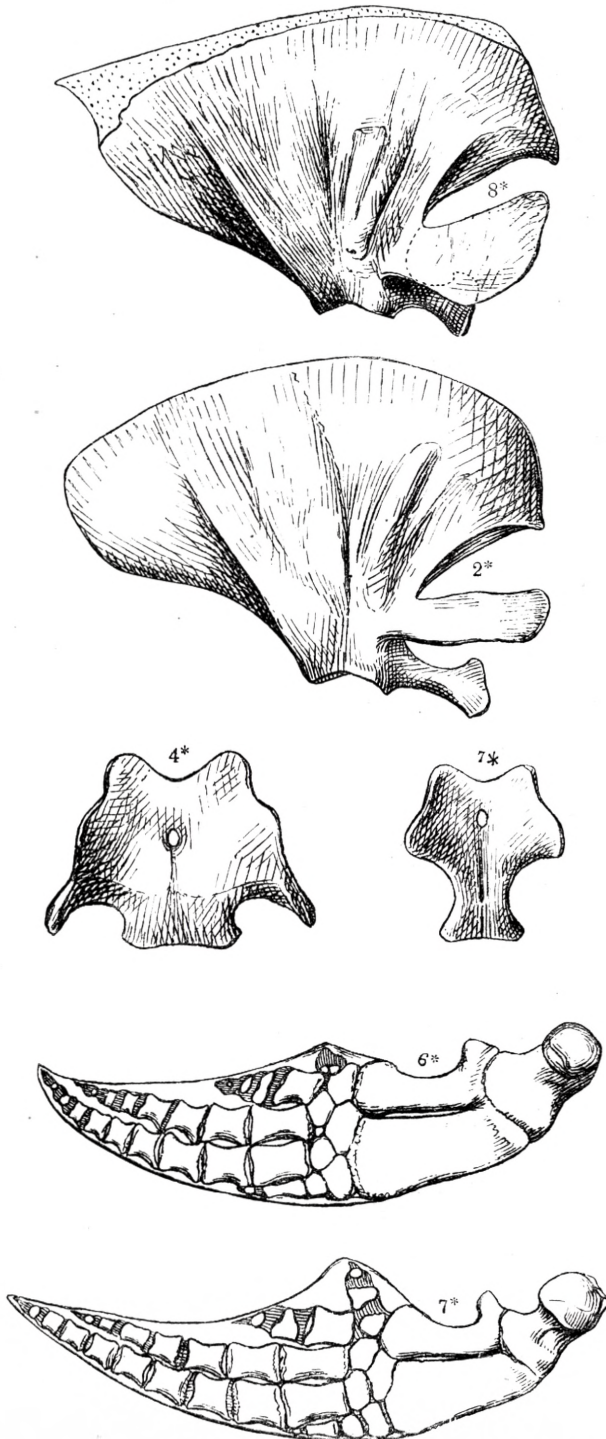
<sup>2)</sup> Efter P. Fischer kan dette endog være Tilfældet med 3 Par og det hele Tal af Ribbenspar stige til 16.

mindste og yngste i hele Rækken derimod med 5, som sædvanligt. Et Skelet optræder endog med 6 slige fuldt udviklede Ribben! Om der er flere eller færre Par med dobbelt Ledforbindelse retter sig altsaa ikke egentlig efter Størrelsen. Første Par Ribben er altid bredt, men som man vil se af Tabellen (S. 22-23), i meget forskjellig Grad, uafhængigt af Dyrets Størrelse. Paafaldende bredt, udviklet nedadtil paa en egen Maade, er det netop paa et af vore mindste Skeletter (Nr. 5). Der er i det Hele, med Hensyn til Skelettets hele Karakter som spinklere eller svagere nogen, som det synes aldeles individuel, Forskjellighed, der næppe kan føres tilbage til Alders- eller Kjønsforskjel alene; et af de større foreliggende Skeletter (Nr. 2) udmærker sig dog netop ved kraftigere Bygning og massivere Former. De længste Hvirveltorne (Torntappe) ere saa lange som  $4\frac{1}{2}$ — $5\frac{1}{2}$  Hvirvler af samme Rygradsregion, de længste Tværtappe som  $3\frac{1}{2}$ —4 Hvirvler. Der mangler altid Metapofyser i en vis Del af Rygraden, men denne Del kan, som det vil ses af Tabellen, have en meget forskjellig Udstrækning, der heller ikke lader sig bringe i noget bestemt Forhold til Dyrets Størrelse; aldeles stole paa Tallene kan man dog heller ikke i denne Henseende, da Metapofyserne, naar de ere bruskede, let blive ukjendelige eller gaa helt tabt paa det præparerede Skelet, og det er derfor især paa yngre Skeletter ikke let at afgjøre i mange Tilfælde, om man skal frakjende en Hvirvel Metapofyser eller ikke. Brysthvirvlernes Metapofyser — de største af den hele Række — vise derhos stor individuel Forskjel i Udvikling og Retning: mere forefter (vandret) eller mere skraat op efter. Undertiden have Tværtappene af de (5) forreste Halehvirvler ud imod Enden en Antydning til en lille, mere eller mindre tydelig, fortil rettet Udvæxt; det Skelet, paa hvilket dette er Tilfældet (Nr. 6), hører dog snarere til de mindre end til de større. Undertiden ere de to første i Midtlinien ikke sammenvoxne Nedrebuer sammenvoxne med hinanden indbyrdes, og i et enkelt Tilfælde udstrakte denne abnorme Sammenvoxning — som ogsaa findes hos andre Delfinformer — sig til alle de 4 første Par, saaledes, at de paa denne Maade fremkomne to lodrette Benplader ikke vare sammenvoxne i Midtlinien forneden. Første Halshvirvels Torntap kan være kortere eller længere, ofte mere eller mindre spaltet i Spidsen; anden Hvirvels Tværtap var forholdsvis bedst udviklet paa nogle af de større Skeletter. I et enkelt Tilfælde var den tredje Hvirvels Bue dragen med ind i de to førstes Sammenvoxning; ifølge Gervais kan dette endog undertiden være Tilfældet med fjerde. Andre individuelle Uregelmæssigheder ere, at 7de Halshvirvel er sammenvoxen eller nøje forbunden med første Brysthvirvel, eller at der optræder skjæve Foreninger af Halshvirvlers Halvbuer, saaledes f. Ex. at venstre 5te og højre 6te voxer sammen, udelukkende deres respektive Halvdele fra den for dem naturlige Forening. Bækkenbenene ere — vistnok paa Grund af deres Lidenhed — kun tilstede paa et af Skeletterne (Nr. 5); deres Længde dér er kun  $\frac{2}{3}$  af Brystben-Haandtagets Brede.

Nr. og Kjønn.	Skelettets hele Længde.	Hovedskallens Længde.	Forholdet mellem begge.	Hvirvler ialt.	Par Ribben.	Deraf rudimentære.	Ribben med Hals og Hoved.	Lændehvirvler.	Halehvirvler.	Nedrebner.	Første Karkanal i Parapof. p. Hv. N.	Sidste tydelige Parapofyse p. Hv. N.	Sidste tydelige Neura-pofyse p. Hv. N.	Ingen Metapofyser paa Hvirvlerne N.
	M.	M												
2	1,950	0,454	1 : 4,3	76	14		5	21	34	26	52/53	57	62	30—42
4	1,950	0,454	1 : 4,3	74	15	2/2	5	19	33	25	52	56	62	33—40
8	1,880	0,434	1 : 4,3	75	14	1/1	4	20	34	24	53/54	57	62	34—36
7	1,850	0,432	1 : 4,3	76	14		5	21	34	27	54/55	58	65	28—48
3 ♀	1,830	0,420	1 : 4,4	74	15	1/1	5	17	35	24	51	55/56	61	26—42
6	1,830	0,440	1 : 4,2	74	15	1/	4	19	33	24	52	57/58	63	29—40
21 ♀	1,810	0,450	1 : 4,0	74	15	2/1 ?	4	20	32	17	53/54	56	60	27—42
22	1,750	0,470	1 : 3,7	75	15	1/1	6	21	32	21	52/53	56	62	29—39
5 ♀	1,750	0,410	1 : 4,3	75	14—15	1/1	5	19	34	27	53	56	61	33—40
1 ♂	1,640	0,410	1 : 4,6	74	14	1/1	3	20	33	22	53	56	61	27—43
23	1,570	0,390	1 : 4,0	74	14 ?	?	5	21	32	19	52/53	57	62	34—39

11 Skeletter af *Delphinus delphis* L.

Altsaa Hvirvler uden Metapofyser.	Breden af manubrium sterni.	Breden af første Ribben.	Luffernes Længde.	i Forhold til hele Skelettets Længde.	Armen alene.	Haanden alene.	Forskjellen.	Fingerled.	
	Mm.	Mm.	Mm.		Mm.	Mm.	Mm.		
13	103	23	282	1 : 6,9	130	162	32	$\frac{2, 8, 7, 3, 1}{2, 7?, ?, 3, 2}$	Hul i Brystbenet (manubrium).
8	108	22	265	1 : 7,4	125	154	29	$\frac{2, 9, 7, 4, 2}{3, 9, 7, 4, 2}$	Hul i Brystbenet (manubrium).
3	98	17	274	1 : 6,9	122	160	38	$\frac{3, 8, 7, 3, 2}{}$	
21	<b>65</b>	16	247	1 : 7,5	102	160	58	$\frac{2, 9, 6?, 3, 2}{2, 9, 6, 2, 2}$	Manubrium næsten uden Udvæxter.
17	88	17	274	1 : 6,7	121	163	42	$\frac{2, 9, 7, 3, 2}{1, 8, 7, 4, 2}$	Manubrium spaltet.
12	93	20	240	1 : 7,2	120	140	20	$\frac{3, 8, 7, 3, 1}{2, 7?, ?, 3, 1}$	
16	93	20	260	1 : 7,0	118	152	24	$\frac{3, 8, 7, 2?, 1?}{2, 9, 7, 2?, 1?}$	Hul i Manubrium.
11	92	22	—	—	—	—	—	—	(Mangler Lemmerne).
8	90	<b>30</b>	250	1 : 7,0	114	148	34	$\frac{3, 9, 7, 3, 2}{3, 9, 7, 3, 1}$	Hul i Manubrium sterni. Bækkenben 62 Mm.
17	85	18	238	1 : 6,9	110	134	24	$\frac{2, 9, 6, 4, 1}{3, 9, 7, 3, 1}$	Udvæxterne paa Manubrium sterni lidet udviklede, bruskede.
6	—	20	220	1 : 7,1	111	123	12	$\frac{3, 8, 6, 3, 1}{3, 8, 6, 3, 1}$	(Mangler Brystben).

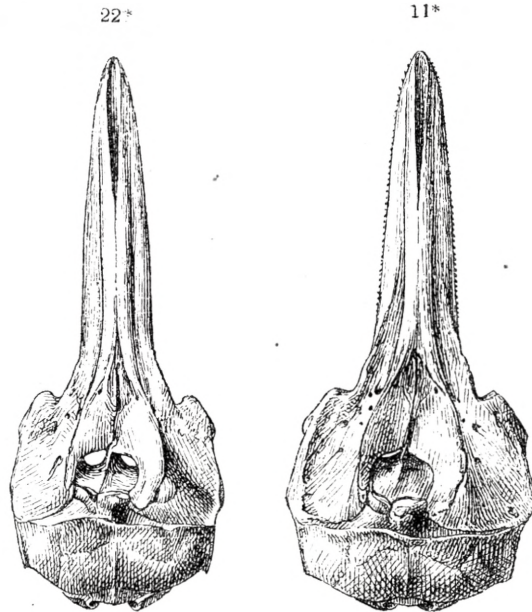


Skulderbladets Udvæxt (*acromion*) er i Almindelighed forholdsvis bred og bøjet op efter under en spids Vinkel med *spina scapulae*, men kan undtagelsesvis være paa-faldende smal og langstrakt. Ravn-næbsudvæxten er ikke sjælden noget udvidet, næsten hamat, mod Enden. Brystbenets Haandtag er ofte gjennemboret af et lille Hul, i et enkelt Tilfælde spaltet fortil; dets Brede er meget forskjellig; i Regelen har det to stærke, skraat bagud rettede Udvæxter, men disse kunne ogsaa næsten helt mangle, eller rettere være helt bruskede, og *manubrium sterni* synes da smallere end det ellers vilde være. (Jeg meddeler her Skitser af et Par Skulderblade og Brystbens-Haandtag for at oplyse disse individuelle Variationer.) Luffernes Længde er ligeledes, saa vidt man kan dømme derom af de tørre Skeletter, meget variabel i Forhold til Skelettets samlede Længde; den samme Variation findes i Forholdet mellem Haand og Arm. Man skulde næsten formode, at der maatte kunne skjelnes mellem en langluffet og en kortluffet Race, naar man ser Forholdet mellem Forlemmets (Luffens) og hele Legemets Længde variere fra 1:6,7 til 1:7,5; men en Grænse kan ikke drages. (Jeg vedføjer Skitser af to af de Tilfælde, hvor Forskjellen paa Haandens Længde i Forhold til Armen



er størst). Foruden de 5 typiske Haand-  
 rodknogler kan der i enkelte Tilfælde —  
 som hos andre Tandhvaler — optræde  
 en sjette, som da hos ældre Dyr kan  
 voxe sammen med de tilstødende paa hver  
 Side. Fingerleddenes Antal kan sættes  
 til I: 2—3; II: 8—9; III: (6—)7; IV: 3  
 (—4); V: 1—2; men det maa herved  
 erindres, at det sidste Led i hver Finger  
 kun er en lille Knort, der kan være mere  
 udviklet hos et Individ end hos et andet  
 og desuden have det Uheld at forsvinde  
 under Præparationen.

Det nægtes ikke, at disse Varia-  
 tioner, saa at sige i alle mulige Forhold,  
 ere forholdsviis store — langt større end  
 jeg paa Forhaand ventede dem; men intet  
 Steds finder jeg Holdepunkter for en Arts-  
 adskillelse. Jeg maa derfor ganske slutte mig til de af P. Fischer og Flower repræsen-  
 terede Anskuelser og erklære mig ude af Stand til at skjelne Arter mellem de foreliggende  
 Delfiner i indskrænket Betydning. Mest hælder jeg til den Antagelse, at der overhovedet  
 kun kjendes 1 Art af Slægten *Delphinus* s. str. Til Oplysning om Variationen i Hoved-  
 skallens Fysionomi hidsættes Afbildninger af to eksempelvis valgte Stykker; Tallene referere  
 sig ligesom ved Figurerne S. 24 til de Nummere, hvorunder de ere opførte S. 19.



### III.

Af Slægten *Prodelphinus* Gerv., der tidligere benævnedes *Clymene* eller *Clymenia*  
 Gray — hvilke Navne imidlertid maatte opgives, da de for længe siden have faaet fast  
 Anvendelse i andre Klasser af Dyreriget — har der været opstillet en stor Mængde Arter,  
 som opregnes af Prof. H. W. Flower i hans Afhandling om Delfinlægterne i «Proc. Zool.  
 Soc. 1883» S. 512; deres Tal kan endnu forøges med den i det foregaaende berørte  
*C. punctata* Gr. (Proc. Zool. Soc. 1865 p. 738) samt med A. W. Malm's *C. Burmeisteri*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Hvaldjur i Sveriges Museer år 1869. (Kgl. Sv. Akad. Handl. IX, 2, 1871). Flower har desværre  
 ikke kjendt eller benyttet dette vigtige Arbejde, da han udarbejdede sin ovennævnte Afhand-  
 Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. V. 1.

Det er i Regelen mindre Delfiner, der kun afvige fra *Delphinus* (*Eudelphinus* Gerv.) ved at mangle Ganefurerne, og ved at Mellemkjævebenene ikke ere sammenvoxne. Slægtens Grænser ere maaske endnu lidt usikre, forsaavidt som Slægten *Sotalia* — efter hvad Flower oplyser i «List of the specimens of Cetacea in the zoological department in the British Museum» (1885) — ikke altid har den Adskillelse eller Divergens af Ganevingebenene, som skulde karakterisere den; ved Tændernes betydeligere Størrelse og Hvirvlernes ringere Antal vil denne Slægt dog altid kunne holdes ude fra *Prodelphinus*. Vanskeligere er det maaske at drage Grænsen mellem *Prodelphinus* og *Lagenorhynchus*, til hvilken sidste Former med forholdsvis kort Snude og talrige Hvirvler synes at maatte kunne danne en ganske jævn Overgang. *Lagenorhynchus clancula* har saaledes ifølge Malm (l. c.) 71 Hvirvler, altsaa færre end de fleste Prodelphiner, af hvilke der paa den anden Side i det mindste er én Art, som kan have 81. Værre er det, at der synes at være en Delfinform uden Rygfinne<sup>2)</sup>, som i øvrigt har alle Prodelphinernes Karakterer. Jeg har imidlertid ingen Grund til at antage, at noget af de Skeletter, som have foreligget mig, har tilhørt en rygfinneløs Delfin; om adskillige af dem foreligger der Oplysninger om det modsatte.

Efter det nys omtalte Katalog af H. W. Flower ejede «British Museum» i 1885 32 Kranier af denne Slægt, men kun et eneste Skelet af et ungt Dyr. I andre Museer har Flower imidlertid kunnet hente Oplysning om 3 Skeletter, hos hvilke Hvirveltallet kun varierede fra 73—76 (eller 78?, som der siges i P. Z. S. 1883, S. 512). Jeg har forsaavidt været heldigere stillet, som vort Museum ejer ikke mindre end 19 Skeletter (af hvilke nogle dog ikke ere aldeles fuldstændige) og desuden 10 Hovedskaller af denne Slægt. Med nogle faa Undtagelser, der ville blive nævnte i det følgende, ere disse Delfiner harpunerede i Atlanterhavet, især i dettes varmeste Strøg. Om 8 af dem foreligger der Oplysninger om Kjønnet, og ligeledes for 8 af dem ledsagede Kaptejn Andréa Indsendelsen af Skelettet med Oplysninger om Farvefordelingen hos det frisk fangede Dyr samt med nøjagtige Udmaalinger, der ville blive gjengivne i det følgende. Da de mange i Literaturen opstillede Arter for den allerstørste Del ere baserede paa Kranier, maatte det synes muligt ved Hjælp af vort Museums Skeletter at karakterisere Arterne bedre og fuldstændigere end hidtil er sket — takket være den Ihærdighed, hvormed Andréa, Hygom, Corneliussen og Hits have harpuneret disse Smaaspringere paa deres Rejser, præpareret deres Skeletter, udmaalt dem o. s. v. — og derved at give dette Afsnit af Cetologien den fastere

---

ling. Jeg henleder saa meget hellere her Opmærksomheden paa det, som jeg selv ikke har havt megen Anledning til at citere det, dels fordi Forfatteren indtager et andet Standpunkt i Henseende til Artsspørgsmaalet hos Delfinerne, dels fordi jeg her i det væsentlige vil holde mig til hvad der her fra Museet kan oplyses.

<sup>2)</sup> Jfr. om denne Delfinform — *Delphinapterus leucorhamphus* Péron, som den vel bør hedde — om hvis Skelet intet var Flower bekendt, de af Malm l. c. p. 66 meddelte Oplysninger om Hvirveltallet (84), der er større end det kjendes hos nogen *Prodelphinus*.

Grundvold, som det hidtil har savnet. Men selv om man kan paa det foreliggende Materiale af Skeletter skjelne mellem flere Arter, er Vanskeligheden ikke dermed overvunden; det gjælder da om, fornemmelig efter Kranierne, at henføre de saaledes udredte Arter til de opstillede. Det følgende vil vise, hvor vidt jeg i denne Henseende er naat et lille Skridt fremad. Men jeg vil ikke unnlade at udtale, at dette tredje Afsnit af mit Arbejde tør jeg selv ikke betegne som andet end en ordnet Materialsamling; dets Substrat vil blive tilbage i Museet og kunne benyttes af tilkommende Monografer.

Flower har i sin Afhandling af 1883 samlet de beskrevne Arter under 4 Typer; i sin «List» af 1885 opfører han dog British Museums Prodelphin-Kranier under 7 Arter: 1) *P. obscurus* Gr. (under hvilken med Tvivl *Electra thicola* Gr.); 2) *P. euphrosyne* Gr. (= *euphrosynoides*, *styx*, *dorides* Gr. og *tethyos* Gerv.); 3) *P. doris* (= *D. clymene* Gr.); 4) *attenuatus* Gr. (= *capensis* Gr.; men at drage Grænsen mellem denne og foregaaende betegnes saa at sige som en Umulighed); 5) *P. alope*; 6) *P. microps* og 7) *P. longirostris* (= *stenorhynchus* Gr.); men det siges udtrykkelig, at de to sidste rimeligvis ere en og samme Art. Der antydes derved altsaa en Reduktion fra 7 til 5 Arter eller Typer. Jeg har ment foreløbig at maatte skjelne mellem 11 Arter; jeg var egentlig ikke forberedt paa dette Resultat, da jeg paa et Materiale af 11 Skeletter af ægte *Delphini* havde været ude af Stand til at skjelne mellem flere Arter, og der ikke paa Forhaand var Grund til at vente en mindre individuel Variation eller en mindre hyppig Optræden af de enkelte Arter i Slægten *Prodelphinus*. Maaske vilde ogsaa et større Materiale have bragt mig til at slaa noget af det sammen, som jeg her har adskilt. Fejler jeg ikke, er *Prodelphinus* dog, naar alt kommer til alt, en artrig Slægt med ringe Variation i det ydre; og der maa vistnok indsamles et endnu meget større Materiale af Skeletter, Tegninger, Maal o. s. v., førend der kan være lagt en sikker Grundvold for Artsopfattelsen. Nærværende Afsnit er, som alt antydet, kun et Skridt i denne Retning, et Forarbejde.

De Forhold, hvori de foreliggende Skeletter og Kranier vise Variationer, disse være nu individuelle, afhængige af Alder og Kjøen eller af specifik Natur, vil det være rigtigt her at omtale under ét; at det til Dels bliver en Gjentagelse af, hvad der om de tidligere omtalte Slægter er bemærket, vil ikke kunne undgaas.

Størrelsen vexler fra 2,210 M. til 1,265 M. fra Overkjævens Spidse til Indsnittet i Halefinnen; Kraniernes Længde fra det samme Punkt til Nakkeledknuderne (inclusive) fra 0,457 M. til 0,350; men dette Minimum er af et ikke udvoxet Dyr. Det vil vise sig, at Hovedet tilnærmelsesvis opnaar sin fulde Størrelse forholdsvis tidligt, saa at Forholdet mellem Hovedets og hele Legemets Længde kan variere ikke saa lidt — til Dels dog maaske fordi Hvirvellegemernes Mellembuske ved deres Indtørring fremkalde en stærkere Forkortning af Rygraden jo yngre Dyret er.

Hvirveltallet vexler i det mindste fra 70 til 81. At det skulde være aldeles

konstant indenfor Arten, kunde selvfølgelig ikke ventes, ja man skulde snarest tro, at det var temmelig ligegyldigt, om der udvikledes flere eller færre rudimentære Hvirvler i den af Halefinnen støttede sidste Del af Rygraden. Hos Slægten *Delphinus* (s. str.) finde vi jo ogsaa en Variation af 4 Hvirvler indenfor samme Art. I Slægten *Prodelphinus* har jeg indenfor samme Art kunnet paavise en Variation af 74—75, af 76—79 eller af 79—81; paa den anden Side have alle 4 Skeletter af *P. doris* (den eneste Art, af hvilken der foreligger en større Række) 70. Saa vidt min Erfaring gaar, er Hvirveltallet altsaa i denne Slægt forholdsvis dog ret konstant og afgiver et af de bedste Midler, som haves, til at afstikke Grænser mellem Arter, der i øvrigt staa hinanden nær. — Jo talrigere Hvirvlerne ere, desto længere tilbage rykker i det hele det Sted, hvor de første tydelige lodrette, perforerende Karkanaler optræde i Haleregionen, og forsaavidt kan det benyttes som Artskarakter, om dette finder Sted paa den 48—49de, 50—51de, 51—52de eller 53de, 54—55de, 55—56de, 57—58de eller 58—59de Hvirvel; men der er dog herved at erindre, at dels er dette Forhold ikke aldeles konstant, men underkastet nogen individuel Variation, der i det mindste hos *P. tethys* viser sig at være ret betydelig (se det nærmere under denne Art); dels retter det sig jo saa temmelig efter det samlede Hvirveltal, er saa at sige en Funktion af dette; og endelig er det ikke sjældent, at de omtalte Kanaler vise sig en eller endog to Hvirvler tidligere paa den ene Side end paa den anden, eller at de allerede paa en eller flere umiddelbart forudgaaende Hvirvler ere tydelige, om end meget mindre end paa de følgende. Paa lignende Maade flytter den sidste tydelige Tværtap (Parapofyse) eller øvre Torntap (Neurapofyse) sig tilbage, naar Hvirvlernes Antal forøges, hvorved dog er at bemærke, at deres Utydelighed paa de sidste Hvirvler, paa hvilke de overhovedet kunne optræde, kan hidrøre fra Individets Ungdom. Man vil dog finde, at der i denne Henseende ofte er en paa-faldende Overensstemmelse mellem de til samme Art henførte Skeletter, f. Ex. mellem de 4 af *P. doris*, de to af *P. euphrosyne* o. s. v. Hæmapofysernes Antal er vistnok ogsaa underkastet nogen Variation af samme Grund, men om der paa Tabellerne er opført flere eller færre af dem, er aabenbart nok saa meget afhængigt af Præparationen. Undertiden sér man de første to eller tre Par sammenvoxne med hinanden efter Længden, men dette er øjensynlig noget rent individuelt. Om flere eller færre Lændehvirvler ere uden Metapofyser, derpaa ligger der vistnok ogsaa kun liden Magt; et ældre vel præpareret Skelet vil vise færre, et yngre og tilmed maaske mindre omhyggeligt behandlet tilsyneladende flere slige Hvirvler. Der kan være stor Forskjel paa Hvirvelapofysernes Styrke, relative Brede, Form, til Dels ogsaa paa deres Retning; men hvor tilbøjelig man end paa Forhaand kan være til at lægge en hel Del Betydning i det forskjellige Fysionomi, som Skelettet derved faar, opdager man dog snart, at forsaavidt der ikke deri er noget individuelt, eller det muligvis paavirkes af Kjønsskjellen, er det et Forhold, paa hvilket Alderen øver stor Indflydelse. Det samme gælder om Ribbenenes Styrke, for hvilken Bredden af første Par giver et

bekveemt Udtryk. Variationen i Ribbenenes Antal er sjældent stor, og den er maaske endda mindre end den synes, da Rækken gjerne ender med et eller to rudimentære, «svævende» Ribben paa hver Side, og disse ofte ere gaaede tabt under Præparationen. Antallet af de forreste Ribbenspar, som have dobbelt Forbindelse med Brysthvirvlerne, baade ved *capita* og *tubercula costarum*, varierer indenfor Slægten fra 3 til 6; at det indenfor Arten kan variere fra 4 til 5, ses bedst deraf, at man kan træffe det ene af disse Tal paa højre, det andet paa venstre Side af samme Delfin; men det kan ogsaa indenfor Arten variere fra 5 til 6, ja Erfaringen viser hos *P. doris* samme Variation, fra 4 til 6, som vi fandt hos *D. delphis*. 3 har jeg kun fundet i et eneste Tilfælde, hos det gamle Skelet af *P. tethyos*; men det er aabenbart noget individuelt, thi hos et yngre Skelet af samme Art finder jeg 5, og der foreligger i Literaturen en Angivelse af 4.

Forholdet mellem Længden af Brystbenet og Bredden mellem Apofyserne af dets *Manubrium* har vistnok ikke stor Betydning; Længden vil til Dels bero paa, om det fjerde Stykke er forbenet, og dette igjen paa Alderen. Om Hullet i *Manubrium sterni* er lukket eller ikke, synes ligeledes at være uden Betydning. Skulderbladet er hos yngre og mindre Delfiner mere kort, hos ældre og større mere langstrakt, hvilket vistnok er afhængigt af Dyrets Alder og hele Udvikling eller mere direkte, af om mere eller mindre af dets øvre Randbrusk, der forlænger sig skraat bagud og opefter, er ved Forbening optaget i selve *Scapula*. *Acromion* er altid kort og bredt, om end i forskjellig Grad, Ravne-næbsudvæxten smallere eller bredere; men disse Forhold synes mig i den Grad at afhænge af Alderen, at jeg slet ikke tør anvende dem til Arternes Adskillelse. Bækkenbenene mangle paa omtrent Halvdelen af de foreliggende Skeletter; hvor de findes, synes der at være stor Forskjel paa dem efter Kjønnets, idet Hunnernes ere korte og fine, Hannernes forholdsvis store og kraftige.

Forlemmernes relative Længde er vistnok for den allervæsentligste Del afhængig af Dyrets Alder, idet Haanden under Væxten voxer stærkere end Armen, saa at Haanden og derigjennem det hele Lem bliver forholdsvis længere hos større og ældre Dyr. Paa det mindste af de foreliggende Skeletter (*P. Holbölli*), som aabenbart er af et meget ungt Dyr, er Haanden endog betydelig kortere end Armen! I øvrigt er det vel muligt, at Haandens tilsyneladende Korthed hos yngre Individuer for en Del skyldes en stærkere Indtørring, og jeg kan derfor kun undtagelsesvis fremhæve en eller anden Form som særdeles langhaandet. Haanden er i øvrigt hos alle Arter bygget efter den samme Typus, den samme som hos *D. delphis*. I Henseende til Fingerleddenes Antal er Variationen kun ringe, ringere maaske i Virkeligheden end den synes, fordi det sidste Led eller de to sidste Led kun dannes af en lille Benknude, der let kan bortskæres eller hos yngre Dyr endnu ikke er udviklet. Den fælles Formel vil nærmest være denne: I: 2 eller 3; II: 9, sjældnere 10; III: 6 eller 7; IV: 3; V: 2.

Af de Forskjelligheder, som Hovedskallen, uafhængigt af Alderen, kan opvise, ere de vigtigste, om Snudedelen er kortere og bredere eller længere og smallere, og om den af Mellemkævebenene dannede Snuderyg er mere flad eller mere hvælvet. Det førstnævnte Forhold bar aabenbart nogen Værd som Artskaraktér, men det er ikke desto mindre yderst misligt at lade sig lede af det alene, og desuden paavirkes det kjendelig af Kjønssforskjellen. Med nogen Øvelse lærer man i Almindelighed at kjende Hannerne paa den lidt bredere Snude og fladere Snuderyg, Hannerne paa den højryggede og til Dels lidt smallere Snudeform; dermed skal dog ikke være sagt, at man altid ad denne Vej vil komme til et rigtigt Skjøn. Tændernes Antal varierer aabenbart baade fra Art til Art og fra Individ til Individ; vigtigere er det, om de ere lidt grovere eller lidt finere, stillede mere eller mindre tæt — 5, 6, 7 eller 8 paa en dansk Tomme. De for de enkelte Stykker angivne Tal skulle ofte forhøjes noget — f. Ex. med 4 — fordi de forreste Tænder især i Overmunden, der ikke ere brudte frem af Gummerne, ikke ere talte med.

S. 32 og 33 vil man finde fremstillet i Tabelform de vigtigste af de Forskjelligheder, som lade sig udtrykke paa denne Maade, hos de antagne 11 Arter. De to af disse (*P. Petersii* Rhdt. og *P. Holbölli* Eschr.) antages at være hidtil ubeskrevne.

Forinden jeg gaar over til at omtale de enkelte Arter, vil jeg dog her indskyde nogle Optegnelser, som Reinhardt nedskrev paa sin Rejse til Brasilien i 1850. «11 Juni 1850 paa 47° N. Br. og 9° 30' V. L. (omtrent midtvejs mellem Irland og Cap Finisterre). Om Eftermiddagen Kl. 4½ en hel Flok smaa 5--6 Fod lange Delfiner; forsvandt sydpaa; ensfarvet sorte paa Rygsiden, hvide nedenunder, forholdsvis høj Rygfinne. 16 Juni 1850, paa 36° 45' N. Br., 19° 46' V. L. (i Linie med Gibraltarstrædet). Kl. 6 Eftm. med herlig blaa Himmel og NNO. Vind viste sig en lille Flok spidssnudedede Delfiner, som i lang Tid legede foran Bougen af Skibet, saa at Farven tydelig kunde ses. Spidsen af Snuden saas (gjennem Vandet) graalig og at blive mørkere bagtil, og her smeltede denne Hovedets mørke Farve sammen med et stort Skjold af sortegraa Farve, som naaede hen imod Halefinnen, men dog endte i en Spids noget foran denne. Dette mørke Skjold naaede dog kun lidt ned paa Siderne, som for største Delen vare hvide ligesom Bugen. Lidt bagved Rygfinnen (som var sortegraa ligesom Ryggen) bøjede det sorte Skjold lidt længere ned paa Siden end i sin øvrige Udstrækning, i en stump Spids, og foran denne fandtes (i al Fald hos nogle Individer) en smal sort Stribe, der løb fortil i den hvidfarvede Del af Kroppen; men om denne smalle Stribe udsprang umiddelbart fra det mørke Skjold, kunde jeg ikke komme til Vished om. Paa hver Side af Rygskjoldet udsprang ved dets bagre Spids en bred lysegraa Stribe, som først i et Stykke nøje fulgte og indfattede Skjoldets Konturer, men i sin forreste Halvdel bøjede af fra dem ned i den hvide Farve. Halefinnen var ovenpaa sortegraa, Brystfinnerne hvide. Øjnene syntes mig at sidde i den hvide Del

af Hovedet. Disse Delfiner sprang usædvanlig lidt op af Vandet; af og til aandede de, men det var mig umuligt at blive var, om de ved denne Lejlighed sprøjtede Vand eller ikke. Deres Hurtighed var overordentlig; Skibet løb  $7\frac{1}{2}$  Mil, men Delfinerne tumlede sig og krydsede uophørlig frem og tilbage foran Bougen og skød derpaa afsted med en Fart, mod hvilken Skibets saa at sige var for intet at regne». — Disse lagttagerer gjælde rimeligvis Delfiner af denne eller den foregaaende Slægt og synes mig derfor her at kunne fortjene en Plads, i al Fald som en Erindring om Iagttagerens Opmærksomhed for Fænomener af denne Art.

*Prodelphinus doris* (Gr.)<sup>1)</sup>.

Spidssnudedede Delfiner med grovere Tænder — højst 40 — og 70 Hvirvler.

Der foreligger 4 Skeletter af en Delfin med 70 Hvirvler samt en middellang, temmelig smal og spids Snude, alle fra Atlanterhavet; et femte (Nr. 2), der kun tæller 68 Hvirvler, men rimeligvis er noget defekt, ligeledes fra Atlanterhavet, og 3 Hovedskaller, de to uden Lokaltet, det tredje angivet at være fra St. Helena, høre ligeledes herhen. Det ene af disse Skeletter (Nr. 10 paa Tabellen S. 34—35) er af en ved Portoricos Kyst fanget Delfin, det andet (Nr. 14) af en, der er fanget ikke langt derfra ( $19^{\circ}43'$  N. Br. og  $67^{\circ}50'$  V. L.); to andre ere tagne saa at sige midt i Atlanterhavet paa  $10^{\circ}$  N. Br. og  $39^{\circ}$  V. L. (Nr. 31) og paa  $58^{\circ}$  N. Br. og  $35^{\circ}$  V. L. (Nr. 4); det femte (Nr. 2) Nord for de kapoverdiske Øer paa  $13^{\circ}3'$  N. Br. og  $24^{\circ}$  V. L.

Af 3 af disse Stykker foreligger der Udmaalinger og Oplysninger om Farven, for de to's Vedkommende ogsaa om Kjønnet, saa lydende (Maalene i danske Fod og Tommer):

	Nr. 10.		Nr. 14 (Hun)	Nr. 4 (Han)
Hele Længden fra Næbet til Halen . . . . .	5' 5"	Fra Snudespidsen til Indsnittet i Halefinnen . . . . .	5' 4"	6' "
Næbets Længde til «Næsen» . . . . .	" 4"	Fra samme til Begynd. af Rygf. . . . .	2' 5"	1' 3"
Fra «Næsen» til Øjet . . . . .	" 7½"	Fra samme til Lemmerne . . . . .	1' 5"	" 11"
Fra «Næsen» til Blæsegattet (Næseborene) . . . . .	0' 7"	Fra samme til Øjet . . . . .	" 11"	" 11¼"
Fra «Næsen» til Lemmerne . . . . .	1' 1¼"	Fra samme til Blæsegattet . . . . .	1' "	" 4"
Fra «Næsen» til Rygfinnen . . . . .	2' 2½"	Fra Kjønsaabningen til Gattet . . . . .	" 2"	1' "
Fra Gattet til Halen . . . . .	1' 6"	Fra Navlen til Kjønsaabningen . . . . .	1' 1"	1' 8"
Fra Kjønsaabningen til Halen . . . . .	1' 11"	Fra Gattet til Indsn. i Halefinnen . . . . .	1' 2"	2' 9"
Halens Brede . . . . .	1' 3½"	Fra Rygfinnen til samme . . . . .	2' 2"	
Tykkelsen bagved Lemmerne . . . . .	2' 9½"	Kroppens Omfang foran Rygfinnen . . . . .	2' 9"	
Tykkelsen foran Rygfinnen . . . . .	3' 1"	Kroppens Omf. foran Halekjoelene . . . . .	1' 4"	
Tykkelsen mellem Rygfinnen og Halen . . . . .	1' 8½"			

<sup>1)</sup> «Zoology of Erebus & Terror» og «Synopsis of the species of Whales and Dolphins in the collection of the British Museum» pl. 20. Diagnosen indeholder følgende Punkter: «Hovedskallens Snudedel  $1\frac{1}{2}$  Gang saa lang som Hjerne-kassen og  $2\frac{1}{2}$  Gang saa lang som dens Brede mellem Indsnittene; 5 Tænder paa en Tomme».

## Tabellarisk Oversigt over visse Hovedforhold

Artsbestemmelsen.	Hvorfra.	Antal af		Hvirvler.	Forhold mell. Snudens Lgd. og Brede ved Grunden.	Tænder.	Hvormange Tænder paa en Tomme.
		Skeletter.	Hovedskaller.				
1. <i>P. doris</i> (Gr.) . . . . .	Atlantehavet St. Helena Portorico.	5	3	70	1:2,4 à 2,8	$\frac{32-40}{32-38}$	5
2. <i>P. obscurus</i> (Gr.) . . . . .	Atlantehavet	1	"	70	1:2,2	$\frac{32-34}{33-34}$	5 $\frac{1}{2}$
3. <i>P. Petersii</i> (Rhdt.) . . . . .	Øen Amsterdam	1	1	71	1:2,5	$\frac{32-32}{21-28}$	5
4. <i>P. longirostris</i> (Schl.) . . . . .	Australien	1	"	72	1:3,6	$\frac{46-49}{51-53}$	7
5. <i>P. euphrosynoides</i> (Gr.) . . . . .	Atlantehavet	1	"	73	1:2,4	$\frac{33-34}{39-40}$	6
6. <i>P. euphrosyne</i> (Gr.) . . . . .	Atlantehavet	2	"	74	1:2,6	$\frac{39-40}{39-43}$	6
7. <i>P. clymene</i> (Gr.) . . . . .	Atlantehavet	1	"	74	1:2,4	$\frac{36-38}{40-40}$	6
8. <i>P. alope</i> (Gr.) . . . . .	Atlantehavet og det indiske Hav	2	2?	74-75	1:2,9	$\frac{33-39}{38-41}$	5
9. <i>P. Holbölli</i> (Eschr.) . . . . .	Grønland	1	"	75	1:2,4	$\frac{50-53}{49-51}$	8
10. <i>P. tethyos</i> (Gerv.) . . . . .	Middelhavet	2	1	78-79	1:2,3 à 2,6	$\frac{39-42}{38-43}$	5
11. <i>P. attenuatus</i> (Gr.) . . . . .	Atlantehavet	2	3?	79-81	1:2,7 à 2,9	$\frac{35-40}{38-43}$	5

*(Prodelphinus doris)* Nr. 2.

Totallængde . . . . .	5' $\frac{1}{4}$ "	Fra Rygfinnens Agterkant til Halens Kløft . . .	2'
Fra Næbets Spids til Spækkukelen . . . . .	3' $\frac{3}{4}$ "	Halefinnens Længde . . . . .	7' $\frac{3}{4}$ "
Fra denne sidste til Blæsegattet . . . . .	6"	Sammes Brede . . . . .	1' 2"
Fra Pukkelen til Nakken . . . . .	1'	Fra Lufferne til Siden af Halen . . . . .	9' 11"
Fra Nakken til Rygfinnens Forkant . . . . .	1'	Luffens Længde . . . . .	7' $\frac{1}{2}$ "
Rygfinnens Længde . . . . .	8' $\frac{1}{2}$ "	— Brede . . . . .	2' $\frac{1}{2}$ "
Sammes Højde . . . . .	8' $\frac{1}{4}$ "		

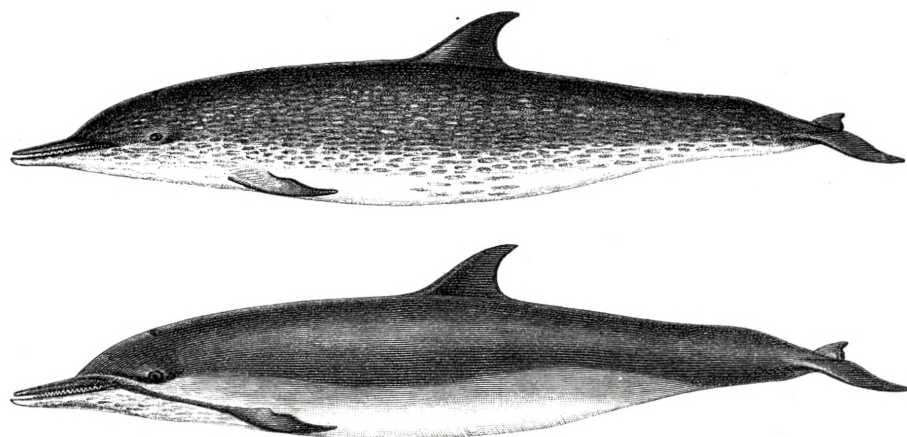
(Maalene af Nr. 10 og 2 ere tagne efter Hr. Andréas eget Skjøn; de andre derimod efter et af Prof. Reinhardt konstrueret og Kaptejnen medgivet Schema).



hos Museets *Prodelphinus*-Skeletter.

Ribben med dobbelt Ledføjning.	Første Karkanal i Hv. N.	Sidste Parapofyse p. Hv. N.	Sidste Neuraopofyse p. Hv. N.	Almindelige deskriptive Bemærkninger.
4—6	48—49	53	58—59	Temmelig lang, smal Snude, med mere eller mindre høj Snuderyg (hos Hannerne). Grovere Tænder. Lemmernes Længde omtrent $\frac{1}{7}$ af Skelettets.
5	48—49	52—53	57—59	Kortsnudet med grovere Tænder; korte Luffer, hvis Længde indeholdes næsten $7\frac{1}{2}$ Gang i Totallængden.
5	50—51	53	57—58	Lancetdannet Snude; Tænderne stillede tyndt; Lufferne forholdsvis lange (over $\frac{1}{6}$ af Totallængden).
5	48—49	55	61	Særdeles lang og tynd Snude; med fine Tænder; de smaa Luffers Længde indeholdes noget over 7 Gange i Totallængden.
5	51—52	56	61	Noget kortere Snude end hos <i>P. euphrosyne</i> ; Tænderne finere; Lufferne c. en ottende Del af Skelettets Længde.
5	51—53	54—56	61—62	Temmelig lang og smal Snude, med finere Tænder; Luffernes Længde er omtrent $\frac{1}{7}$ af Skelettets.
5	52	56	61	Bredsnudet, fintandet, kortluffet; Luffernes Længde en ottende Del af hele Skelettets.
4—6	52—55	55—57	60—64	Meget lang, smal Snude; grovere Tænder; korte Luffer, hvis Længde indeholdes henved 7 til $7\frac{1}{2}$ Gang i Totallængden.
4	57	59	63	Forholdsvis kort, lanceolat Snude; fine Tænder; Luffernes Længde en ottende Del af hele Skelettets.
3—4	55—59	59—61	63—66	Langstrakt, noget lanceolat Snude; grove Tænder; Luffernes Længde en syvende Del af hele Skelettets hos yngre.
5—6	57—58	61—62	67—68	Meget lang og smal Snude; grovere Tænder; korte Luffer, hvis Længde indeholdes noget over 7 Gange i Totallængden.

Kaptain Andréas Skitse af (10) viser en mørkere Ryg og en hvidlig Bug med ikke meget tydelig vandret Grænse; henimod denne Grænse er der i begge Farvers Omraade mørkere Pletter, dels mindre, dels større stjernedannede; Rygfinnen og Lufferne fremstilles som smaaplettede. Skitsen af (14) [S. 34] viser en mørk grønliggraa Ryg med en tydelig Grænse mod det lysere graa paa Siderne af Bugen, der paa selve den egentlige Bug gaar over i hvidt. Fra Luffen til Næbet antydes en skarpt begrænset fin Stribe, nederunder hvilken der ses mørkere Streger eller Pletter i Grundfarven. Nr. 2 beskrives som «blegere med hvid Bug». Næbet af Nr. 4 beskrives som kort, kun 3—4 Tommer langt,



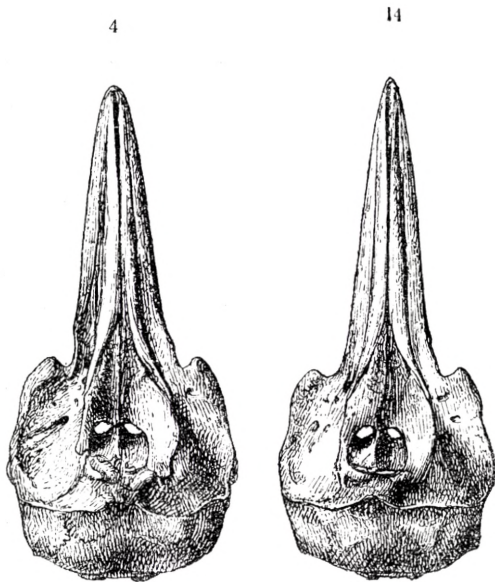
(Skitser af Farvefordelingen indtegnede i Konturen af en ideal *Prodelphinus* og derfor uden Betydning med Hensyn til Omrids, Finner o. s. v.)

men skarpt afsat fra den hvælvede, opsvulmede Del af Hovedet. Hr. Andréas Skitse (den øverste af de her afbildede) og Beskrivelse vise vel den sædvanlige Modsætning mellem Ryggens mørke og Bugens hvide Farve, men der er meget mørkt isprængt den lyse Farve paa Siderne af Bugen, saaledes at denne gaar jævnt over i et Parti, hvor Farvetegninger helst maa beskrives som sort med lyse Pletter, indtil disse forsvinde paa den egentlige Ryg.

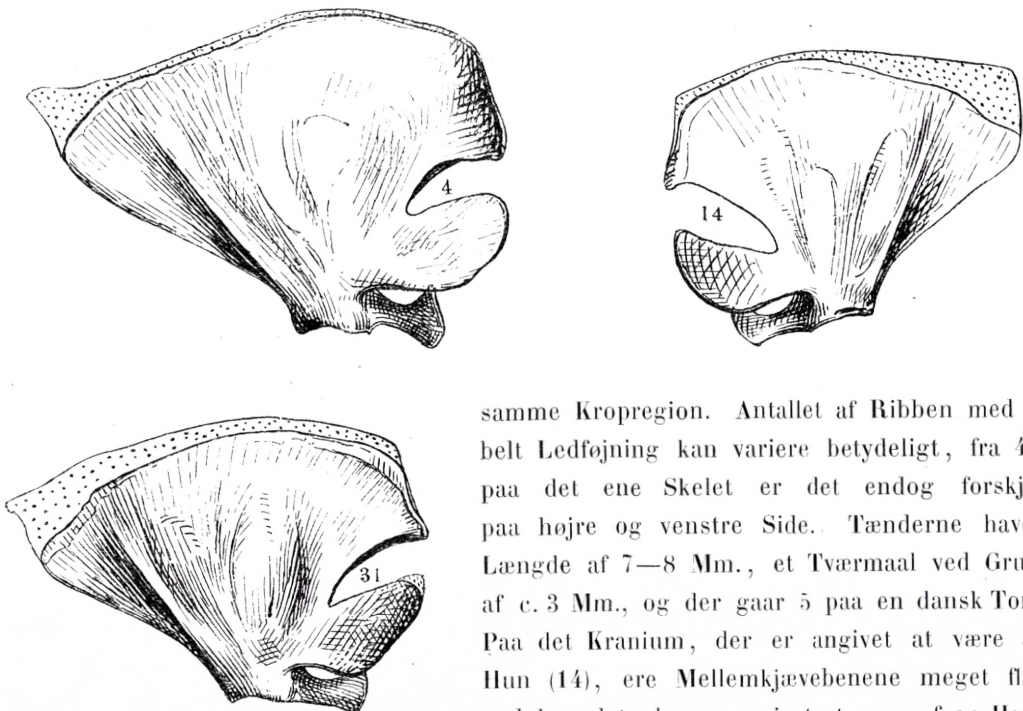
Maalinger og Tællinger af 4 Skeletter og 3 Kranier af *Prodelphinus doris*.

Stykkernes Nummere . . .	4 ♂	10 (♀?)	31 ♂(?)	14 ♀	20 ♂?	24 ♂?	26 (♀?)
	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.
Hele Skelettets Længde fra Spidsen af Overkjæven til Indsnittet i Halefinnen . . . . .	1770	1656	1612	1525	—	—	—
Hele Hovedskallens Længde fra Spidsen af Overkjæven til Nakkeledknuderne . . . . .	377	385	383	386	402	395	394
Dens største Brede over Kind-Tindingbuerne . . . . .	179	172	165	166	183	164	180
Hjærnekassens Længde fra Nakkeledknuderne (incl.) til Orbitalindsnittene . . . . .	168	166	158	164	175	169	168
Snudedelens Længde fra disse til Overkjævens Spidse . . . . .	217	224	225	225	233	232	235
Sammes Brede mellem Orbitalindsnittene ved dens Grund . . . . .	95	86	88	81	88	93	90
Afstanden mellem disse Indsnit og den sidste Overkjævetand . . . . .	41	36	42	36	37	42	35

Stykkernes Nummere . . .	4 ♂	10 (♀?)	31 ♂ (?)	14 ♀	20 ♂ (?)	24 ♂ (?)	26 (♀?)
Hovedskallens Længde forholder sig til hele Skelettets som . . . . .	1:4,7	1:4,3	1:4,2	1:4,0			
Dens største Brede forholder sig til dens Længde som . . . . .	1:2,1	1:2,2	1:2,3	1:2,3	1:2,2	1:2,4	1:2,2
Hjærnekassens Længde forholder sig til hele Hovedskallens som . . . . .	1:2,2	1:2,3	1:2,4	1:2,4	1:2,3	1:2,3	1:2,3
Snudens Længde forholder sig til hele Hovedskallens som . . . . .	1:1,7	1:1,7	1:1,7	1:1,7	1:1,7	1:1,7	1:1,7
Hjærnekassens Længde forholder sig til Snudens Længde som . . . . .	1:1,3	1:1,4	1:1,4	1:1,4	1:1,3	1:1,4	1:1,4
Snudens Brede ved Grunden forholder sig til dens Længde som . . . . .	1:2,6	1:2,6	1:2,6	1:2,8	1:2,7	1:2,5	1:2,6
Tændernes Antal . . . . .	$\frac{32-33}{32-33}$	$\frac{36-37}{36-36}$	$\frac{38-40}{38-38}$	$\frac{32-35}{34-34}$	$\frac{35-36}{35-37}$	$\frac{38-38}{37-37}$	$\frac{34-35}{34-?}$
Hvirvlernes samlede Tal . . . . .	<b>70</b>	<b>70</b>	<b>70</b>	<b>70</b>			
Ribbenenes Antal (de rudimentære i Parenthes)	14 ( <sup>2</sup> / <sub>2</sub> )	14 ( <sup>1</sup> / <sub>1</sub> )	14 (1)	14			
Ribbenpar med dobbelt Ledføjning til Rygraden	5	4—5	6	5			
Lændehvirvler . . . . .	16	16	18	17			
Halehvirvler . . . . .	32	33	31	32			
Nedrebuer (Hæmapofyser) tilstede . . . . .	24	23	21	24			
Første lodrette Karkanaler findes i Hvirvlen Nr.	<b>49</b>	<b>49</b>	<b>48</b>	<b>48</b>			
De sidste tydelige Tværtappe (Parapofyser) paa Hvirvel Nr. . . . .	<b>53</b>	<b>53</b>	<b>53</b>	<b>53</b>			
Den sidste tydelige Torntap (Neurapofyse) paa Nr.	<b>59</b>	<b>58</b>	<b>58</b>	<b>59</b>			
Antal af Hvirvler uden Metapofyser (deres Nr.)	8 (31-38)	9 (29-37)	11 (31-41)	9 (31-39)			
Første Ribbens Brede . . . . .	Mm. 21	Mm. 20	Mm. 20	Mm. 16			
Brystbenets Længde og Brede . . . . .	154—91	149—79	132—66	131—74			
Bækkenbenenes Længde . . . . .	63	—	—	48			
Skulderbladenes Længde og Højde . . . . .	163—115	166—104	143—110	134—102			
Lemmernes Længde fra Skulderleddet . . . . .	264	262	250	244			
Lemmernes Lgd. forh. sig til hele Skelettets som	1:6,8	1:7,1	1:6,5	1:6,3			
Armens Længde . . . . .	Mm. 114	Mm. 110	Mm. 108	Mm. 102			
Haandens Længde . . . . .	170	170	158	150			
Forskjellen mellem dem . . . . .	56	60	50	48			
Fingerleddenes Antal . . . . .	2.9.6.3.1	2.8.6.3.2	2.8.6.3.2	2.8.6.3.2			
	2.9.7.3.2	2.9.6.3.2	2.8.6.3.2	3.8.6.3.2			



Jeg henviser til omstaaende Tabel, forsaavidt som de foreliggende Skeletters og Kraniers Overensstemmelser og Uoverensstemmelser kunne aflæses af denne. De osteologiske Forskjelligheder ere overhovedet ikke store: paa alle 4 Skeletter ere baade Skulderbladet og *Acromion* korte og høje, om end i forskjellig Grad, som det vil oplyses af nedenstaaende Afbildninger, og *Manubrium sterni* er perforeret hos dem alle. Første Torntap (de to første Halshvirvlers) er kort og bred; et af Skeletterne har syvende Halshvirvels Torntap og to af dem sammes øvre Tværtappe udviklede i en ualmindelig Grad. Den højeste Torntap i Hvirvelrækken er saa høj som  $4\frac{3}{4}$ — $5\frac{1}{2}$  Hvirvler ere lange, den længste Tværtap som  $3\frac{1}{2}$  Hvirvel af den



samme Kropregion. Antallet af Ribben med dobbelt Ledføjning kan variere betydeligt, fra 4—6; paa det ene Skelet er det endog forskjelligt paa højre og venstre Side. Tænderne have en Længde af 7—8 Mm., et Tværmaal ved Grunden af c. 3 Mm., og der gaar 5 paa en dansk Tomme. Paa det Kranium, der er angivet at være af en Hun (14), ere Mellemkjæbebenene meget fladere end hos det, der er opgivet at være af en Han (4),

og som har en mere højrygget Snudekjøl. Anvendes dette Kriterium paa de andre Kranier, findes disses Kjøen at være som paa Tabellen anført med Tilføjelse af et Spørgsmaalstegn.

Efter at ovenstaaende Afsnit var udarbejdet, er jeg bleven bekendt med en Artikel af Hr. F. True, Bestyrer af Pattedyrsamlingen ved „Un. St. National Museum“ i Washington, om en plettet Delfin, som han anser for at være *Prodelphinus doris*, hvad den vistnok ogsaa er. Naturforskerne ombord i Undersøgelsesdamperen „Albatross“ berettede ved deres Hjemkomst fra den mexikanske Golf i Foraaret 1884, at de dér havde set en stor Flok Delfiner af et meget ejendommeligt Udseende, idet deres Ryg var bedækket med hvide Pletter. Det lykkedes kort Tid efter ved Hjælp af Fiskere fra Florida at erhverve en 85 Tommer lang Han til Nationalmuseet, samtidig med at det berettedes, at plettede Delfiner, vistnok af samme Art, vare sete ud for Kap Hatteras. Afbildningen (pl. I og II) viser en lignende smaaplettegning som den, det her S. 34 øverst afbildede Individ har havt. Fra denne Side vil der altsaa intet være i Vejen for at identificere dem, og dette bestyrkes derved, at Hvirvlernes Antal er 69, Ribbenenes 14 og Tændernes  $\frac{37-37}{34-33}$ , hvilket altsammen falder indenfor den ved foranstaaende Meddelelser for Arten afstukne Ramme. Ogsaa Hovedskalsformen synes mig at vise fuld Overensstemmelse med de foreliggende Kranier, som jeg har henført til samme Art. Jeg henviser i øvrigt til Hr. Trues egen Afhandling.

Hr. True identificerer *P. doris* med en af Cope i „Proc. Ac. Nat. Sc. Philadelphia“ for 1866 paa et Kranium uden Lokaltet opstillet *D. plagiodon*, hvilket Kranium ogsaa er afbildet i Hr. Trues Afhandling, pl. IV og VI. Han undersøger ogsaa, hvorvidt den maatte kunne identificeres med nogen af de plettede Delfiner, af hvilke der foreligger Beskrivelse i Literaturen, deriblandt ogsaa den „*Delphinus Pernettyi*“ Desmar., som jeg i denne Afhandling har havt Anledning til at omtale under Slægten *Steno*. Naar den plettede Tegning opfattes som konstant for *P. doris*, maa dog dertil bemærkes, at den ikke er bleven bemærket hos to af de tre Individuer, om hvis Farve og Tegning Kaptajn Andréa har meddelt Oplysninger. Hr. True bemærker ogsaa, at Naturforskerne paa „Albatross“ havde meddelt ham, at de yngre Dyr i de ud for Kap Hatteras iagttagne Stimer vare uden Pletter paa Ryggen.

### *Prodelphinus euphrosyne* (Gr.).

Temmelig lang- og smalsnudedede Delfiner med c. 40 finere Tænder  
og 74 Hvirvler.

Paa en Rejse til Østasien i 1869 harpunerede Kaptajn Andréa med 10 Minuters Mellemrum to Delfiner ud af en Flok, som fulgte Skibet en halv Time, paa 3° 40' S. Br.

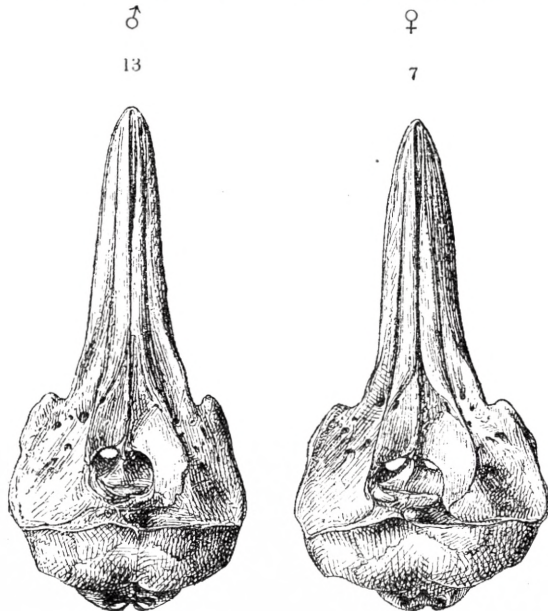
<sup>1)</sup> On a spotted Dolphin apparently identical with the *Prodelphinus doris* of Gray. Annual Report of the Smithsonian Institution for 1884, pt. II (1885) p. 317—24, pl. I—VI.

<sup>2)</sup> „Zool. of Erebus & Terror“ samt „Synopsis“ pl. 22. *Clymenia Burmeisteri* Malm l. c. t. VI fig. 54.

og  $18^{\circ} 5'$  V. L. (mellem Ascension og St. Paul). Begges Skeletter hjemførtes til Museet og ere nu opstillede i dets Cetaceum. Det ene er af en Han og det andet af en Hun, og der er altsaa her givet en sjælden Lejlighed til at sammenligne to Dyr af forskjelligt Kjøen, men om hvilke det paa Forhaand tør anses for givet, at de tilhøre samme Art. En ledsagende Skitse viser en smækker Delfin med Rygfinne, hvis ensartet sorte Ryg er adskilt fra den hvide Bug ved en temmelig skarp Grænselinie, tæt nedenfor hvilken der fra Armon til Snudespidsen løber en skarp, sort Linie. Ligeledes medfulgte de her anførte Maalangivelser af begge Exemplarer.

	Nr. 13 (Han)	Nr. 7 (Hun)
Fra Snuden til Halen . . . . .	6' 1"	5' 6"
Fra Snuden til Rygfinnen . . . . .	2' 11"	2' 7"
Fra Rygfinnen til Halen . . . . .	3' "	2' 7"
Fra Snuden til Øjet . . . . .	1' 1"	" 11½"
Fra Snuden til Blæsegattet . . . . .	1' ¾"	1' "
Fra Snuden til Lemmerne . . . . .	1' 7"	1' 5"
Fra Gattet til Halen . . . . .	1' 11"	1' 7"
Fra Kjønnsaabningen til Gattet . . . . .	" 7"	" 2"
Fra samme til Navlen . . . . .	1' "	1' 3"
Tykkelsen foran Rygfinnen . . . . .	3' 3"	2' 11"
Tykkelsen ligeover Gattet . . . . .	2' 4"	1' 10"

Det vil ses af vedføjede Tabel (S. 40), at de osteologiske Forskjelligheder, som overhovedet kunne udtrykkes i Tal, mellem disse to Skeletter ere forholdsvis ubetydelige; begge have de samme Tal af Hvirvler (74), samme Antal af Ribben (15), ogsaa af de rudimentære



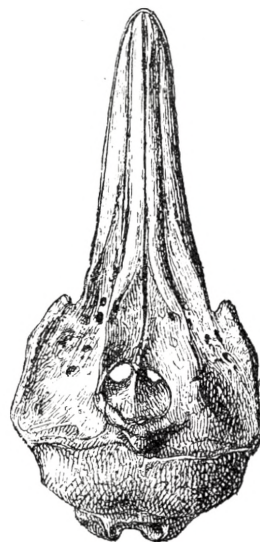
(1 paa hver Side) og af dem med dobbelt Ledføjning (5); og der er saa god Overensstemmelse i Beliggenheden af de første perforerende Karkanaler i Haleregionen, af de sidste Neurapofyser og Parapofyser, som ventes kan hos to Individuer af samme Art. Hannens Skelet (13), der er af et større Dyr, er i alle Dele meget kraftigere udviklet, Brystbenet bredere og længere, Bækkenbenene meget større og kraftigere, Lufferne længere, og denne Forlængelse er især bleven Hænderne til Del; Skulderbladet er forholdsvis mere langstrakt — det dækker her over 8 Ribben, hos Hunnen kun over 7; *Acromion* er især hos Hannen særdeles kort og høj, og om Ravenæbs-

Udvæksten gjælder det samme. At der paa anden Halsvirvel findes en ret anselig øvre Tværtap hos Hunnen, og at dennes første Torntap er lang og tynd, Hannens derimod kort og tyk, fortjener at anmærkes, men er vistnok kun individuelle Ejendommeligheder. Den spinklere Bygning af Hunnens Skelet udtaler sig ogsaa deri, at Højden af de længste Torntappe hos den er lig Længden af  $5\frac{1}{4}$  Hvirvel i samme Region af Rygraden, hos Hannen derimod kun af  $4\frac{1}{2}$ , og at den længste Tværtap hos Hannen er lig  $3\frac{1}{2}$  Hvirvel, hos Hunnen derimod lig 4. Hvad disse Processer ikke have faaet i Tilgift hos Hannen i Længde (Højde), have de derimod faaet i Brede og Styrke. Hovedskallens Længde er hos Hannen omtrent en Femtedel, hos Hunnen  $\frac{2}{9}$  af hele Skelettets; under Væksten strækker Kroppens Skelet sig aabenbart forholdsvis mere i Længden, men Hvirvelforlængelserne voxe — fra et vist Punkt — kun i Førlighed. En væsentlig Forskjel, som rimeligvis til Dels er af sexuel Natur, da den gjentager sig hos andre Arter, er der i Hovedskallens Fysionomi: Hunnens Hjernebasse er bredere end Hannens; og medens dennes Mellemkjæve er stærkt hvælvet og danner en afrundet Næseryg, er den særdeles flad hos Hunnen. Tænderne, der i det hele ere fine — sex paa en dansk Tomme — have hos Hannen og Hunnen henholdsvis en Længde af  $9\frac{1}{2}$  og  $6\frac{1}{2}$  Mm. og et Tværmaal af 3 og  $2\frac{1}{4}$  Mm., ere saaledes øjensynlig kraftigere hos Hannen, ogsaa bortset fra dennes overlegne Legemsstørrelse.

*P. euphrosynoides* (Gr.)<sup>1)</sup>.

Delfiner med noget kortere Snude, 33—40 fine  
Tænder, korte Luffer og 73 Hvirvler.

Den Delfin, hvis Skelets Maal og Tal ere opførte under Nr. (9), er fanget paa  $4^{\circ}18'$  N. Br. og  $31^{\circ}20'$  V. L. i Atlanterhavet (NV. for St. Paul). Det vil ses, at den i Hvirveltal o. s. v. kommer nær til *P. euphrosyne*, men er paafaldende korthaandet, idet Lemmernes Længde ikke er en ottende Del af Total længden. Den høje Snuderyg tyder paa et Handyr. Tænderne have en Længde af 9 Mm., et Tværmaal af  $2\frac{1}{2}$  Mm., og der gaar 6 paa en dansk Tomme, som hos *P. euphrosyne*. Brysthvirvlernes Tværtappe udmærke sig ved deres Brede (forfra-bagtil). Giveren (Hr. Corneliusen) har om denne Delfin (Nr. 9) oplyst, at «den er mørkeblaa med en skarp Rand under Øjnene og langs Kroppen», og at den frembød følgende Maal:



<sup>1)</sup> «Erebus & Terror» samt «Synopsis» pl. 31.

Totallængden . . . . . 5' 9½" Fra Næbet til Forkanten af Rygfinnen . . . . . 2' 9" Rygfinnens Længde var . . . . . " 10½" Fra dens Agterkant til Halens Kloft . . . . . 2' 2" Halefinnens Brede var . . . . . 1' 5"	Luffernes Længde . . . . . " 8½" Deres Brede . . . . . " 3¼" Fra Næbet til Spækpukkelens . . . . . " 3½" Fra Næbet til Blæsegattet (Næseborene) . . . . . " 11½"
---	---

Den havde flere Brudstykker af Blæksprutter i Maven.

### Maal og Tællinger af forskellige Skeletter og Kranier af Prodelfiner.

Artsbestemmelsen . . . . .	<i>P. euphrosyne</i> Gr.		<i>P. euphrosynoides</i> Gr.	<i>P. clymene</i> Gr.	<i>P. obscurus</i> Gr.	<i>P. Petersii</i>	
	13 ♂	7 ♀	9 ♂?	12	11 ♂	5 ♀?	27 ♀?
Stykkernes Nummer og Kjøen . . . . .	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.
Hele Skelettets Længde fra Spidsen af Overkjæven til Indsnittet i Halefinnen . . . . .	1946	1705	1860	1760	1775	1600	
Hele Hovedskallens Længde fra samme Sted til Nakkeledknuderne . . . . .	397	383	382	386	355	372	375
Dens største Brede over Kind-Tindingbuerne . . . . .	177	180	174	181	183	169	180
Hjærnekassens Længde fra Nakkeledknuderne til Orbital-indsnittene . . . . .	160	154	164	164	166	169	175
Snudedelens Længde fra disse til Spidsen af Overkjæven . . . . .	245	234	220	228	193	209	200
Sammes Brede ved dens Grund, mellem Orbital-indsnittene . . . . .	93	89	92	93	88	83	
Afstanden mellem disse Indsnit og den sidste Overkjævetand . . . . .	43	47	45	40	33	34	
Hovedskallens Længde forholder sig til hele Skelettets som . . . . .	1 : 4,9	1 : 4,5	1 : 4,9	1 : 4,6	1 : 5,0	1 : 4,3	
Dens største Brede forholder sig til dens Længde som . . . . .	1 : 2,2	1 : 2,1	1 : 2,2	1 : 2,1	1 : 2,0	1 : 2,2	
Hjærnekassens Længde forholder sig til hele Hovedskallens som . . . . .	1 : 2,4	1 : 2,5	1 : 2,3	1 : 2,4	1 : 2,2	1 : 2,2	
Snudens Længde forholder sig til hele Hovedskallens som . . . . .	1 : 1,6	1 : 1,6	1 : 1,7	1 : 1,7	1 : 1,9	1 : 1,8	
Hjærnekassens Længde forholder sig til Snudens som . . . . .	1 : 1,5	1 : 1,5	1 : 1,3	1 : 1,4	1 : 1,2	1 : 1,2	
Snudens Brede forholder sig til dens Længde som . . . . .	1 : 2,6	1 : 2,6	1 : 2,4	1 : 2,4	1 : 2,2	1 : 2,5	
Tændernes Antal . . . . .	40—40 42—43	39—39 39—39	33—34 39—40	36—38 40—40	34—32 33—34	32—32 28—28	
Hvirvlernes samlede Tal . . . . .	<b>74</b>	<b>74</b>	<b>73</b>	<b>73</b>	<b>70</b>	<b>71</b>	
Ribbenenes Antal (de rudimentære i Parenthes)	15 (1/1)	15 (1/1)	14	14	14 (2/2)	13 (1)	
Ribbenpar med dobbelt Ledføjning til Rygraden	5	5	5	5	5	5	
Lændehvirvler . . . . .	17	18	19	21	16	18	
Halehvirvler . . . . .	35	34	33	31	33	33	
Nedrebuer (Hæmapofyser) tilstede . . . . .	28	25	24	over 19	23	21	
Første lodrette Karkanaler findes i Hvirvlen N.	<b>51—52</b>	<b>52—53</b>	<b>51—52</b>	<b>52</b>	48	50 (51)	
De sidste tydelige Tværtappe (Parapof.) paa Hv. N.	<b>54</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>56</b>	<b>52</b>	<b>53</b>	
Den sidste tydelige Torntap (Neurapof.) paa Hv. N.	<b>61</b>	<b>62</b>	<b>61</b>	<b>61</b>	<b>57</b>	57—58	
Antal af Hvirvler uden Metapofyser (deres Nr.)	11 (32-42)	13 (32-49)	13 (30-42)	16 (26-41)	10 (29-38)	14 (27-40)	



	<i>P. euphrosyne</i> Gr.		<i>P. euphrosynoides</i> Gr.	<i>P. clymene</i> Gr.	<i>P. obscurus</i> Gr.	<i>P. Petersii</i> .
	13 ♂	7 ♀	9 ♂?	12	11 ♂	5 ♀?
	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.
Første Ribbens Brede . . . . .	20	16	19	17	25	19
Brystbenets Længde og Brede . . . . .	197—104	147—90	170—88	147—91	158—100	138—81
Bækkenbenenes Længde . . . . .	97	64	—	—	68	—
Skulderbladenes Længde og Højde . . . . .	185—119	163—108	188—113	176—106	193—126	154—111
Lemmernes Længde (fra Skulderleddet) . . . . .	277	237	228	c. 220	240	275
Lemmernes Længde forholder sig til Skelettets som . . . . .	1 : 7,0	1 : 7,2	1 : 8,2	1 : 8,0	1 : 7,4	1 : 5,8
	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.
Armens Længde . . . . .	110	99	110	110	115	121
Haandens Længde . . . . .	180	143	140	c. 135	147	167
Forskjellen mellem dem . . . . .	70	44	30	25	32	46
Fingerleddenes Antal . . . . .	2.9.7.4.2	2.9.6.3.2	2.8.6.4.2	—*)	1.8.6.3.2	2.10.6.3.1
	2.9.7.3.2	2.9.7.3.2	1.8.6.3.2	—	1.8.6.2.2	2.10.7.3.1

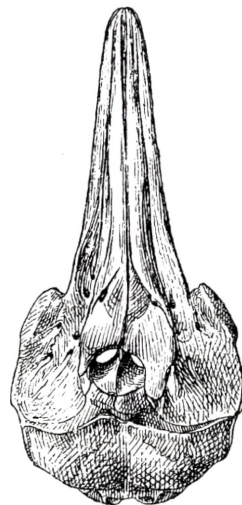
\*) Lemmerne ere ufuldstændige.

### *P. clymene* (Gray).

Mere bredsnudede Delfiner med 36—40 finere Tænder, korte Luffer og 74 Hvirvler.

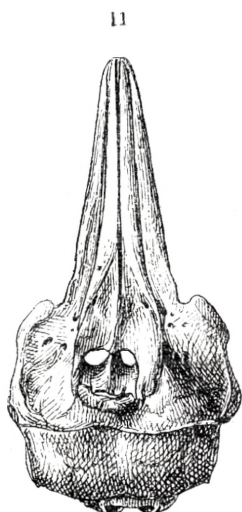
Om det Skelet, som Reinhardt har henført til *Clymenia normalis* Gr. = *Delphinus clymene* Gray, vides kun, at det er fra Atlanterhavet. Det er en bredsnudet, fintandet, meget kortluffet Form med 74 Hvirvler, der ikke synes mig at kunne identificeres med nogen af de andre foreliggende Prodelfiner. Jeg indskrænker mig i øvrigt til at henvise til foranstaaende tabellariske Oversigt.

12



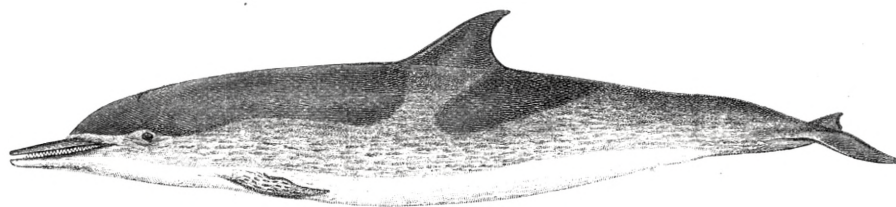
*P. obscurus* (Gray).

Mere kortsnudedede Delfiner med c. 33 grovere Tænder, korte Luffer og 70 Hvirvler.



Et fuldt udviklet Skelet af et mandligt Dyr (Nr. 11) med kun 70 Hvirvler, en forholdsvis kortsnudet og grovtandet Form, taget paa 38° 40' N.Br. og 49° V.L., kan, saavidt jeg skjønner, lige godt henføres til *P. obscurus* Gr. (l. c. pl. 16) og til *P. thicola* Gr. (l. c. pl. 36), hvilke man jo ogsaa nu er tilbøjelig til at anse for samme Art — og navnlig turde vel den først nævnte af disse Afbildninger være af et yngre, sidstnævnte af et ældre Dyr.

Det foreliggende Skelet er af et veludviklet, ingenlunde ungt Dyr med *Acromion* særdeles bred, Muskelindtrykkene paa Skulderbladet særdeles udprægede, Halehvirvlernes Neurapofyser og Hæmapofyser paafaldende korte og brede, første Ribben ualmindelig bredt. Desto mærkeligere er det, at det er saa kortluffet, at Lemmernes Længde indeholdes omtrent halvottende Gang i hele Skelettets. Tænderne ere grove og stærkt afstumpede, men sidde saa tæt, at der gaar 11 paa to danske Tommer.



Skitse af Farvefordelingen, indtegnet ligesom Figurene S. 34 i en ideal Prodelfin-Kontur.

Kaptajn Andréa har meddelt følgende Maal paa dette Dyr:

Fra Snudespidsen til Indsnittet i Halefinnen . . . . . 6' 1"	Fra Navlen til Kjønsaabningen . . . . . 1' 2"
Fra samme til Rygfinnens Begyndelse . . . . . 2' 7"	Fra Gattet til Indsnittet i Halefinnen . . . . . 1' 8"
Fra samme til Lemmernes Udspring . . . . . 1' 3"	Fra Rygfinnen til Indsnittet i Halefinnen . . . . . 2' 7½"
Fra samme til Øjet . . . . . " 10"	Kroppens Omfang foran Rygfinnen . . . . . 3' 6"
Fra samme til Blæsegattet . . . . . " 10"	Samme foran Halekjølen . . . . . 2' 2"
Fra Gattet til Kjønsaabningen . . . . . " 6½"	En Fod fra Halen var Kroppen 14" bred og 3½" tyk.

Skitsen viser en skarpere Modsætning mellem det halvlyse og det hvide og i den mørkere Ryg et sortere Skjold foran Rygfinnen og en sort Sattel bagved denne.

Med Hensyn til Maal og Tællinger henvises til foranstaaende Tabel.

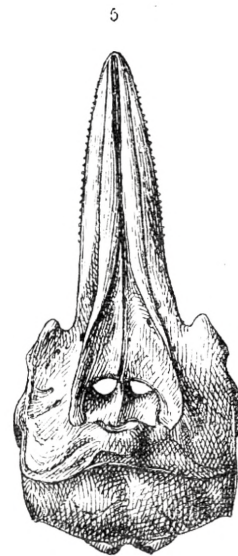
*Prodelphinus Petersii* Rhdt. (in sched.).

Delfiner med lancetdannet Snude, lange Luffer, c. 30 tyndt stillede Tænder og 71 Hvirvler.

Under dette Navn har afdøde Prof. Reinhardt i vort Cetaceum opstillet Skelettet af en Delfin, som Hr. Styrmand Hits havde dræbt ved Øen Amsterdam i det indiske Hav. Dets Hvirveltal (71) er ikke meget forskjelligt fra flere andre Formers med 70, 72, 73 eller 74 o. s. v.; men skjønt det er af et ungt Dyr, har det længere Luffer end noget af dem; deres Længde indeholdes ikke 6 Gange i hele Skelettets Længde. Hjernebassens regelmæssigt firkantede Form — Længde og Brede ligestore — er maaske kun en Følge af Individets Ungdom. Derimod synes Snudedelens lanceolate Form at være ret karakteristisk. Tændernes Antal er lavere ( $\frac{32}{28}$ ) end hos nogen anden mig bekendt Art. De have en Længde af 9 Mm., et Tværmaal af 3 Mm. og saa stor en Afstand, at der kun gaar 5 paa en dansk Tomme. Den flade Mellemkjæve tyder paa, at det er et Hundyr. At den sidste Halshvirvel bærer et 17 Mm. langt rudimentært Ribben paa hver Side, kan vel næppe betragtes som andet end en individuel Ejendommelighed. Hvad der ogsaa giver dette Skelet et eget Præg, er Halehvirvlernes udspærrede Metapofyser og deres korte skraat bagudrettede Neurapofyser.

Skulde noget af de afbildede Delfinkranier minde om denne Form, vilde det være *P. styx* Gr. (l. c. pl. 21); men der er ikke den Overensstemmelse f. Ex. i Tænderne, at en Henførelse tør voves. Et defekt Kranium fra ældre Tid (Nr. 27), opgivet at være fra Kap, har en meget bredere Hjernebasse, endnu fladere Mellemkjæveben og talrigere finere og smærkere Tænder ( $\frac{37-36}{43-42}$ ), 10 Mm. lange,  $2\frac{1}{2}$  Mm. i Tværmaal, 6 paa en dansk Tomme. Trods disse Afvigelser hælder jeg snarest til den Antagelse, at det muligvis kunde være af en ældre Hun af samme Art, men holder det dog udenfor dennes Karakteristik.

Maal og Tællinger ere meddelte S. 40 og 41.

*Prodelphinus alope* (Gr.) og *P. attenuatus* (Gr.).

Lang- og smalsnudedede Delfiner med forholdsvis korte Luffer og c. 40 grovere Tænder, *P. alope* med 74—75, *P. attenuatus* med 79—81 Hvirvler.

Til disse to Arter (l. c. pl. 32 og 28) henfører jeg en Række Kranier (5) og Skeletter (4), som jeg ikke kan holde ude fra hinanden ved Hovedskallerne alene; det er

Former med længere og tyndere Snude end *P. doris* og med grovere Tænder ligesom hos denne Art; men medens de to af disse Skeletter have 74 og 75 Hvirvler, have de to andre 79 og 81. Jeg mener derfor at burde holde dem ude fra hinanden som tilhørende to forskellige Arter, men erkjender, at det er noget vilkaarligt, naar jeg fæster Navnet *P. alope* til den med de færre, *P. attenuatus* til den med de talrigere Hvirvler. De to Exemplarer af *P. alope* m. ere opgivne at være af Hunner; den ene (Nr. 6) er tagen i Atlanterhavet paa 47° N.Br. og 11° V.L.; jeg vilde paa Grund af Bækkenbenenes Udvikling og Snudens Form betvivlet, at Kjønsangivelsen er rigtig, men da dens Foster foreligger, maa denne Tvivl forstumme, med mindre Fosteret skulde være af et andet samtidig fanget og i øvrigt ikke opbevaret Dyr. Den anden (Nr. 15) er taget langt derfra, i det indiske Hav, SSO. for Mascarenhas Øerne, paa 28° 20' S.Br. og 60' Ø.L.; dens Bækkenben ere vel korte (47 Mm.), men ret kraftige. Den ledsagende Skitse viser en skarp Grænselinie mellem Ryggens sorte og Bugens graa Farve, hvilken Grænse midt paa Kroppen bøjer sig nedad, saaledes at Buen begynder mellem Lemmerne og Øjet og ender et Stykke bagved Rygfinnen.

Stykkernes Nummere . . .	<i>P. alope</i> m.		<i>P. attenuatus</i> m.		Hovedskaller hørende til den ene eller den anden af disse Arter.				
	6	15 ♀	8 ♀	3	23	22	21	25	19
	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.
Hele Skelettets Længde fra Spidsen af Overkjaevn til Indsnittet i Halefinnen . . . . .	1890	1620	1750	1720	—	—	—	—	—
Hele Hovedskallens Længde fra Spidsen af Overkjaevn til Nakkeledknuderne . . . . .	415	410	400	400	388	416	392	387	410
Dens største Brede over Kind-Tindingbuerne .	167	164	170	168	161	160	162	162	172
Hjærnekas. Lgd. fra Nakkeledkn. til Orbitalindsn.	170	162	165	160	161	160	115	170	167
Snudedelens Lgd. fra disse til Overkj. Spidse .	255	250	245	243	240	233	244	227	251
Sammes Brede mellem Orbitalindsnittene ved dens Grund . . . . .	88	87	90	84	87	81	84	91	88
Afstanden mellem disse Indsnit og sidste Overkjaevetand . . . . .	45	46	38	"	43	37	45	35	42
Hovedskallens Længde forholder sig til hele Skelettets som . . . . .	1 : 4,6	1 : 4,0	1 : 4,4	1 : 4,3	—	—	—	—	—
Dens største Brede forh. sig til dens Lgd. som	1 : 2,5	1 : 2,5	1 : 2,3	1 : 2,4	1 : 2,4	1 : 2,6	1 : 2,4	1 : 2,4	1 : 2,4
Hjærnekassens Lgd. til hele Hovedskallens som	1 : 2,4	1 : 2,5	1 : 2,4	1 : 2,5	1 : 2,4	1 : 2,6	1 : 2,5	1 : 2,3	1 : 2,5
Snudens Længde til hele Hovedskallens som .	1 : 1,6	1 : 1,6	1 : 1,6	1 : 1,7	1 : 1,6	1 : 1,8	1 : 1,6	1 : 1,7	1 : 1,6
Hjærnekassens Længde til Snudens som . . . .	1 : 1,5	1 : 1,5	1 : 1,5	1 : 1,5	1 : 1,5	1 : 1,5	1 : 1,6	1 : 1,3	1 : 1,5
Snudens Brede ved Grunden til dens Lgd. som	1 : 2,9	1 : 2,9	1 : 2,7	1 : 2,9	1 : 2,8	1 : 2,8	1 : 2,9	1 : 2,5	1 : 2,9
Tændernes Antal . . . . .	39—37 40—41	33—35 38—38	35—36 38—38	39—40 41—43	39—40 38—38	37—37 —	34—34 33—34	40—41 42—42	35—36 37—38

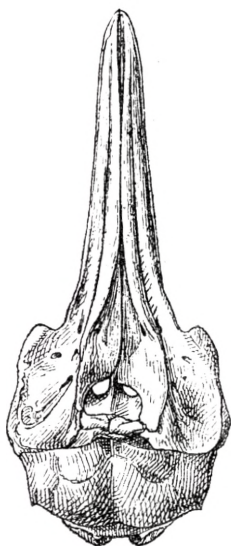
Stykkernes Nummere . . .	<i>P. alope</i> m.		<i>P. attenuatus</i> m.	
	6	15 ♀	8 ♀	3
Hvirvlernes samlede Tal . . . . .	<b>74</b>	<b>75</b>	<b>79</b>	<b>81</b>
Ribbenenes Antal (de rudimentære i Parenthes)	14 (1)	14	15 (1/1)	15 (1/1)
Ribbenpar med dobbelt Ledforbindelse med Brysthvirvlerne . . . . .	4	6	5	6
Lændehvirvler . . . . .	19	19	21	21
Halehvirvler . . . . .	34	35	36	38
Nedrebuer (Hæmapofyser) tilstede . . . . .	27	26	28	24
Første lodrette Karkanaler findes i Hvirvel Nr.	<b>52</b>	<b>54—55</b>	<b>58</b>	<b>57—58</b>
De sidste tydelige Tværtappe paa Hvirvel Nr. .	<b>55—56</b>	<b>57</b>	<b>62</b>	<b>61</b>
Den sidste tydelige Torntap paa Hvirvel Nr. . .	<b>60</b>	<b>64</b>	<b>67</b>	<b>67—68</b>
Antal af Hvirvler uden Metapofyser (deres Nr)	8 (31—38)	26 (23—48)	12 (33—44)	16 (29—44)
	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.
Første Ribbens Brede . . . . .	23	16	17	
Brystbenets Længde og Brede . . . . .	165—100	125—76	160—82	157—83
Bækkenbenenes Længde . . . . .	79	47	48	—
Skulderbladenes Længde og Højde . . . . .	207—122	134—100	155—109	—
Lemmernes Længde fra Skulderleddet . . . . .	280	216	240	240
Lemmernes Længde forholder sig til hele Ske- lettets som . . . . .	1 : 6,8	1 : 7,5	1 : 7,3	1 : 7,2
	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.
Armens Længde . . . . .	120	93	98	98
Haandens Længde . . . . .	176	143	160	138
Forskjellen mellem dem . . . . .	56	50	62	40
Fingerleddenes Antal . . . . .	2.9.6.3.2	3.9.6.3.2	3.9.7.3.2	1.8.6.3.2
	2.9.6.3.1	3.9.6.3.1	3.10.7.3.2	1.8.6.3.2

Om Nr. (8) (*P. attenuatus* m.) er oplyst, at den var en Hun; de smaa Bækkenben bekræfte Angivelsens Rigtighed. Set fra Siden var den meget mørk foroven og askegraa forneden. Den er taget i Atlanterhavet paa 2° 44' N. Br. og 29° 2' V. L., altsaa ikke langt fra St. Paul. Nr. (3) er tagen paa 9° N. Br. og mellem 33 og 34° V. L., saa at sige midt i Atlanterhavet. Der er opgivet følgende Maal for to af disse Stykker:

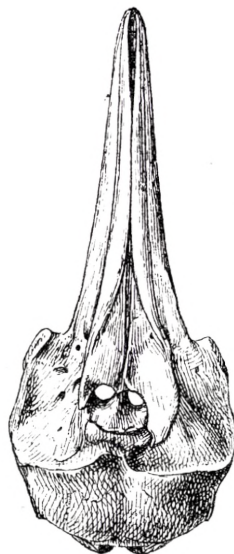
	Nr. 8 Hun)	Nr. 15 (Hun)
Fra Snudespidsen til Haleindsnittet . . . . .	5' 7½"	5' 8"
Fra Snudespidsen til Rygfinnen . . . . .	2' 7½"	2' 7"
Fra Snudespidsen til Lemmerne . . . . .	1' 3½"	1' 4"
Fra Snudespidsen til Øjet . . . . .	" 11¾"	1' "
Fra Snudespidsen til Blæsegattet (Næseborene) . . . . .	1' ½"	1' "
Fra Gattet til Kjønsaabningen . . . . .	" 2½"	" 1"
Fra Gattet til Indsnittet i Halefinnen . . . . .	1' 6"	1' 5"
Fra Navlen til Kjønsaabningen . . . . .	1' 5½"	
Fra Rygfinnen til Indsnittet i Halefinnen . . . . .	2' 2½"	2' 3"
Omfang foran Rygfinnen . . . . .	2' 11"	2' 10½"
Omfang foran Halefinnen . . . . .	1' 3"	
Omfang 15 Tommer fra Halen . . . . .		1' 7¼"
Gabets Længde . . . . .	" 9"	
Snudespidsens Længde . . . . .	" 4½"	

*P. alope.*

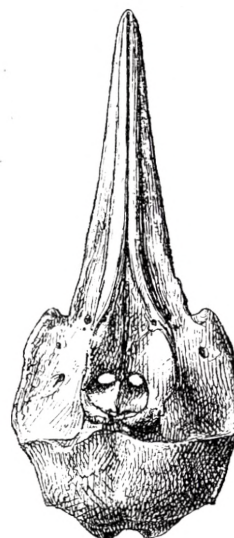
6



15

*P. attenuatus.*

8



Tænderne have paa disse Kranier en Længde af 7—8 Mm. og et Tværmaal af c. 2½ Mm.; der gaar 5 paa en dansk Tomme. Hvis det paa Tabellen under Nr. 6 opførte Skelet er af en Han, som jeg dog er mest tilbøjelig til at tro, vil man ogsaa her ret vel kunne skjelne mellem Hannerne med lidt smallere og mere højryggede Snuder og Hunner med lidt bredere og fladere Snude. Det nævnte Skelet, det største af dem alle, er det, som har det længste Skulderblad og de mest udviklede Muskelindtryk paa samme, og *Acromion* er her med sin Spids sammenvokset med Skulderbladets Plade, saa at Indsnittet mellem begge er forvandlet til et Hul; det har ogsaa de længste Luffer, hvis Udvikling

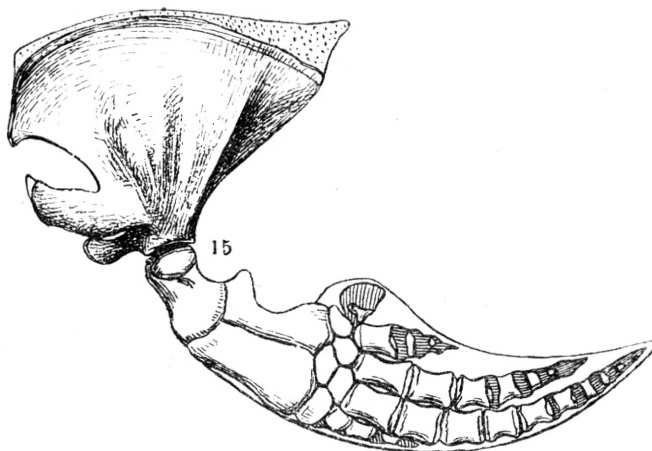
jo i det hele synes at staa i et kjendeligt Afhængighedsforhold til Individets Alder. Det samme Skelet frembyder den Anomali, at 4 Lændehvirvlers Neuropofyser ere sammenvoxne to og to til Plader af betydelig Brede. Andre Afvigelser, som i Almindelighed let lade sig paavise, naar man Stykke for Stykke vil sammenligne to hvilket som helst Delfinskeletter af samme Art, anser jeg ikke for at have mere end individuel Betydning.

***P. longirostris*** (Schl.)

Lang- og tyndsnudede Delfiner med c. 40 fine Tænder, korte Luffer og 72 Hvirvler.

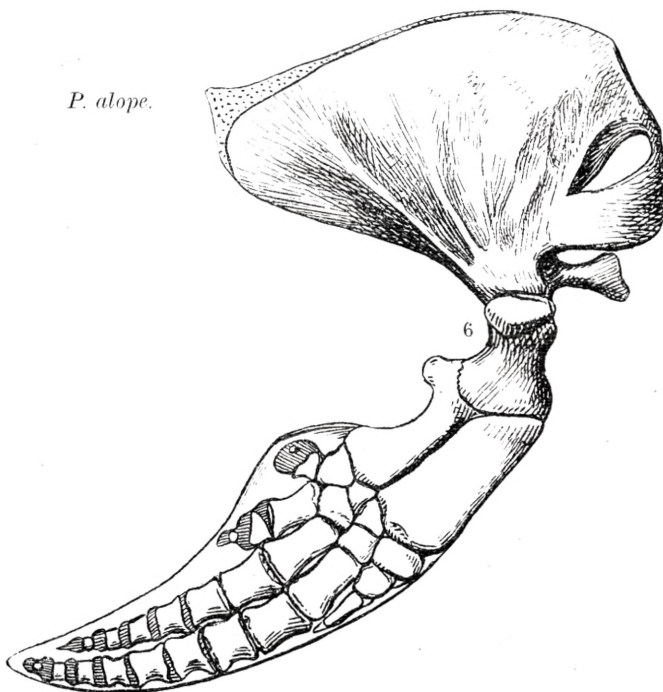
Museets Skelet af denne Art, opgivet at være fra Australien, er i sin Tid af afd. Eschricht kjøbt hos en hamburgsk Naturaliehandler. Ingen anden mig bekjendt Prodelphin har saa lang og tynd en Snude eller en forholdsvis saa lille

Hjærnekasse. Jeg erkjender Overensstemmelsen mellem den mig foreliggende Art og Schlegels Fremstilling af *P. longirostris* (Abhandl. aus d. Geb. d. Zoologie etc. t. I, II, IV fig. 1) samt med Grays *D. microps* (Zool. Ereth. & Terr. & Synopsis, pl. 25). Denne sidste Figur er rimeligvis udført efter Hovedskallen af en Han, og til det samme Kjøen henfører jeg paa Grund af den høje Næseryg det foreliggende Skelet. Da der hidtil intet har været



Tallene henviser til Stykkernes Nummere S. 44—45.

*P. alope.*



bekjendt om denne Arts Skelet, ville de nédenstaaende Oplysninger om Museets Exemplar ikke være uden Værd. For Fulstændigheds Skyld medtager jeg de sædvanlige Angivelser om Hovedskallen.

Skelettets Totallængde er . . . . .	1805 Mm.;	Forholdet mellem Hovedskallens og hele Ske-
Hovedskallens Længde . . . . .	418 — ;	lettets Længde er som . . . . .
Dens største Brede . . . . .	155 — ;	Mellem Hovedskallens Længde og Brede . . . . .
Hjærnekassens Længde . . . . .	150 — ;	Mellem Hjærnekassens og Hovedskallens Længde . . . . .
Snudedelens Længde . . . . .	275 — ;	Mellem Snudens og Hovedskallens Længde . . . . .
Dens Brede ved Grunden . . . . .	77 — ;	Mellem Hjærnekassens og Snudens Længde . . . . .
Afstanden fra Indsnittene til den sidste		Mellem Snudens Brede ved Grunden og dens
Overkævetand . . . . .	35 — ;	Længde . . . . .

Tændernes Antal er — bortset fra det forreste tilsyneladende tandløse Afsnit af Overkæven —  $\frac{46-49}{51-53}$ ; de enkelte Tænder have et Tværmaal af 2 Mm., en Længde af højst 8 Mm., og der gaar 7 af dem paa en dansk Tomme. Plovbenet er synligt i en Strækning, der er lig med Snudens Brede ved Basis.

Det samlede Hvirveltal er **72**, hvoraf 14 bære Ribben; de 5 første Par af disse staa i dobbelt Ledforbindelse med Rygraden. Der er 17 Lænde- og 34 Halehvirvler og iagttages 25 Nedrebuer. De første tydelige *foramina perforantia* iagttages paa den 48de og 49de Hvirvel, den sidste tydelige Tværtap paa den 55de, den sidste Torntap paa den 61de Hvirvel. Omtrent 11 Hvirvler (fra den 31te til den 41de) ere uden Metapofyser. Den højeste Torntap er saa lang som  $4\frac{1}{2}$  Hvirvel, den længste Tværtap som  $3\frac{1}{2}$  Hvirvel af det samme Rygradsparti. Brystbenet er 155 Mm. langt og halvt saa bredt (77 Mm.) mellem Spidserne af *apophyses manubrii*. Skulderbladet er 153 Mm. bredt og 98 Mm. højt, det første Ribben 22 Mm. bredt. Lemmernes Længde er 252 Mm. og indeholdes 7,2 Gang i hele Skelettets Totallængde; Armens Længde er 123 Mm., Haandens 155 Mm. I begge Lemmer tælles 2.9.7, 3.2 Led.

Da der vel næppe kan være Tvivl om, at *P. roseiventris* (Hombr. & Jacqu.) (Gervais «Ostéographie d. Cétacés» pl. XXXVIII fig. 6) er den samme Art, kan der altsaa ad denne Vej oplyses noget om denne Delfins Udseende i levende Live.

### *Prodelphinus Holbölli* (Eschr.).

Delfiner med kort, lancetdannet Snude, c. 50 fine Tænder, korte Luffer og 75 Hvirvler.

Den lille grønlandske Delfin, hvis Skelet Eschricht præsenterede for det skandinaviske Naturforsker mødes Zoologiske Sektion i 1847<sup>1)</sup> under det Artsnavn, der skulde

<sup>1)</sup> Forhandlinger ved de skandinaviske Naturforskeres femte Møde, S. 611 (1849). Artsnavnet er dog ikke nævnt i Beretningen om Mødet. Det er omtalt i S. Nilssons Skand. Fauna, Daggdjuren S. 596.

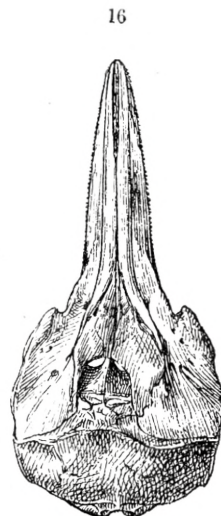


minde om dets Indsender, er fremdeles den eneste af sin Art i vort Cetaceum. Den er hverken senere indsendt fra Grønland eller faldet for vore Skibsføreres Harpuner i de sydligere Bælter af Atlanterhavet. I Henseende til Kraniets Form hører den til de mere kort- og bredsnudede Former og udmærker sig særlig ved sin lanceolate Snudeform, flade Mellemkæveben og smaa og fine, tæt stillede Tænder; deres Antal er  $\frac{50-53}{49-51}$ , deres Længde  $7\frac{1}{2}$  Mm., Tværmaal  $2\frac{1}{2}$  Mm., og de sidde saa tæt, at der gaar ikke mindre end 8 af dem paa en dansk Tomme. Der er kun 74 Hvirvler, men der mangler øjensynlig 1, men næppe heller flere, saa at man kan sætte Tallet til 75. Det er i øvrigt et Skelet af et meget ungt Dyr — hvis Korthaadethed jeg væsentlig skriver paa dets Ungdoms Regning; Haanden er her 15 Mm. kortere end Armen! At de første perforerende Karkanaler først optræde paa den 57de Hvirvel, er ellers kun Tilfældet hos Former med et større Hvirveltal; det maa derfor bemærkes, at en saadan allerede er antydet — d. v. s. tilstede i en finere Skikkelse — paa den ene Side paa den 55de Hvirvel.

Skulde denne Form identificeres efter Kraniet med nogen af de af Gray afbildede Arter, maatte det snarere være med *P. styx* (l. c. pl. 21) end med *P. eufrosyne*, til hvilken den — under megen Tvivl — blev henført af S. Nilsson, hvilket atter har havt til Følge, at denne Delfinart paa forskellige Steder er bleven opført som grønlandsk <sup>1)</sup>.

Skelettets Total længde . . . . .	1265 Mm.;	Hovedskallens Lgd. forh. sig til Skelettets som 1 : 3,6
Hovedskallens Længde . . . . .	350 — ;	Forholdet mellem dens Lgd. og Brede er som 1 : 2,3
Hjærnekassens Brede over Kindbuerne . . . . .	155 — ;	Hjærnekassens Længde til Hovedskallens er som 1 : 2,2
Dens Længde til Orbitalindsnittene . . . . .	158 — ;	Snudens Længde til Hovedskallens er som . . 1 : 1,8
Snudens Længde fra disse . . . . .	195 — ;	Hjærnekassens Længde til Snudens er som . . 1 : 1,2
Dens Brede mellem disse . . . . .	83 — ;	Snudens Brede til dens Længde er som . . . . 1 : 2,4
Afstanden fra dem til sidste Tand . . . . .	33 — ;	
Hvirvlernes samlede Tal er . . . . .	75;	Første Ribbens Brede er . . . . . 12 Mm.
Ribbenenes . . . . .	14;	Brystbenets Længde og Brede . . . . 108 og 73 —
Deraf have dobbelt Ledføjning . . . . .	4;	Skulderbladets Længde og Højde . . . 116 og 86 —
Lændehvirvler . . . . .	20;	Lemmernes Længde . . . . . 157 —
Halehvirvler . . . . .	34;	Armens . . . . . 90 —
Hæmapofyser tilstede . . . . .	23;	Haandens . . . . . 75 —
Første lodrette Karkanal i . . . . .	57de Hvirvel;	
Sidste tydelige Tværtappe paa . . . . .	59de — ;	
— — — — — Torntap paa . . . . .	63de — ;	Fingerleddene: $\frac{1.7.6.3.1}{? 7.6.3.1}$
Hvirvler uden Metapofyser . . . . .	d. 36te—48de;	

<sup>1)</sup> F. Ex. af R. Brown: Notes on the history and geographical relations of the Cetacea frequenting Davis Strait and Baffins Bay etc. Proc. Zool. Soc. 1868 p. 549. Arctic Manual and Instructions, edit. by P. Rupert Jones (1875) p. 85.



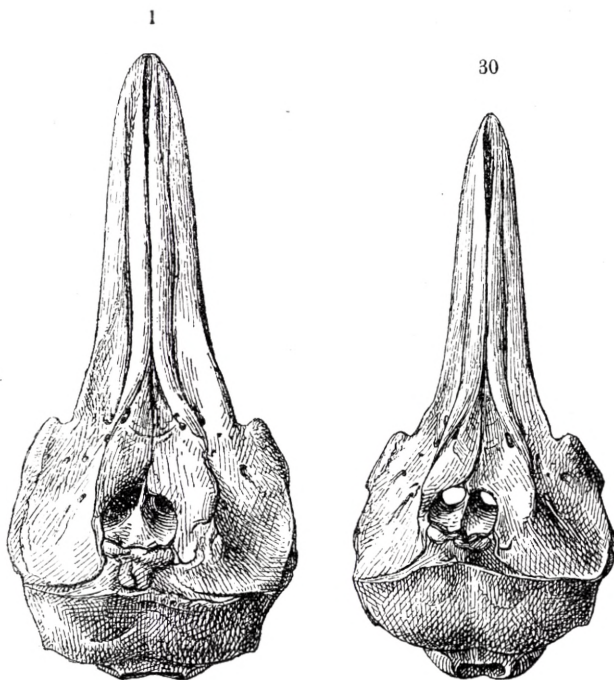
*Prodelphinus tethyos* (Gerv.).

Delfiner med langstrakt, lancetdannet Snude, c. 40 grovere Tænder og 78—79 Hvirvler.

P. Gervais beskrev<sup>1)</sup> i 1853 under Navn af *P. tethyos* kortelig en Hovedskal af en Delfin uden Ganefurer, 430 Mm. lang, 210 Mm. bred over Tindingerne, 100 Mm. over Snudens Grund og med  $\frac{45-46}{41-42}$  Tænder. Denne Delfin var strandet ved Kysten af Deptm. Hérault i Middelhavet; Kraniet er afbildet fra Undersiden paa den Afhandlingen ledsagende Tavle og senere atter i «Ostéographie d. Cétacés», pl. XXXVIII fig. 2. Der finder man tillige (fig. 1) Afbildninger af Hovedskallen af en meget lignende, men noget mere langsnudet Delfin af anselig Størrelse, aabenbart et gammelt Dyr, under Navn af *D. marginatus* Duvern. & Pucheran<sup>2)</sup>. Denne Art er baseret paa to ved Dieppe i 1854 strandede Delfiner, om hvis Form og Proportioner nogle Oplysninger kunne findes i P. Fischers «Cétacés du sud-ouest de la France»<sup>3)</sup>. Der omtales i denne Afhandling ogsaa en *D. algeriensis* Loche,

beskrevet i «Revue et Magasin de Zoologie» f. 1860 og opstillet paa en stor Hun-Delfin (2470 Mm. lang), med  $\frac{49}{45}$  Tænder, der menes at staa nær ved *D. tethyos*, men hvis Hovedskal desværre ikke kjendes. Saa vidt skjønnes er der megen Sandsynlighed for, at disse 3 nominelle Arter ere et og det samme, og andre *Prodelphinus*-Arter kjendes ikke fra Middelhavet eller overhovedet fra Europas Kyster.

Af Delfiner af denne Type har Museet to Skeletter og 1 Kranium: 1) et stort Skelet (Nr. 1), det største af den hele Slægt, af et gammelt Dyr af kraftig Bygning, hvis Hovedskals Fysionomi i høj Grad ligner den af Gervais afbildede *P. marginatus*; uheldigvis mangle Lemmerne, og jeg har ingen Oplysning fundet



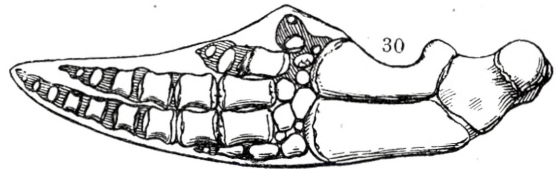
<sup>1)</sup> Remarque sur les Mammifères marins qui fréquentent les côtes de la France et plus particulièrement sur une nouvelle espèce de Dauphin propre à la Méditerranée (Soc. d'agric. de l'Hérault 1853).

<sup>2)</sup> Revue et Magasin de Zoologie 1854 p. 547.

<sup>3)</sup> Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux. Vol. XXV. 1881 p. 150.

	« <i>D. marginatus</i> » fra Dieppe. ♂	Nr. 1.	Nr. 18.	Expl. fra Iviza. Nr. 30 ♀
	Mm.	Mm.	Mm.	Mm.
Skelettets Totallængde . . . . .	2090	2210	—	1625
Hovedskallens Længde . . . . .	460	457	456	405
Dennes Brede over Kindbuerne . . . . .	230	214	209	185
Hjærnekassens Længde til Orbitalindsnittene . . . . .	—	192	186	174
Snudens Længde fra samme . . . . .	280	274	276	235
Dens Brede mellem samme . . . . .	115	118	105	98
Afstanden fra disse til den sidste Overkjævetand . . . . .	—	—	43	42
Hovedskallens Lgd. forholder sig til hele Skelettets som Forholdet mell. Hovedskallens Lgd. og største Brede	1 : 4,5 1 : 2,0	1 : 4,8 1 : 2,1	— 1 : 2,2	1 : 4,0 1 : 2,2
Forh. mell. Hjærnekassens og hele Hovedskallens Lgd.	—	1 : 2,4	1 : 2,5	1 : 2,3
Forholdet mellem Hovedskallens og Snudens Længde	1 : 1,7	1 : 1,7	1 : 1,7	1 : 1,7
Forholdet mellem Hjærnekassens og Snudens Længde	—	1 : 1,4	1 : 1,5	1 : 1,4
Forholdet mellem Snudens Længde og største Brede	1 : 2,4	1 : 2,3	1 : 2,6	1 : 2,4
Tændernes Antal . . . . .	47—47 43—45	39—39 40—42	41—42 43—43	40—41 38—38
Hvirvlernes Antal er . . . . .	<b>76</b>	<b>79</b>	—	<b>78</b>
Ribbenenes Antal er . . . . .	15	15 (1/1)	—	13
Ribben med dobbelt Ledføjning . . . . .	<b>5</b>	<b>3</b>	—	<b>4</b>
Lændehvirvler . . . . .	22	22	—	20
Halehvirvler . . . . .	32	35	—	38
Hæmapofyser (Nedrebuer) tilstede . . . . .	—	22	—	30
Forste lodrette Karkanaler findes i Hvirvel Nr. . . . .	<b>59—60</b>	<b>58—59</b>	—	<b>55—56</b>
Sidste tydelige Parapofyser paa Hv. Nr. . . . .	<b>63</b>	<b>61</b>	—	<b>59</b>
Sidste tydelige Neurapofyse paa Hv. Nr. . . . .	<b>68</b>	<b>66</b>	—	<b>63</b>
Hvirvler uden Metapofyser (deres Nummere) . . . . .	15 (29—43)	13 (41—43)	—	12 (31—42)
Forste Ribbens Brede . . . . .	—	Mm. —	—	Mm. 18
Brystbenets Længde og Brede over Manubrium . . . . .	—	225—125	—	125—58
Bækkenbenenes Længde . . . . .	—	—	—	62
Skulderbladets Længde og Højde . . . . .	—	—	—	156—98
Lemmernes Længde . . . . .	—	—	—	234
Forholdet mell. Lemmernes og hele Skelettets Længde	—	—	—	1 : 7,0
Armens Længde . . . . .	—	—	—	Mm. 112
Haandens Længde . . . . .	—	—	—	133
Forskjellen mellem dem . . . . .	—	—	—	21
Fingerleddenes iagttagne Antal . . . . .	2.9? . 7.3.1?	—	—	3.8.6.3.2 2.8.6.3.2

om dets Hjemsted, men jeg antager, at det er hjemført fra Atlanterhavet af en af vore Skibskaptejner; 2) et Kranium (Nr. 18) af samme Størrelse, med nogle Formforskjelligheder fra det foregaaende; desværre vides heller ikke, hvorfra det er. Det er betydelig mere smalsnudet end (1), idet det indsnævres betydelig omtrent fra det Punkt, hvor Tanddrækken begynder. Den smallere, mere højryggede Snude antyder formentlig, at (18) er af en Han, den bredere og fladere Snude, at (1) er af en Hun. 3) Et Skelet af en ved Iviza i Middelhavet harpuneret yngre Delfin (Nr. 30), der af Giveren, nuværende Havneassistent Corneliussen, er oplyst at være af en Hun. Efter Kraniet nærer jeg ingen Tvivl om dens Identitet med *P. tethyos*; i Fysionomi stemmer den vel nok med Kranierne (1) og (18), men den er mere kortsnudet, uden Tvivl fordi den er af et yngre Dyr. — Jeg har i omstaaende Tabel sammenstillet de sædvanlige Maal, Proportioner og Tællinger af Hvirvler for disse 3 Stykker og tillige i en egen Kolonne optaget de ligeartede Data, som ere meddelte af P. Fischer om Typexemplaret af «*D. marginatus*». Det vil ses, at der i visse Forhold er stor Uoverensstemmelse, men at der er en Gradation i disse Forhold, som taler mod at tillægge dem større Betydning. At Hvirveltallet varierer fra 76—79, vil intet sige; mærkeligere er det, at der kan være 3, 4 eller 5 Hvirvler med dobbelt Ledføjning, og at det er det yngste Exemplar, som har flest! Der er ogsaa et betydeligt Spring fra (30) til Skelettet fra Dieppe i Henseende til, hvilke Hvirvler der vise de første Karkanaler, de sidste Parapofyser eller Neurapofyser; men Skelettet (1) udjævner disse Forskjelligheder. Det kan endnu bemærkes, at paa dette gamle Skelet maa de tre første Hvirvler siges at være sammenvoxne, da den tredje baade med sit «Legeme» og med den øverste Del af sin



Bue er sammenvoxen med anden. Tænderne have hos (1) en Højde af 11 Mm., et Tværmaal af  $2\frac{1}{2}$  Mm., og der gaar fem af dem paa en dansk Tomme; hos (18) ere de noget kortere og svagere. Det vil ses, at paa det yngre Skelet er Hovedskallen netop en Fjerdedel, Luffernes Længde en Syvendedel af Totallængden. Paa Skelettet fra Dieppe var Hovedskallens Længde derimod  $\frac{2}{9}$  af samme: en ganske naturlig Aldersforskjel. I begge Haandrodspartier af Skelettet fra Iviza iagttoges der 2 Smaaknogler ud over det sædvanlige Antal. Om denne Delfin er det end ydermere oplyst, at den havde en blaagraa Ryg, hvis Farve i Afskygninger gik over i Bugens hvidblaa, samt at der løb en mørkere Stribe «fra Øjet til Halegabet» og en Stribe fra Mundvigene til Lufferne.

**Kort I** oplyser, hvor i Atlanterhavet de i denne Afhandling omtalte pelagiske Delfiner af Slægterne *Steno*, *Prodelphinus* og *Delphinus* ere fangne, forsaavidt som Angivelser derom foreligge. Er dette end kun et ubetydeligt Bidrag til Kundskab om Delfin-Arternes Udbredning, vil det dog kunne tjene til at orientere i, i hvilke Havbælter de i Afhandlingen nævnte Tandhvaler er truffene.

- S Steno rostratus.*  
*D Delphinus delphis.*  
*P 1. Prodelphinus doris.*  
*P 2. Pr. euphrosync.*  
*P 3. Pr. euphrosynoides.*  
*P 4. Pr. obscurus.*  
*P 5. Pr. alope.*  
*P 6. Pr. attenuatus.*  
*P 7. Pr. tethyos.*

**Kort II** oplyser, hvor i Atlanterhavet der af de nedennævnte Rejsende og Søfarende er set eller fanget Delfiner paa de nedenfor nævnte 8 Rejser. Hensigten dermed er kun at give et Billede af de os foreliggende Erfaringer om Delfiners Forekomst i dette Bælte af Atlanterhavet. Til deres Bedømmelse vil det være nødvendigt at tage Hensyn til de af Sejlskibene fulgte Ruter. Tallene (1—8) vise hen til de nedenfor anførte Ruter, oplyse altsaa intet med Hensyn til de enkelte Slægters eller Arters Udbredning.

1. Andréa (1866) til og fra Havanna.
2. Warming fra Brasilien.
3. Andréa (1863—64) til og fra Mauritius.
4. Andréa (1865—66) til og fra Rio Janeiro.
5. Hygom (1863) til Maruim (Brasilien).
6. Hygom (1863—64) til og fra Maruim.
7. Andréa (1867) til Havanna.
8. Reinhardt til Brasilien.

Der er ikke lagt an paa at indføre de opgivne Lokalteter med absolut Nøjagtighed, da der kun tilsigtedes et Overblik. At Findestederne samle sig saa stærkt i visse Strøg, er vistnok til Dels en Følge af, at Ruterne dér krydses; men man tager dog vistnok heller ikke fejl i at uddrage af dem det Resultat, at Delfiner ere særdeles hyppige i den Del af Atlanterhavet, der ligger Vest for Frankrig og den iberiske Halvø.

Med Hensyn til den stentrykte Tavle bemærkes, at den giver dels en Fremstilling af Skelettet af *Steno rostratus*, udført paa Grundlag af en fotografisk Afbildning, dels en approximativ Fremstilling af denne Delfins Ydre, paa Grundlag af Kaptejn Andréas Skitse af Farvefordelingen og af hvad der af andre Kilder kunde oplyses om dens Fysionomi; men den kan ikke i Enkeltighederne gjøre Krav paa absolut Paa-lidelighed.

De i Texten (S. 25, 36, 38, 39, 41, 42, 43, 46, 49 og 50) indtrykte Afbildninger af Hovedskaller ere alle udførte efter Fotografier og kunne derfor gjøre Krav paa Nøjagtighed i Omridsene; deres Hensigt er især at tjene som oplysende Bilag til Henførelsen til bestemte Arter, men tillige at lette Bestemmelsen af Delfinkranier i andre Samlinger. Tallene henviser til de Numre, som Originalerne bære i Museet og paa Tabellerne.

Med Hensyn til de fire Skitser af Farvefordelingen hos Delfiner S. 17, 34 og 42 bemærkes, at Konturen, hvori denne er indtegnet, er en ideal Delfinkontur, til Grund for hvilken ligger *D. delphis*, og at de derfor kun have Betydning som oplysende Farvetegning og Farvefordeling.

#### Rettelse.

S. 16 L. 3 f. n. N. 5 læs: N. 3.

Contributions à la connaissance des trois genres pélagiques  
d'Odontocètes: *Steno*, *Delphinus* et *Prodelphinus*.

Par

**Chr. Fr. Lütken.**

La collection de Cétacés du musée zoologique de l'université de Copenhague s'est, dans le cours des temps, augmentée d'un nombre assez considérable de squelettes et de crânes de dauphins pélagiques, principalement des régions chaudes de l'Atlantique. Ils ont, pour la plupart, été rapportés par les capitaines de navire auxquels le musée doit sa richesse en d'autres animaux pélagiques, et qui, dans leurs voyages aux Antilles, au Brésil, à Maurice, à Java, au district de l'Amour, etc., ont profité de toutes les occasions pour harponner ces dauphins. Dans beaucoup de cas, ils ont en outre pris des mesures des animaux frais, noté des observations sur leur couleur et leur aspect, découpé des modèles de leurs nageoires, etc., et presque toujours marqué la latitude et la longitude du lieu où ils ont été pêchés. Tandis que les dauphins pélagiques sont en général relativement faiblement représentés, même dans les grandes collections cétologiques, les espèces plus petites, du moins, le sont aussi richement dans notre musée que les Odontocètes des mers du Nord. Il semble donc qu'il y a tout lieu de faire un essai pour apporter, à l'aide de ces matériaux, plus de clarté dans une branche de la cétologie qui, sous ce rapport, laisse encore beaucoup à désirer. Les squelettes et les crânes dont il s'agit appartiennent aux 3 genres ci-dessus mentionnés de Delphinides pélagiques. Je me propose, dans ce qui suit, de montrer, aussi brièvement que possible, quels sont les principaux points pour lesquels l'étude de ces matériaux me paraît avoir donné des résultats positifs. Dans l'introduction du mémoire danois, j'ai exposé avec plus de détail l'état actuel de la cétologie, surtout au point de vue des questions qui se rapportent plus ou moins directement aux matières dont il s'agit ici.

I.

Le musée possède un squelette entier et 5 têtes osseuses d'une espèce du genre *Steno* que j'ai identifiée avec le *S. rostratus*; deux autres (dont une du Pacifique) appartiennent peut-être à une forme très voisine à museau un peu plus étroit et à dents un

peu plus fines, mais je suis plus porté à ne pas les regarder comme constituant une autre espèce, et je crois que nous ne connaissons en somme qu'une seule espèce de ce genre, laquelle viendra ainsi également à comprendre le *S. perspicillatus* de M. le professeur Peters. J'ai donné — ce qu'on n'avait pas encore — un dessin du squelette de ce robuste dauphin, et je me suis servi d'une esquisse faite par le donateur, M. A. F. Andréa, en mettant en outre à profit ce que j'ai trouvé dans la littérature sur le genre dont il s'agit, pour faire exécuter une reproduction de la physionomie de ce dauphin, qui, il est vrai, n'est pas authentique dans tous les points, mais ne s'écarte probablement pas beaucoup de la vérité et contribuera en tout cas à en faire mieux connaître les caractères extérieurs. Ce dessin rappelle beaucoup le dauphin que M. Pernetty (Voyage aux îles Malouines) a rencontré dans le voisinage des îles du Cap Vert. — Les mesures de 8 crânes qu'on trouvera p. 8 donnent: 1) la longueur totale de la tête osseuse; 2) la longueur du crâne proprement dit; 3) sa largeur; 4) la longueur de la symphyse de la mâchoire inférieure. Le sternum, les omoplates et les membres du squelette ci-dessus mentionné sont représentés p. 10. Le nombre des vertèbres est de  $65 = 7 + 13 + 15 + 30$ ; les six premières côtes s'unissent à la colonne vertébrale par une double articulation; les premiers canaux vasculaires perforants se trouvent sur la 6<sup>e</sup> ou la 7<sup>e</sup> vertèbre caudale; le nombre des phalanges est de 4.8.6.3.3. Le guillochis des dents est distinct sur toutes les 8 têtes; elles sont au nombre de 20—24 sur les 5 crânes types, et leur hauteur au-dessus des gencives est de 15—17 (plus rarement 14) millim.; leur diamètre à la base est de 7—8 millim., et 3 des plus grosses dents à la mâchoire inférieure occupent ensemble, y compris leurs intervalles, un espace de 30—34 millim. Les mesures prises sur le dauphin frais, p. 10, donnent: 1) la longueur totale de l'animal; 2) sa hauteur devant la nageoire dorsale; 3) la distance de l'extrémité du museau à la nageoire dorsale; 4) la distance de l'extrémité du museau à l'œil; 5) la distance de l'extrémité du museau à l'évent; 6) la distance de l'extrémité du museau aux membres.

## II.

Le genre *Delphinus* (*Eudelphinus* Gerv.) se distingue non seulement par les sillons palatins de la tête osseuse, mais en même temps — comme l'indique une note laissée par M. Reinhardt — par la soudure des intermaxillaires, fait qui jusqu'ici ne semble pas avoir été observé par d'autres. Le musée en possède 11 squelettes et 13 crânes, dans lesquels — malgré leurs différences individuelles assez grandes, qui sont de la même nature que celles qu'on rencontre chez d'autres Odontocètes, et que j'ai exposées en détail dans le texte danois — je ne puis reconnaître que les représentants d'une seule espèce, le *D. delphis* classique, qui, chose singulière, a, pour la première fois, été exactement représenté par M. Reinhardt, et peu de temps après par M. Flower. Je suis d'ailleurs porté à croire qu'on ne connaît de ce genre que cette espèce unique, sans que, cependant, je veuille ni puisse endosser quelque responsabilité relativement aux formes ou aux variétés un peu plus divergentes que je n'ai pas examinées. Je profite de l'occasion pour rappeler que le *D. Walkeri* et le *D. Moorii* de M. J. E. Gray,

qui ne sont autre chose que le *D. delphis*, sont basés sur des squelettes et des dessins qui, de même que tant d'autres de nos squelettes de dauphins, sont dus non au capitaine Walker, mais au capitaine A. F. Andréa. J'ai indiqué, p. 17, d'après un dessin du même capitaine, la coloration d'un des dauphins dont nous possédons le squelette. Les têtes osseuses, les omoplates, les prosterna et les membres représentés p. 24 et 25, serviront à illustrer dans quelles limites varient ces différentes parties. Les variations dans le nombre des dents sont indiquées p. 20. On trouvera, p. 19 et 22, des tableaux indiquant d'autres différences dans les nombres et les proportions des diverses parties du squelette.

La première colonne du tableau de la p. 19 indique le numéro et le sexe de chaque individu; la deuxième, la longueur totale de la tête osseuse des condyles occipitaux à l'extrémité du museau; la troisième, la largeur de la tête osseuse entre les arcades zygomatiques; la quatrième, le rapport entre la longueur totale et la largeur de la tête osseuse; la cinquième, la longueur du crâne proprement dit jusqu'à une ligne entre les entailles antéorbitaires; la sixième, le rapport entre la longueur du crâne proprement dit et la longueur totale de la tête osseuse; la septième, la longueur du museau depuis les entailles antéorbitaires; la huitième, le rapport entre la longueur totale de la tête osseuse et celle du museau; la neuvième, le rapport entre la longueur du crâne proprement dit et celle du museau; la dixième, la largeur du museau à sa base entre les entailles antéorbitaires; la onzième, le rapport entre la longueur du museau et sa plus grande largeur; la douzième, la distance entre l'une des entailles ci-dessus mentionnées et la dernière dent de la mâchoire supérieure. Toutes les mesures sont données en millimètres.

La première colonne du tableau de la p. 22 indique le numéro et le sexe de chaque individu; la deuxième, la longueur totale du squelette, en mètres; la troisième, la longueur de la tête osseuse; la quatrième, le rapport entre ces deux longueurs; la cinquième, le nombre des vertèbres; la sixième, le nombre des paires de côtes; la septième, le nombre de ces paires qui sont rudimentaires; la huitième, le nombre des paires de côtes antérieures qui ont un col et une tête, et par suite une double articulation avec les vertèbres dorsales; la neuvième, les vertèbres lombaires; la dixième, les vertèbres caudales; la onzième, le nombre des hémaphyses; la douzième, la vertèbre où se trouvent les premiers canaux vasculaires qui traversent les parapophyses; la treizième, la vertèbre qui porte les dernières parapophyses distinctes; la quatorzième, la vertèbre où se trouvent les dernières neurapophyses distinctes; la quinzième, les vertèbres qui n'ont pas de métapophyses; la seizième, leur nombre; les deux suivantes, la largeur du prosternum et celle de la première côte, en millimètres; la dix-neuvième, la longueur des membres; la vingtième, le rapport entre cette longueur et celle de tout le squelette; la vingt-et-unième, la longueur du bras; la vingt-deuxième, celle de la main; la vingt-troisième, la différence entre eux; l'avant-dernière, le nombre des phalanges; la dernière, les squelettes dont le prosternum est percé ou fendu, ou n'a que des apophyses presque pas ou peu développées, ou dont le prosternum ou les membres manquent.



## III.

Le genre *Prodelphinus* est le type par excellence des dauphins pélagiques<sup>1)</sup>. Aussi n'y en a-t-il que très peu d'exemplaires qui aient été pris ou qui aient échoué sur les côtes de l'Europe, d'où il suit que les squelettes de ces dauphins sont fort rares dans les musées de l'Europe, et qu'un grand nombre d'espèces douteuses ont été établies sur des têtes osseuses rapportées par des navigateurs, matériaux qui malheureusement sont tout à fait insuffisants pour établir la diagnose exacte d'une espèce. C'est pourquoi l'incertitude sur la délimitation et le nombre des espèces est plus grande dans ce genre que dans tout autre, et, en réalité, on n'est guère arrivé plus loin qu'à pouvoir juger que le genre *Prodelphinus* doit renfermer plusieurs espèces, mais sans savoir au juste lesquelles ni combien. A cela vient s'ajouter que les limites de ce genre par rapport aux genres *Sotalia*, *Lagenorhynchus* et *Delphinapterus (leucorhamphus)* sont un peu vagues, depuis qu'il a été constaté que les os ptérygoïdiens ne sont pas toujours séparés chez le genre *Sotalia*, et que le nombre des vertèbres peut être tout aussi grand chez certains dauphins du genre *Prodelphinus* que chez certains *Lagenorhynques*. Comme notre musée, outre 10 crânes, ne possède pas moins de 19 squelettes appartenant au genre *Prodelphinus*, j'ai eu incontestablement à ma disposition de bien meilleurs matériaux que mes prédécesseurs, et je ne nie pas que je n'aie entrepris ce travail dans l'espoir que je réussirais à dégager l'histoire de ce genre des incertitudes qui l'obscurcissent. Si j'ai, en grande partie, été déçu dans mon attente, et si j'ai dû me borner à donner une série de matériaux bien ordonnés plutôt qu'une révision du genre, la raison en est, d'une part, que mes matériaux, bien qu'assez considérables, se sont cependant montrés plus pauvres et plus insuffisants que ceux dont je disposais pour le genre *Delphinus*, quand il a fallu les répartir entre les différents types ou espèces, et, de l'autre, que c'était une affaire délicate de rapporter nos squelettes à des espèces seulement établies sur des crânes. Pour faciliter aux zoologues le contrôle de mes déterminations, et aider les directeurs d'autres musées à rapporter leurs exemplaires à mes espèces, j'ai accompagné la description de tous les types dont je dispose de dessins de crânes exécutés d'après des photographies, et par suite complètement authentiques, qui donneront une idée bien nette de cette partie de leur physionomie. Un point très important pour la diagnose des espèces du genre *Prodelphinus* est le nombre total des vertèbres, dont les autres nombres sont pour ainsi dire des fonctions; il peut bien varier un peu chez la même espèce dans ce genre comme dans les autres, mais, par exemple, chez les 2 espèces que j'ai rapportées au *P. alope* et au *P. attenuatus*, il est de 74—75 chez le premier, de 79—81 chez le second, bien que j'aie été hors d'état de séparer ces deux types l'un de l'autre par le seul examen des crânes. Il est possible que des matériaux plus nombreux eussent fait voir que quelqu'une des 11 espèces que j'ai distinguées devait disparaître.

<sup>1)</sup> Il existe certainement d'autres formes de dauphins pélagiques que les 3 genres traités ici, et les navigateurs mentionnent surtout souvent de grands dauphins à tête ronde, sans doute des *Globicephales*. Leur grandeur ne permet pas de les capturer de la même manière que les dauphins pélagiques plus petits.

De ces 11 espèces, une est probablement nouvelle, mais elle avait déjà été désignée comme telle par feu M. le professeur Reinhardt; c'est le *P. Petersii*, harponné près de l'île Amsterdam. Une autre, le *P. Holbolli*, seulement connue de nom jusqu'ici, n'est représentée que par un tout jeune squelette provenant du Groenland, où il n'a vraisemblablement été qu'un hôte accidentel. J'ai cherché à délimiter approximativement ces 11 espèces en donnant dans le tableau, p. 32—33, un aperçu de celles de leurs différences ostéologiques qui pouvaient s'exprimer sous cette forme.

Après avoir fait connaître la provenance des différentes pièces du musée, et combien il possède de squelettes et de crânes de chaque espèce, ce tableau indique: 1) le nombre des vertèbres; 2) le rapport entre la longueur du museau et sa largeur à la base; 3) le nombre des dents; 4) combien il y en a sur la longueur d'un pouce danois (26 millim.); 5) le nombre des côtes antérieures qui sont doublement articulées avec la colonne vertébrale; 6—8) sur quelles vertèbres se trouvent le premier canal vasculaire perforant, la dernière parapophyse et la dernière neurapophyse.

J'ai en outre donné dans le texte danois, p. 27—30, un aperçu des variations ostéologiques qui, en général, peuvent se produire dans le genre *Prodelphinus*, pour pouvoir abrégé par là le compte rendu des différentes espèces. Pour deux de ces espèces, la distribution des couleurs a été représentée, d'après des esquisses communiquées par M. Andréa, dans une figure idéale de *Prodelphinus*, qui ainsi n'apprend rien autre sur l'animal. Outre les dessins de crânes, on trouvera en plusieurs endroits des dessins d'omoplates et de membres qui éclairciront les variations de ces parties. Ici, comme pour les crânes, les nombres qui les accompagnent correspondent aux numéros des pièces dans les tableaux.

Les tableaux p. 34—35, 40—41, 44—45 et 51 donnent les mesures, les proportions, etc. suivantes dans l'ordre indiqué ici (de même p. 49, mais avec un changement dans l'ordre de la série).

1. Longueur de tout le squelette depuis l'extrémité de la mâchoire supérieure jusqu'à l'entaille de la nageoire caudale.
2. Longueur de la tête osseuse depuis l'extrémité de la mâchoire supérieure jusqu'aux condyles occipitaux.
3. Sa plus grande largeur entre les arcades temporo-zygomatiques.
4. Longueur du crâne depuis les condyles occipitaux (inclus.) jusqu'aux entailles orbitaires.
5. Longueur du museau depuis ces dernières jusqu'à l'extrémité de la mâchoire supérieure.
6. Largeur du museau à sa base entre les entailles orbitaires.
7. Distance entre ces entailles et la dernière dent de la mâchoire supérieure.
8. Rapport entre la longueur de la tête osseuse et celle de tout le squelette.
9. Rapport entre sa plus grande largeur et sa longueur.
10. Rapport entre la longueur du crâne proprement dit et celle de toute la tête osseuse.
11. Rapport entre la longueur du museau et celle de toute la tête osseuse.
12. Rapport entre la longueur du crâne proprement dit et celle du museau.
13. Rapport entre la largeur du museau à sa base et sa longueur.
14. Nombre des dents.

15. Nombre total des vertèbres.
16. Nombre des côtes (le nombre des côtes rudimentaires est ajouté entre parenthèses).
17. Nombre des paires de côtes qui sont doublement articulées avec la colonne vertébrale.
18. Nombre des vertèbres lombaires.
19. Nombre des vertèbres caudales.
20. Nombre des hémaphyses observées.
21. Numéro de la vertèbre traversée par les premiers canaux vasculaires perforants verticaux.
22. Numéro de la vertèbre qui porte les dernières parapophyses distinctes.
23. Numéro de la vertèbre qui porte la dernière neurapophyse distincte.
24. Nombre et numéros des vertèbres qui n'ont pas de métapophyses.
25. Largeur de la première côte, en millimètres.
26. Longueur et largeur du sternum.
27. Longueur des os pelviques.
28. Longueur et hauteur des omoplates.
29. Longueur des membres depuis l'articulation de l'épaule.
30. Rapport entre la longueur des membres et celle de tout le squelette.
31. Longueur du bras.
32. Longueur de la main.
33. Différence entre eux.
34. Nombre des phalanges.

J'ai de plus, dans de courtes descriptions ou diagnoses, cherché à rassembler les traits les plus caractéristiques des différentes espèces; malheureusement, ces diagnoses, qui ne disent rien de la forme extérieure des espèces, de leur coloration, etc. laissent encore beaucoup à désirer sous le rapport de la précision et de l'amplitude, et ne sont par suite à considérer que comme des résumés provisoires.

1. *P. doris* (Gr.) m. Museau pointu, assez long et étroit (avec une élévation plus ou moins accentuée de sa partie médiane supérieure, du moins chez les mâles) et 70 vertèbres; dents assez grosses (40 au plus); longueur des membres, environ  $\frac{1}{7}$  de celle de tout le squelette. (Cette espèce semble être identique avec celle décrite sous le même nom par M. F. True).
2. *P. euphrosyne* (Gr.) m. Museau assez long et étroit, avec des dents plus fines (43 au plus), et 74 vertèbres; longueur des membres, environ  $\frac{1}{7}$  de celle de tout le squelette (*Clymene Burmeisteri* de Malm).
3. *P. euphrosynoides* (Gr.) m. Museau un peu plus court, dents fines, au nombre de 33—40, et 73 vertèbres; longueur des membres, environ  $\frac{1}{8}$  de celle de tout le squelette.
4. *P. clymene* (Gr.) m. Museau plus large, dents assez fines, au nombre de 36—40, et 74 vertèbres; longueur des membres, environ  $\frac{1}{8}$  de celle de tout le squelette.
5. *P. obscurus* (Gr.) m. Museau court, dents plus grosses, au nombre de 33 environ, et 70 vertèbres; membres courts, dont la longueur est contenue presque  $7\frac{1}{2}$  fois dans la longueur totale.

6. *P. Petersii* (Rhdt.). Museau lancéolé, dents assez espacées, au nombre de 30 environ, et 71 vertèbres; membres longs, dont la longueur dépasse  $\frac{1}{6}$  de la longueur totale.
7. *P. alope* (Gr.) m. Museau très long et effilé, dents plus grosses, au nombre de 40 environ, et 74—75 vertèbres; membres assez courts, dont la longueur est contenue 7—7 $\frac{1}{2}$  fois dans la longueur totale.
8. *P. attenuatus* (Gr.) m. Comme le *P. alope*, mais avec 79—81 vertèbres.
9. *P. longirostris* (Schl.). Museau très long et effilé, dents fines, au nombre de 40 environ, et 72 vertèbres; membres courts, dont la longueur est contenue plus de 7 fois dans la longueur totale (*P. roseiventris* Hombr. & Jacq.).
10. *P. Holballi* (Eschr.). Museau court et lancéolé, dents fines, au nombre de 50 environ, et 75 vertèbres; membres courts, dont la longueur est  $\frac{1}{8}$  de celle de tout le squelette.
11. *P. tethyos* (Gerv.). Museau lancéolé, dents plus grosses, au nombre de 40 environ, et 78—79 vertèbres; chez les jeunes individus, la longueur des membres est  $\frac{1}{7}$  de celle de tout le squelette (= *D. marginatus*).

La **carte I** fait voir, en tant qu'on possède des indications à ce sujet, où ont été pris, dans l'Atlantique, les dauphins pélagiques des genres *Steno*, *Delphinus* et *Prodelphinus* mentionnés dans ce mémoire. Bien que ce ne soit qu'une contribution modeste à la connaissance de la distribution des dauphins, cette carte pourra cependant servir à s'orienter dans les parages où ont été rencontrés les Odontocètes cités dans le mémoire.

<i>S. Steno rostratus.</i>	<i>P 4. Pr. obscurus.</i>
<i>D. Delphinus delphis.</i>	<i>P 5. Pr. alope.</i>
<i>P 1. Prodelphinus doris.</i>	<i>P 6. Pr. attenuatus.</i>
<i>P 2. Pr. euphrosyne.</i>	<i>P 7. Pr. tethyos.</i>
<i>P 3. Pr. euphrosynoïdes.</i>	

La **carte II** fait voir dans quelle partie de l'Atlantique les voyageurs et navigateurs nommés plus bas ont vu ou pris des dauphins, pendant les 8 voyages ci-dessous mentionnés. Le but en est de donner une image des faits recueillis concernant la présence des dauphins dans cette zone de l'Atlantique. Pour en profiter, il sera nécessaire d'avoir égard aux routes suivies par les navires à voiles. Les chiffres (1—8) se réfèrent aux routes indiquées ci-après, et n'apprennent par conséquent rien relativement à la distribution des différents genres ou espèces.

1. Andréa (1866), voyage à la Havane, aller et retour.
2. Warming, retour du Brésil.
3. Andréa (1863—64), voyage à Maurice, aller et retour.
4. Andréa (1865—66), voyage à Rio Janeiro, aller et retour.
5. Hygom (1863), voyage à Maruim (Brésil).

6. Hygom (1863—64), voyage à Maruim, aller et retour.
7. Andréa (1867), voyage à la Havane.
8. Reinhardt, voyage au Brésil.

On ne s'est pas attaché à marquer la position des localités avec une exactitude absolue, puisqu'il ne s'agit que d'un aperçu. Si les lieux où l'on trouve les dauphins sont si concentrés dans certaines régions, cela vient sans doute en partie de ce que les routes s'y croisent; mais on ne se trompe certainement pas en inférant de là que les dauphins sont très fréquents dans la zone de l'Atlantique située à l'ouest de la France et de la presqu'île ibérique.

La planche lithographiée donne une reproduction du squelette du *Steno rostratus*, exécutée d'après une photographie, et une représentation approximative de l'extérieur de ce dauphin, d'après une esquisse de la distribution des couleurs par le capitaine Andréa, et d'après ce que d'autres sources ont pu apprendre sur sa physionomie; mais elle ne peut prétendre dans les détails à une exactitude absolue.

Les dessins de têtes osseuses insérés dans le texte (p. 25, 36, 38, 39, 41, 42, 43, 46, 49 et 50) sont tous exécutés d'après des photographies et peuvent être regardés comme exacts dans leurs contours; ils ont surtout pour but de motiver la détermination des espèces à laquelle l'auteur s'est arrêté, mais en même temps de faciliter la détermination des crânes de dauphins dans d'autres collections. Les nombres qui les accompagnent correspondent aux numéros que les originaux portent au musée et dans les tableaux.

Pour ce qui regarde les quatre esquisses de la distribution des couleurs chez des dauphins, p. 17, 34 et 42, il est à observer que le contour qui les limite est un contour de dauphin idéal, auquel le *D. delphis* a servi de base, et qu'elles ont seulement pour but de fournir des éclaircissements sur la distribution des couleurs.

---



# De endelige Transformations-Grupper Theori.

Af

H. Valentiner.

---

Avec un résumé en français.

---

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og matematisk Afd. V. 2.

---

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1889.





## Indholdsfortegnelse.

---

Indledning . . . . .	S.	5-67.
I. Almindelige Bemærkninger. Multiplikatorer . . . . .	-	10-72.
II. Transformationernes Sammensætning . . . . .	-	27-89.
III. De endelige Grupper hvorved en ret Linie transformeres til sig selv . . . . .	-	38-100.
IV. De endelige Transformationsgrupper, hvorved et Plan transformeres til sig selv (de endelige Transformationsgrupper for to Variable) . . . . .	-	68-130.
Résumé . . . . .	-	143-205

---



## Indledning.

---

Nærværende Afhandling er fremkaldt ved den af Videnskabernes Selskab 1884 stillede og 1886 gjentagne Prisopgave, og indleveret som Besvarelse af denne 1887. Denne Besvarelse var imidlertid paa Grund af en i sidste Afsnit indløbet Fejl ufuldstændig, og det blev nødvendigt at omarbejde hele dette Afsnit. Ved nøjere Gjennemsyn fandt jeg imidlertid, at heller ikke de første Afsnit tilfredsstillede mig, saa at, uagtet Videnskabernes Selskab havde tilstedet mig Optagelsen af disse i sine Skrifter, disse nu ogsaa bleve fuldstændigt omarbejdede, og det hele Arbejde saaledes fremtræder i en ny Skikkelse. Imidlertid har jeg søgt at bevare saa meget som muligt af det oprindelige Arbejde.

Det havde været min Hensigt at fremstille alle endelige Transformations-Grupper for Planet og for Rummet.

Det er imidlertid ikke lykkedes mig at naa videre end til en, som jeg haaber, fuldstændig Fremstilling af alle de endelige Transformations-Grupper for Planet. De samme Principper, som her ere anvendte for at fremstille alle de Grupper, der ere endelige for Planet, maatte ogsaa kunne anvendes for Rummet. Imidlertid er Theorien, trods sin Simpelhed i Princippet, saa vanskelig at anvende selv for Planets Vedkommende, at jeg antager, det næsten vil være uoverkommeligt at anvende den paa Rummet, hvor der for øvrigt vilde komme nye Vanskeligheder til, der endnu ikke optræde ved Bestemmelsen af Grupperne for den rette Linie eller Planet.

Foruden at bestemme de endelige Grupper for Linien og Planet, har jeg givet en Fremstilling af den almindelige Form en Transformation maa have, naar den hører til en endelig eller diskontinuert Gruppe og transformerer en  $n$ -dobbel- $\infty$  Punktmængde til sig selv.

De endelige Grupperes Theori er for den rette Linies Vedkommende for lang Tid siden givet af Klein, men, saa vidt jeg ved, aldrig før fremstillet, uden at være støttet paa rumgeometriske Betragtninger. I denne Afhandling fremstilles den i Fuldstændighed alene støttet paa algebraiske Betragtninger.

Hører der til en Gruppe en Transformation  $A$ , og er  $B$  en vilkaarlig Transformation i Gruppen, og dannes alle Transformationerne  $BAB^{-1}$ , idet for  $B$  efterhaanden sættes alle de til Gruppen hørende Transformationer, kalder jeg alle de saaledes fremkomne Transformationer for den til  $A$  hørende Samling.

Er  $A$  en Transformation, der ved at gjentages  $n$  Gange bliver identisk, kalder jeg den af  $n^{\text{te}}$  Orden, og alle de Transformationer der høre til samme Samling som  $A$  blive da af samme Orden. For den rette Linie gjælder følgende:

Enhver Transformation lader 2 Punkter af den rette Linie uforandrede, disse kaldes Transformationens Dobbelpunkter. Er der ingen Transformation af højere end  $n^{\text{te}}$  Orden, der har samme Doppelpunkter som  $A$ , vil den Samling, der hører til  $A$ , indeholde  $\frac{N}{n}$  Transformationer, naar  $n > 2$  og Gruppen i det hele indeholder  $N$  Transformationer.

Eftersom der saa gives eller ikke gives en anden Transformation i Gruppen, som ombytter  $A$ 's Dobbelpunkter, ville alle de Samlinger, der tilhøre  $A$  og dens Potenser udgjøre  $\frac{(n-1)N}{2n}$  eller  $\frac{(n-1)N}{n}$  Transformationer.

For at finde alle de endelige Grupper, hvis Transformationer transformere en ret Linie til sig selv, behøver man da kun at finde de positive hele Tal, som tilfredsstille Ligningen

$$N \Sigma \frac{n-1}{n} + N \Sigma \frac{n_1-1}{2n_1} + 1 = N$$

eller

$$\frac{1}{N} = 1 - \left( \Sigma \frac{n-1}{n} + \Sigma \frac{n_1-1}{2n_1} \right),$$

der fremkomme ved den Betragtning, at Gruppen foruden de Samlinger, der høre til den, endnu indeholder én Transformation: den identiske.

Det bemærkes dog, at ikke alle Tal, der tilfredsstille denne Ligning, give virkelig eksisterende Grupper.

Man ser, at Antallet af Transformationer i Grupper enten maa være det mindste fælles delelige Tal for Ordenen af de i Gruppen indgaaende Transformationer eller dette Tal multipliceret med 2.

Hvad Planen angaar, kunne her lignende Betragtninger anstilles som for den rette Linie, kun blive Forholdene her langt mere komplicerede, navnlig paa Grund af, at der kan optræde perspektiviske Transformationer.

Medens nemlig i Almindelighed enhver lineær Transformation, der transformerer Planen til sig selv, lader 3 Punkter af Planet (Transformationens Dobbelpunkter) blive uforandrede, eksisterer der Transformationer, der lade alle Punkter af en ret Linie uforandrede. Det er saadanne Transformationer, som kaldes perspektiviske.

De nye Vanskeligheder opstaa nu ved, at medens i Almindelighed Potenser af Transformationer med forskellige Dobbelpunkter atter ere forskellige, kan den samme perspektiviske Transformation være en Potens af flere Transformationer med forskellige Dobbelpunkter. Det vises nu først, at alle Transformationer, der fremkomme i en endelig Gruppe, kunne bringes paa en saadan Form, at, hvis

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

er en saadan Transformation, Transformationsdeterminanten

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1,$$

og at i denne Determinant ethvert Element ( $a_1$ ) er konjugeret med sin Underdeterminant ( $A_1$ ), saa at altsaa  $a_1 = \overline{A_1}$ .

Ved en cyklisk Gruppe forstaaes en Gruppe, hvis Transformationer alle enten lade Dobbelpunkterne for en bestemt Transformation uforandrede eller ombytter disse indbyrdes.

Det vises da, at hvis en endelig Gruppe for en Plan ikke skal være cyklisk eller saaledes beskaffen, at alle Transformationer i Gruppen transformere samme rette Linie til sig selv, kan Gruppen ikke indeholde perspektiviske Transformationer af højere end 2den Orden. (Enhver Transformation af 2den Orden er altid perspektivisk.)

Dernæst undersøges, hvor vidt Gruppen kan indeholde en perspektivisk Transformation, som er en Potens af flere Transformationer med forskellige Dobbelpunkter.

Det viser sig da, at der muligvis eksisterer en Gruppe paa 72 Transformationer, indeholdende Transformationer af 2den, 3die og 4de Orden, hvor Transformationerne af 4de Orden 6 og 6 have en fælles 2den Potens. Denne Gruppe vises siden virkeligt at existere.

Idet vi derpaa definere en Samling hørende til en Transformation  $A$  paa samme Maade som før, viser det sig, at de Samlinger som høre til alle de Transformationer, som have fælles Dobbelpunkter med  $A$ , indeholde

$$\frac{n-1}{n} N, \quad \frac{n-1}{2n} N, \quad \frac{n-1}{3n} N$$

Transformationer, naar der er  $n$  Transformationer, der have fælles Dobbelpunkter, og naar ikke 2 Transformationer med forskellige Dobbelpunkter have en fælles Potens, idet  $N$  er Antallet af Transformationer i Gruppen. De tre Antal faaes, eftersom der ikke gives nogen Transformation i Gruppen, der ombytter Dobbelpunkterne for  $A$ , eller der gives en Transformation, der ombytter 2 af dem, eller endelig en Transformation, der kredsforskyder Dobbelpunkterne.

Dette sidste finder kun Sted, naar Ordenen af  $A$  indeholder Faktorerne 2, 3 eller Primtal af Formen  $3p + 1$ .

Er Ordenen af  $A$  3, kan der være baade en Transformation i Gruppen, der kredsfor-  
 skyder  $A$ 's Dobbelpunkter, og en anden, der kun ombytter to af dem; forudsat at ingen  
 Transformation af en anden Orden end 3 har samme Dobbelpunkter som  $A$ .

Antallet af Transformationer i de Samlinger, der tilhøre  $A$  og dens Potenser,  
 blive i dette Tilfælde  $\frac{N}{9}$ .

Vi have da til Bestemmelse af de mulige endelige Grupper:

$$N \Sigma \frac{n-1}{n} + N \Sigma \frac{n_1-1}{2n_1} + N \Sigma \frac{n_2-1}{3n_2} + \frac{q}{9} N + 1 = N$$

eller

$$\frac{1}{N} = 1 - \Sigma \frac{n-1}{n} - \Sigma \frac{n_1-1}{2n_1} - \Sigma \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{q}{9},$$

hvor ligesom før alle de Tal, der tilfredsstillte denne Ligning, ikke svare til virkelig  
 eksisterende endelige Grupper; men hvor et meget stort Antal Værdier, der tilfredsstillte  
 denne Ligning, maa forkastes.

Antallet af Transformationer i de virkelig eksisterende Grupper  
 ses at maatte blive enten det mindste fælles delelige Tal for Ordenen af  
 de i Gruppen indgaaende Transformationer, eller dette Tal multipliceret  
 med 2, 3 eller 6.

Til Hjælp ved Dannelsen af Grupperne faar man, at enhver Transformation af  
 2den Orden, som hører til en endelig Gruppe, hvis Transformationer ere bragte paa samme  
 Form som  $A$  (S. 69), maa have Elementerne svarende til  $a_1, b_2, c_3$  (Diagonalelementerne) reelle.

Kaldes  $a_1 + b_2 + c_3 = s$  Diagonalsummen for  $A$  og indeholder Gruppen en anden  
 Transformation  $B$ , hvis Diagonalsum er  $d$ , og kaldes Diagonalsummen for  $B^p A$   $s_p$ , faar  
 man Relationen:

$$s_p - s_{p+3} = \bar{d} s_{p+1} - d s_{p+2}.$$

Det kan endelig vises, at de endelige Grupper, som ikke ere cykliske, eller hvis  
 Transformationer alle transformere samme rette Linie til sig selv, eller endelig indeholde  
 Transformationer med forskellige Dobbelpunkter, men en fælles Potens, ere:

1) Grupper, hvis Transformationer alle transformere samme  
 Keglesnit til sig selv.

Disse kunne betragtes som Transformationer af Grupperne for den rette Linie, og  
 jeg benævner disse med samme Navne som de tilsvarende Grupper for den rette Linie.

2) En Gruppe indeholdende 36 Transformationer af 2den, 3die og 4de  
 Orden. Denne er Undergruppe i den S. 69 nævnte Gruppe paa 72 Trans-  
 formationer.

3) En Gruppe paa 360 Transformationer indeholdende Transformationer af 2den, 3die, 4de og 5te Orden.

I denne vil Ikosaedergruppen danne en Undergruppe.

4) En Gruppe paa 168 Transformationer af 2den, 3die, 4de og 7de Orden.

Endelig skal jeg omtale, at mine Undersøgelser i første Afsnit ogsaa kunne anvendes paa diskontinuerte Grupper, og at de netop oprindeligt have gaaet ud paa at omsætte Poincarés geometriske Betragtninger til rent algebraiske.

Mine Beviser for Gruppernes Endelighed ere af temmelig forskjellig Beskaffenhed, idet de ere forfattede til højst forskjellige Tider, og jeg ikke har villet omarbejde mine oprindelige Beviser, saa at de bleve ensartede med de senere tilføjede, der væsentlig ere af samme Art som W. Dyck's for lignende Sætninger; medens det, (saaledes for den 3die Gruppe) vilde være meget vanskeligt at føre Beviset, saaledes som mine ældre Beviser ere førte, ved Multiplikation af selve Transformationsdeterminanterne.

## I. Almindelige Bemærkninger.

### Multiplikatorer.

1) Naar der her er Tale om Transformationer, menes hermed kun lineære Transformationer.

En saadan Transformation af en  $n$ -dobbel- $\infty$  Mangfoldighed er bestemt ved Ligningerne:

$$\left. \begin{aligned} \mu x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \dots l_1 v, \\ \mu y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \dots l_2 v, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mu v' &= a_{n+1} x + b_{n+1} y + c_{n+1} z \dots l_{n+1} v, \end{aligned} \right\} (1)$$

hvor  $x:y:z \dots v$  ere det givne Punkts Koordinater,  $x':y':z' \dots v'$  det transformerede Punkts Koordinater, og hvor vi tilmed kunne sørge for, at Transformationsdeterminanten

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} & \dots & l_{n+1} \end{vmatrix} = 1,$$

hvad der kan ske uden at formindske Transformationens Almindelighed, og hvor endda i samme Transformation alle Størrelserne  $a_1, b_1, c_1 \dots$  o. s. v. kun ere bestemte paa nær en fælles Faktor, der er en vilkaarlig  $(n+1)$ te Rod af Enheden.

Der gives nu altid Punkter, der transformeres til sig selv. Saadanne Punkter kaldes Dobbelpunkter for Transformationen. For et saadant Punkt maa vi da have

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} \dots = \frac{v'}{v},$$

eller vi kunne for et saadant Punkt sætte

$$x' = x, y' = y, z' = z \dots v' = v.$$

Skal dette finde Sted, bestemmes  $\mu$  ved

$$\left. \begin{vmatrix} a_1 - \mu & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 - \mu & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} & \dots & l_{n+1} - \mu \end{vmatrix} = 0, \right\} (2)$$



idet man mellem de  $(n + 1)$  Transformationsligninger (1) eliminerer  $x, y, z \dots v$ . Har man bestemt  $\mu$  ved (2), bestemmes selve Koordinaterne til det til  $\mu$  svarende Dobbelt punkt ved  $n$  af Ligningerne (1).

2) Af (2) faar man  $(n + 1)$  Værdier af  $\mu$ . Ere alle disse Værdier af  $\mu$  forskellige, faar man ogsaa netop  $(n + 1)$  Dobbelt punkter, hvoraf ikke 2 kunne falde sammen.

Skulde der nemlig være flere end  $(n + 1)$  Dobbelt punkter, maatte 1 af  $n$  vilkaarlige Ligninger mellem de  $(n + 1)$  Ligninger (1) være en Følge af de andre, for i det mindste én Værdi af  $\mu$ . Men dette kræver, at alle Underdeterminanterne af  $n$ te Orden i (2) skulle være 0. (2) maatte da have lige Rødder, hvad der strider mod det givne.

Paa den anden Side ses det, at der ikke til 2 Værdier af  $\mu$  kunde svare det samme Dobbelt punkt. Thi vare disse Værdier  $\mu$  og  $\mu'$ , maatte man have ifølge (1), naar  $x, y, z \dots$  ere dette Dobbelt punkts Koordinater,

$$\begin{aligned} (a_1 - \mu)x + b_1y \dots l_1v &= 0, \\ (a_1 - \mu')x + b_1y \dots l_1v &= 0, \end{aligned}$$

og ved Subtraktion

$$(a - \mu')x = 0, \quad x = 0,$$

og paa samme Maade  $y = 0, z = 0 \dots v = 0$ , hvad der er en Umulighed, da Ligningerne (1) ikke bestemme selve Størrelserne  $x, y, z \dots v$ , men kun deres Forhold.

3) Kaldes alle de Punkter, hvis Koordinater tilfredsstille Ligningen

$$Xx + Yy \dots Vv = 0, \tag{3}$$

et Plan, idet  $X, Y \dots V$  ere givne Størrelser, er et Plan i Almindelighed bestemt ved at skulle gaa gennem  $n$  Punkter. Det ses, at et Plan altid ved (1) igjen transformeres til et Plan. Betegnes Underdeterminanterne i  $D$  til  $a_1, b_1, c_1 \dots A_1, B_1, C_1 \dots$  o. s. v., saa faar man af (1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu}x &= A_1x' + A_2y' \dots A_{n+1}v', \\ \frac{1}{\mu}y &= B_1x' + B_2y' \dots B_{n+1}v', \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{1}{\mu}v &= L_1x' + L_2y' \dots L_{n+1}v'. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Kaldes  $X:Y:Z: \dots$  o. s. v. Plankoordinaterne til (3), bliver (3) ved (1) transformeret til et nyt Plan, hvis Plankoordinater ere bestemte ved

$$\left. \begin{aligned} \mu' X' &= A_1 X + B_1 Y \dots L_1 V, \\ \mu' Y' &= A_2 X + B_2 Y \dots L_2 V, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mu' V' &= A_{n+1} X + B_{n+1} Y \dots L_{n+1} V. \end{aligned} \right\} (5)$$

Altsaa blive Plankoordinaterne transformerede ved en Transformation, hvis Koefficienter ere Underdeterminanterne i  $D$  til dens Elementer.

Ved et Dobbeltplan forstaa vi et Plan, der transformeres til sig selv. For et saadant Plan kunne vi (analogt med hvad vi gjorde før) sætte  $X' = X$ ,  $Y' = Y \dots$  o. s. v. Vi se da, at naar dette skal finde Sted, bestemmes  $\mu'$  ved Ligningen

$$\left. \begin{aligned} A_1 - \mu', B_1, C_1 \dots L_1 \\ A_2, B_2 - \mu', C_2 \dots L_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} \dots L_{n+1} - \mu' \end{aligned} \right\} = 0, \quad (6)$$

og at denne Ligning, da  $D = 1$ , er den reciproke til (3), d. v. s. har de reciproke Rødder.

Ligesom før ses det da, at Transformationen har  $(n + 1)$  Dobbeltplaner, hvoraf ikke 2 kunne falde sammen, naar Rødderne i (2) alle ere forskellige.

Det ses tillige, at naar man kjender Koordinaterne til et Dobbeltpunkt for Transformationen (1), faas Plankoordinaterne til et Dobbeltplan, naar man ombytter Elementerne  $a_1, b_1 \dots$  med deres Underdeterminanter i  $D$  og for  $\mu$  sætter  $\frac{1}{\mu}$ .

Til hvert Dobbeltpunkt i Transformationen svarer saaledes et Dobbeltplan.

4) Vi skulle nu vise, at naar man lader et Dobbeltpunkt og et Dobbeltplan svare til hinanden paa den i det foregaaende beskrevne Maade, vil ethvert Dobbeltplan gaa gennem alle de øvrige Dobbeltpunkter, idet vi antage alle Rødderne i (2) forskellige.

Kalde vi nemlig Dobbeltpunkternes Koordinater

$$\begin{aligned} x_1, y_1, z_1 \dots v_1, \\ x_2, y_2, z_2 \dots v_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1} \dots v_{n+1}, \end{aligned}$$

de tilsvarende Værdier af  $\mu$

$$\mu_1, \mu_2 \dots \mu_{n+1}$$

og de tilsvarende Plankoordinater for Dobbeltplanerne

$$\begin{array}{cccc}
 X_1, & Y_1, & Z_1 & \dots V_1, \\
 X_2, & Y_2, & Z_2 & \dots V_2, \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 X_{n+1}, & Y_{n+1}, & Z_{n+1} & \dots V_{n+1},
 \end{array}$$

saa har man, at Dobbeltpunktet  $x_k, y_k \dots v_k$  og det tilsvarende Dobbeltplan ere bestemte ved

$$\left. \begin{array}{l}
 \mu_k x_k = a_1 x_k + b_1 y_k + c_1 z_k \dots l_1 v_k \\
 \mu_k y_k = a_2 x_k + b_2 y_k + c_2 z_k \dots l_2 v_k \\
 \dots \\
 \mu_k v_k = a_{n+1} x_k + b_{n+1} y_k + c_{n+1} z_k \dots l_{n+1} v_k
 \end{array} \right\} (7)$$

og

$$\left. \begin{array}{l}
 \frac{1}{\mu_k} X_k = A_1 X_k + B_1 Y_k + C_1 Z_k \dots L_1 V_k, \\
 \frac{1}{\mu_k} Y_k = A_2 X_k + B_2 Y_k + C_2 Z_k \dots L_2 V_k, \\
 \dots \\
 \frac{1}{\mu_k} V_k = A_{n+1} X_k + B_{n+1} Y_k + C_{n+1} Z_k \dots L_{n+1} V_k.
 \end{array} \right\} (8)$$

Nu ses det for det første, at man ikke kan have, at der mellem Koordinaterne til  $r$  vilkaarlige Dobbeltpunkter

$$\begin{array}{l}
 x_1, y_1, z_1 \dots v_1, \\
 x_2, y_2, z_2 \dots v_2, \\
 \dots \\
 x_r, y_r, z_r \dots v_r,
 \end{array}$$

bestaar Ligninger af Formen

$$\left. \begin{array}{l}
 a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots a_r x_r = 0, \\
 a_1 y_1 + a_2 y_2 \dots a_r y_r = 0, \\
 \dots \\
 a_1 v_1 + a_2 v_2 \dots a_r v_r = 0.
 \end{array} \right\} (9)$$

Multipliserer man nemlig den øverste Ligning (9) med  $a_1$ , den næste med  $b_1$ , den næste med  $c_1$  o. s. v., den sidste med  $l_1$  og adderer, faar man

$$a_1 \mu_1 x_1 + a_2 \mu_2 x_2 \dots a_r \mu_r x_r = 0.$$

Eliminerer man nu mellem denne Ligning og den øverste (9)  $x_r$ , faar man

$$a_1 (\mu_1 - \mu_r) x_1 + a_2 (\mu_2 - \mu_r) x_2 \dots a_{r-1} (\mu_{r-1} - \mu_r) x_{r-1} = 0.$$



$$\left. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccc} x, & y, & z & \dots & v \\ x_1, & y_1, & z_1 & \dots & v_1 \\ x_2, & y_2, & z_1 & \dots & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n, & y_n, & z_n & \dots & v_n \end{array} \right| \\ \\ \\ \end{array} \right\} = 0. \tag{11}$$

Benævnes Underdeterminanterne til Elementerne i (11) med tilsvarende store Bogstaver, ere Plankoordinaterne for Planet (11)  $X:Y:\dots V$ ; og om disse kan det vises, at de tilfredsstille de samme Ligninger, hvorved Plankoordinaterne til det omtalte Dobbeltplan ere bestemte. Man har nemlig

$$\begin{aligned} X &= \begin{vmatrix} y_1, & z_1 & \dots & v_1 \\ y_2, & z_2 & \dots & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n, & z_n & \dots & v_n \end{vmatrix}, \\ \frac{1}{\mu_{n+1}} X &= \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n X \\ &= \begin{vmatrix} \mu_1 y_1, & \mu_1 z_1 & \dots & \mu_1 v_1 \\ \mu_2 y_2, & \mu_2 z_2 & \dots & \mu_2 v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n y_n, & \mu_n z_n & \dots & \mu_n v_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 x_1 + b_2 y_1 & \dots & l_2 v_1, & a_3 x_1 + b_3 y_1 & \dots & l_3 v_1 & \dots & a_{n+1} x_1 + b_{n+1} y_1 & \dots & l_{n+1} v_1 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 & \dots & l_2 v_2, & a_3 x_2 + b_3 y_2 & \dots & l_3 v_2 & \dots & a_{n+1} x_2 + b_{n+1} y_2 & \dots & l_{n+1} v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 x_n + b_2 y_n & \dots & l_n v_n, & a_3 x_n + b_3 y_n & \dots & l_3 v_n & \dots & a_{n+1} x_n + b_{n+1} y_n & \dots & l_{n+1} v_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}, & b_{n+1}, & c_{n+1} & \dots & l_{n+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 & \dots & L_1 \\ x_1, & y_1, & z_1 & \dots & v_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 & \dots & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n, & y_n, & z_n & \dots & v_n \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

hvor Rigtigheden af det sidste ses ved atter at udføre Multiplikationen; men da den første af disse Determinanter er 1, ses det umiddelbart, at man har

$$\frac{1}{\mu_{n+1}} X = A_1 X + B_1 Y \dots L_1 V.$$

Paa samme Maade ses det, at man har

$$\frac{1}{\mu_{n+1}} Y = A_2 X + B_2 Y + C_2 Z \dots L_2 V$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{\mu_{n+1}} V = A_{n+1} X + B_{n+1} Y + C_{n+1} Z \dots L_{n+1} V.$$

Sammenligner man nu disse Ligninger med (8), idet man for  $k$  sætter  $n+1$ , ses det, at disse Ligninger falde sammen, naar man for  $X$  sætter  $X_{n+1}$  for  $Y$   $Y_{n+1}$  o. s. v. Herved er da bevist, at det omtalte Plan svarer til  $\mu_{n+1}$ . Vi se altsaa, at ethvert Dobbeltplan gaar gjennem alle Dobbeltpunkterne med Undtagelse af dets tilsvarende Dobbeltpunkt.

Paa samme Maade kan naturligvis vises, at ethvert Dobbeltpunkt ligger paa alle Dobbeltplanerne med Undtagelse af dets tilsvarende Dobbeltplan.

5) Lad os stadigt antage, at alle Rødderne i (2) ere forskellige for Transformationen (1), og at Dobbeltplanernes Ligninger ere

$$P_1 \equiv X_1 x + Y_1 y \dots V_1 v = 0,$$

$$P_2 \equiv X_2 x + Y_2 y \dots V_2 v = 0,$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$P_{n+1} \equiv X_{n+1} x + Y_{n+1} y \dots V_{n+1} v = 0,$$

saa maa man altid kunne skrive Transformationsligningerne under Formen

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 P'_1 &= \alpha P_1, \\ \mu_1 P'_2 &= \beta P_2, \\ \dots &\dots \\ \mu_1 P'_{n+1} &= \lambda P_{n+1}, \end{aligned} \right\} (12)$$

hvor  $\alpha, \beta, \gamma \dots \lambda$  ere Konstanter, og hvor  $P'_1, P'_2 \dots P'_{n+1}$  betyde Former, der faas af  $P_1, P_2 \dots P_{n+1}$  ved for  $x, y, z \dots$  at sætte  $x', y', z' \dots$ . Om Konstanterne  $\alpha, \beta, \gamma \dots \lambda$  kunne vi antage, at deres Produkt er 1. Disse Konstanter kaldes Transformationens Multiplikatorer. Det er klart, at man altid kan skrive Transformationen (1) under Formen (12). Thi for det første bestemmer (12) en lineær Transformation af samme Form som (1), da vi ved at løse Ligningerne m. H. t.  $\mu_1 x', \mu_1 y', \mu_1 z' \dots \mu_1 v'$  faa disse udtrykte ved lineære Funktioner af  $x, y, z \dots v$  med konstante Koefficienter.

Dernæst ses det, at hvis vi i

$$\mu P'_1 = \mu(X_1 x' + Y_1 y' \dots + V_1 v')$$

for  $\mu x', \mu y' \dots \mu v'$  sætte Udtrykkene i (1), faa vi

$$\mu P_1' = P,$$

hvor  $P$  er en lineær Funktion af  $x, y, z \dots v$ . Lad os antage

$$P = ax + by \dots lv,$$

saa kunne vi sætte; hvis  $X_1$  ikke er 0, (og ellers kan en anden af Koefficienterne i  $P$  benyttes paa samme Maade),

$$P = \frac{a}{X_1} P_1 + Q,$$

hvor  $Q$  er en Størrelse, der ikke indeholder  $x$ . Man har da

$$\mu P_1' = \frac{a}{X_1} P_1 + Q,$$

og, da  $Q$  skal være 0 for alle de Værdier af  $x, y, z \dots v$ , der gjøre  $P_1$  til 0 og dens Koefficienter ikke kunne være proportionale med  $P_1$ 's Koefficienter, da den mangler Leddet indeholdende  $x$ , maa alle dens Koefficienter være 0.

Vi have saaledes fundet

$$\begin{aligned} \mu P_1' &= k_1 P_1, \\ \mu P_2' &= k_2 P_2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mu P_{n+1}' &= k_{n+1} P_{n+1}, \end{aligned}$$

hvor  $k_1, k_2 \dots k_n$  ere Konstanter. Satte vi her  $\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{k_1, k_2 \dots k_{n+1}}}$ , faa vi Ligningerne paa Formen (12).

Det ses da, at Multiplikatorerne kun ere bestemte paa en Faktor nær, der er en vilkaarlig  $(n+1)$ te Rod af Enheden.

6) Da Multiplikatorerne ere af stor Betydning for de endelige og diskontinuerte Grupper's Theori, skulle vi se at finde disse Størrelser, naar Transformationen er givet ved Ligningerne (1). (12) skal være ekvivalent med (1). Vi maa derfor komme tilbage til Ligningerne (1), naar vi løse Ligningerne (12) m. H. t.  $\mu_1 x', \mu_1 y', \mu_1 z'$  o. s. v.

Men herved faar man Udtryk af Formen

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 x' &= Q_1 \\ \mu_1 y' &= Q_2 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mu_1 v' &= Q_{n+1}, \end{aligned} \right\} (13)$$

hvor  $Q_1, Q_2 \dots Q_{n+1}$  ere lineære Funktioner af  $x, y, z \dots$ . Skulle altsaa (13) og (1) være identiske, maa  $\mu_1$  og  $\mu$  kun være forskjellige ved en konstant Faktor, eller vi have

$$\mu = k \mu_1, \tag{14}$$

hvor  $k$  er en Konstant. Nu kunne vi sætte  $P_1 = P_2 \dots = P_n = 0$ , da er det Punkt, som er bestemt herved, et Dobbelpunkt, hvis tilsvarende Dobbeltplan er  $P_{n+1} = 0$ . Vi kunne nu for dette Punkt sætte

$$x' = x, \quad y' = y \quad \dots \quad v' = v.$$

Den hertil svarende Værdi af  $\mu$  er en af Rødderne i (2), medens Værdien af  $\mu_1$  er  $\lambda$ .

Vi have da, at  $k\lambda$  er en Rod i Ligningen (2). Hvad der gjælder om  $\lambda$ , gjælder selvfølgelig ogsaa om alle de andre Multiplikatorer. Det gjælder da kun om at bestemme Værdien af  $k$ . Det Led, der ikke indeholder  $\mu$  i (2), er imidlertid  $\pm 1$ , medens Koefficienten til  $\mu^{n+1}$  er 1, vi have derfor i alle Tilfælde

$$a \cdot \beta \cdot \gamma \dots \lambda k^{n+1} = 1,$$

og da

$$a\beta \cdot \gamma \dots \lambda = 1,$$

$$k^{n+1} = 1,$$

saa at  $k$  er en  $(n+1)$ te Rod af Enheden. Multiplikatorerne ere imidlertid kun bestemte paa en Faktor nær, der er en  $(n+1)$ te Rod af Enheden. Vi kunne derfor vælge Multiplikatorerne saaledes, at  $k = 1$ .

Er en Transformation givet ved Ligningerne

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\mu x' = a_1 x + b_1 y \dots l_1 v,} \\ \underline{\mu y' = a_2 x + b_2 y \dots l_2 v,} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \underline{\mu v' = a_{n+1} x + b_{n+1} y \dots l_{n+1} v,} \end{array} \right\} (15)$$

hvor Transformationsdeterminanten er 1, saa ere Transformationens Multiplikatorer Rødder i Ligningen

$$\begin{vmatrix} a_1 - \mu, & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2, & b_2 - \mu & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}, & b_{n+1} & \dots & l_{n+1} - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

forudsat, at Rødderne i denne Ligning alle ere forskellige.

7) Naar en Transformation ved at ophøjes til  $m$ te Potens bliver identisk, siges den at være af  $m$ te Orden, forudsat, at den ikke bliver identisk ved at ophøjes til en lavere Potens.

Kan Transformationen skrives under Formen (12), er Betingelsen for, at den er af  $m$ te Orden, at vi have

$$a^m = \beta^m \dots = \lambda^m,$$

og at ikke lignende Ligninger finde Sted, naar vi for  $m$  sætte  $p$ ,  $p < m$ .



Da

$$\alpha^m \beta^m \dots \lambda^m = 1,$$

er

$$\alpha^m = \beta^m \dots = \lambda^m = \theta,$$

hvor  $\theta$  er en  $(n+1)$ te Rod af Enheden. Er  $m$  og  $n+1$  primiske, maa man da have

$$\alpha = \sqrt[m]{1} \cdot \sqrt[n+1]{1},$$

og da  $\alpha$  kun er bestemt paa en  $(n+1)$ te Rod af Enheden nær, kan man da lade  $\alpha$  være en  $m$ te Rod af Enheden, i hvilket Tilfælde

$$\alpha^m = \beta^m \dots \lambda^m = 1.$$

Hvis altsaa  $m$  og  $(n+1)$  ere primiske, kan man sige, at Transformationen er af  $m$ te Orden, hvis alle Multiplikatorerne ere primiske Rødder af Enheden, hvor det mindste fælles Multiplum for Rodexponenterne er  $m$ .

Er  $m$  og  $(n+1)$  ikke primiske, og man har

$$\begin{aligned} m &= p \cdot q_1^{r_1} q_2^{r_2} \dots \\ n+1 &= p_1 q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots, \end{aligned}$$

hvor  $p, p_1, q_1, q_2 \dots$  o. s. v. ere indbyrdes primiske Tal, saa er den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at Transformationen er af  $m$ te Orden, som før sagt, at  $m$  er det laveste Tal for hvilket

$$\alpha^m = \beta^m \dots \lambda^m = \theta,$$

hvor  $\theta$  er en  $(n+1)$ te Rod af Enheden. Sætte vi

$$\theta = \varphi \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 \dots,$$

hvor  $\varphi$  er en  $p_1$ te Rod,  $\theta_1$  en  $q_1^{s_1}$ te Rod,  $\theta_2$  en  $q_2^{s_2}$ te Rod o. s. v., have vi

$$\alpha = \varphi \cdot \phi \cdot \theta_1^{\frac{1}{q_1^{r_1}}} \theta_2^{\frac{1}{q_2^{r_2}}} \dots,$$

hvor  $\phi$  er en  $p$ de Rod af Enheden.

Vi kunne her gjerne antage  $\varphi = 1$ , da vi vilkaarligt kunne multiplicere alle Multiplikatorerne med en  $(n+1)$ te Rod af Enheden.

Da man skal have

$$\beta = \sqrt[m]{\theta},$$

hvor  $\beta$  er en ny  $m$ te Rod af  $\theta$ , og denne faas af den foregaaende, ved at multiplicere den med en  $m$ te Rod af Enheden (idet alle  $m$ te Rødder af en Størrelse faas ved at multiplicere én  $m$ te Rod med de forskjellige Værdier for en  $m$ te Rod af Enheden), ses det, at Multiplikatorerne i dette Tilfælde have Formen

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \left( \theta_1 \frac{1}{q_1^{r_1}} \theta_2 \frac{1}{q_2^{r_2}} \dots \right) \alpha_1 = \chi \alpha_1 \\
 \beta &= \dots = \chi \beta_1 \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \lambda &= \dots = \chi \lambda_1,
 \end{aligned}$$

hvor  $\chi$  er en  $q_1^{r_1+s} q_2^{r_2+s_2}$ te ... Rod af Enheden;  $\alpha_1, \beta_1 \dots$  ere  $m$ te Rødder af Enheden.

8) Vi have hidtil behandlet Transformationerne under den Forudsætning, at alle Rødderne i (2) vare ulige store. Antages Rødderne at være lige store, vil, hvad der er sagt i det foregaaende, kun til Dels gjælde.

Det ses saaledes, at hvis (2) kun har  $p$  ulige store Rødder,  $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_p$  ( $p < n + 1$ ), vil Transformationen (1) have mindst  $p$  forskjellige Dobbelpunkter, og ligeledes  $p$  forskjellige Dobbeltplaner, svarende til de forskjellige Værdier af  $\mu$  (Multiplikatorer), samt at der ikke mellem Koordinaterne til  $k$  saadanne Dobbelpunkter (eller Dobbeltplaner) mellem de  $p$ , svarende til forskjellige Værdier af  $\mu$ , kan finde Ligninger Sted af Formen (9).

Beviset herfor føres, ligesom naar alle Rødderne i (2) ere forskjellige. Derimod kan der godt til samme Værdi af  $\mu$  svare flere Dobbelpunkter, saafremt  $\mu$  er en lige Rod i (2) (smlgn. 2)), og det er ikke sagt, at man altid kan bringe Transformationerne paa Formen (12).

Vi skulle nu, naar (2) har lige Rødder, særligt undersøge, hvornaar Transformationen ved Gjntagelse kan blive identisk.

Vi kunne tænke os, at venstre Side af ét af Dobbeltplanernes Ligninger er

$$P_1 \equiv X_1 x + Y_1 y \dots V_1 v, \tag{16}$$

saa faar man, idet  $P'_1$  betegner den Størrelse, hvortil  $P_1$  transformeres, naar  $x, y, z \dots$  erstattes ved  $x', y', z' \dots$

$$\mu P'_1 = \alpha P_1, \tag{17}$$

hvad der ses paa samme Maade som i 5).

Vi kunne nu erstatte en af Transformationsligningerne (1) ved (17), og overalt for  $x$  sætte dets Værdi funden af (16), saa faa vi

$$\left. \begin{aligned}
 \mu P'_1 &= \alpha P_1 \\
 \mu y' &= a'_2 P_1 + b'_2 y \dots l'_2 v \\
 \mu z' &= a'_3 P_1 + b'_3 y \dots l'_3 v \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \mu v' &= a'_{n+1} P_1 + b'_{n+1} y \dots l'_{n+1} v.
 \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

Betragte vi nu Systemet af Transformationsligninger

$$\left. \begin{aligned} \mu y' &= b'_2 y \dots l'_2 v \\ \mu z' &= b'_3 y \dots l'_3 v \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \mu v' &= b'_{n+1} y \dots l'_{n+1} v \end{aligned} \right\} (19)$$

og antage, at venstre Side af et Dobbeltplan for denne Transformation er Ligningen for

$$P_2 \equiv Y_2 y \dots V_2 v, \quad (20)$$

samt at

$$\mu P'_2 = \beta P_2,$$

hvor  $P'_2$  er fremkommet ved at transformere  $P_2$  ved (19), ligesom før  $P_1$  ved (1), saa er det let at se, at man i Systemet (18) vil have

$$\mu P'_2 = a''_2 P_1 + \beta P_2.$$

Lade vi nu denne Ligning træde i Stedet for den 2den Ligning (18) og indsætte overalt i (18)  $y$  fundet af (20), vil (18) faa Formen

$$\left. \begin{aligned} \mu P_1 &= a P_1 \\ \mu P_2 &= a''_2 P_1 + \beta P_2 \\ \mu z' &= a''_3 P_1 + b''_3 P_2 \dots l''_3 v \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \mu v' &= a''_{n+1} P_1 + b''_{n+1} P_2 \dots l''_{n+1} v. \end{aligned} \right\} (21)$$

Fortsætte vi paa samme Maade se vi tilsidst, at vi, hvorledes Rødderne i (2) end ere beskafne, altid kunne bringe (1) paa Formen

$$A \equiv \left\{ \begin{aligned} \mu P'_1 &= a P_1 \\ \mu P'_2 &= a_2 P_1 + \beta P_2 \\ \mu P'_3 &= a_3 P_1 + \beta_3 P_2 + \gamma P_3 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \mu P'_{n+1} &= a_{n+1} P_1 + \beta_{n+1} P_2 \dots \lambda P_{n+1}. \end{aligned} \right\} (22)$$

Da man, naar

$$x' = x, \quad y' = y, \quad \dots \quad v' = v,$$

ogsaa maa have

$$P_1 = P'_1, \quad P_2 = P'_2 \dots P_{n+1} = P'_{n+1},$$

og de hertil svarende Værdier af  $\mu$  ere bestemte ved

$$\left. \begin{aligned} \left| \begin{array}{cccc} a - \mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & \beta - \mu & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma - \mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & \beta_{n+1} & \gamma_{n+1} & \dots & \lambda - \mu \end{array} \right| &= & \dots \end{aligned} \right\} (23)$$

$(a - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu) \dots (\lambda - \mu) = 0$ , ser man, at  $a, \beta, \gamma \dots \lambda$  ere Rødderne i (2).

Det ses umiddelbart, at  $P_1 = 0$  er det Dobbeltplan, der svarer til  $a$ , idet den 1ste Ligning (22) netop angiver, at ved (22) transformeres Plankoordinaterne for  $P_1 = 0$  saaledes, at de oprindelige og de transformerede Plankoordinater blive identiske naar  $\mu = a$  (smlgn. 3).

Paa lignende Maade ses, at  $P_2 = 0$  er et i Systemet (19) til  $\beta$  svarende Dobbeltplan, idet her anvendes lignende let forstaaelige Betegnelser for de forskjellige Systemer, uagtet Transformationsdeterminanten for saadanne Systemer som (19) ikke behøver at være 1.

Det ses ogsaa, at de Værdier af  $\mu$ , der gjøre  $y' = y, z' = z \dots v' = v$  i Systemet (19), ere de øvrige Rødder i (2) med Undtagelse af  $a$ .

Vi kunne nu betragte Transformationen (1), for det Tilfælde, at (2) har lige Rødder.

Lad os antage, at  $a$  er en lige Rod og 2 Gange Rod i (2), saa kunne vi sætte  $\beta = a$ . De 2 første Ligninger af (22) blive da

$$\begin{aligned}\mu P'_1 &= a P_1 \\ \mu P'_2 &= a_2 P_1 + a P_2.\end{aligned}$$

Betegne vi nu i Transformationen (22) de forskjellige Potenser (Gjentagelser af den) ved  $A^2, A^3$  o. s. v., faa vi

$$\begin{aligned}A^2 &\equiv \begin{cases} \mu P'_1 = a^2 P_1 \\ \mu P'_2 = 2a a_2 P_1 + a^2 P_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases} \\ A^3 &\equiv \begin{cases} \mu P'_2 = a^3 P_1 \\ \mu P'_2 = 3a^2 a_2 P_1 + a^3 P_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A^p &\equiv \begin{cases} \mu P'_2 = a^p P_1 \\ \mu P'_2 = p a^{p-1} a_2 P_1 + a^p P_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}\end{aligned}$$

Da her  $p a^{p-1} a_2$  ikke kan blive 0, med mindre  $a_2 = 0$ , ses det, at ingen Potens af  $A$  kan blive identisk, med mindre  $a_2 = 0$  og  $a$  er en Rod af Enheden.

Tillige ses dette at være tilstrækkelige Betingelser for, at en Potens af  $A$  bliver en identisk Transformation, hvis de øvrige Rødder i (2) ere indbyrdes forskjellige og Rødder af Enheden.

Betragte vi nemlig da Transformationen (19) og kalde Dobbeltplanerne i denne

$$P_2, P_3 \dots P_{n+1},$$

kan denne skrives

$$\begin{aligned}\mu P'_2 &= \alpha P_2 \\ \mu P'_3 &= \beta P_3 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \mu P'_{n+1} &= \lambda P_{n+1}\end{aligned}$$

og den oprindelige Transformation

$$\begin{aligned}\mu P'_1 &= \alpha P_1 \\ \mu P'_2 &= \alpha P_2 \\ \mu P'_3 &= \alpha_3 P_1 + \gamma P_3 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \mu P'_{n+1} &= \alpha_{n+1} P_1 + \lambda P_{n+1}\end{aligned}$$

Multiplificere vi nu den 1ste Ligning med  $p$  og lægger den til den 3die, have vi

$$\mu(P'_3 + pP'_1) = (\alpha_3 + p\alpha)P_1 + \gamma P_3 = \gamma\left(P_3 + \frac{\alpha_3 + p\alpha}{\gamma}P_1\right).$$

Bestemme vi nu  $p$  ved

$$\begin{aligned}p &= \frac{\alpha_3 + p\alpha}{\gamma} \\ p &= \frac{\alpha_3}{\gamma - \alpha},\end{aligned}$$

og kalde vi  $P_3 + pP_1 = Q_3$ , faar denne Ligning Formen

$$\mu Q'_3 = \gamma Q_3,$$

som kan erstatte den 3die Ligning. Paa lignende Maade kunne de øvrige Ligninger behandles. Vi have da Transformationerne (1) paa Formen

$$\begin{aligned}\mu P'_1 &= \alpha P_1 \\ \mu P'_2 &= \alpha P_2 \\ \mu Q'_3 &= \gamma Q_3 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \mu Q'_{n+1} &= \lambda Q_{n+1},\end{aligned}$$

hvorved Sætningen bevises.

Paa lignende Maade gaas frem, hvis  $\alpha$  er en  $p$ -dobbelt Rod, idet man saa ser, at man maa have

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \alpha_4 = \beta_4 = \dots \alpha_p = \beta_p \dots \delta_p = 0,$$

samt at dette er den tilstrækkelige Betingelse, hvis de øvrige Rødder i (2) ere forskellige, naturligvis i Forbindelse med, at Rødderne i (2) ere Rødder af Enheden.

Findes der lige Rødder blandt de øvrige Rødder, kommer der endnu andre Betingelser af lignende Art til. Vi kunne nu imidlertid udtrykke de fundne Betingelser paa

en anden Maade, der gjør det let at vise, hvad der i alle Tilfælde er de nødvendige og tilstrækkelige Betingelser.

Lad os kalde Rødderne i (2) Transformationens Multiplikationer. Ere  $p$  af disse lige store, kan man skrive  $p$  af Transformationsligningerne

$$\begin{aligned}\mu P'_1 &= a P_1 \\ \mu P'_2 &= a P_2 \\ \dots &\dots \dots \\ \dots &\dots \dots \\ \mu P'_p &= a P_p\end{aligned}$$

og faa da ved at multiplicere disse med vilkaarlige Konstanter og addere

$$\mu(a P'_1 + b P'_2 \dots e P'_p) = a(a P_1 + b P_2 \dots e P_p),$$

som viser, at

$$a P_1 + b P_2 \dots e P_p = 0$$

ogsaa er et Dobbeltplan, eller at naar  $a$  er en  $p$ -dobbelt Rod i (2), maa der til denne Multiplikator svare en  $(p-1)$ -dobbelt- $\infty$  Række Dobbeltplaner.

Vi se da, at vi have som nødvendige Betingelser for at en Potens af en Transformation bliver identisk, at alle Multiplikatorerne ere Rødder af Enheden, samt, at naar en Multiplikator er  $p$ -dobbelt Rod i (2), at der saa til denne svarer en  $(p-1)$ -dobbelt- $\infty$  lineær Række Dobbeltplaner.

Det skal nu vises, at disse Betingelser ogsaa ere tilstrækkelige.

Kaldes Multiplikatorerne  $\alpha, \beta, \gamma \dots \lambda$ , blandt hvilke flere gjerne kunne være lige store, saa kunne vi lade svare til hver af dem Planer saaledes beskafne, at der ikke mellem venstre Side af Ligningerne for saadanne Planer, der svare til samme Multiplikator, bestaa lineære Relationer med konstante Koefficienter. Efter hvad der er sagt i 8), kan der heller ikke bestaa saadanne Relationer mellem venstre Side af Ligningerne for saadanne Planer, der alle svare til forskellige Multiplikatorer.

Vi kunne nu endelig paa samme Maade som i 8) vise, at der heller ikke kan bestaa saadanne Relationer mellem venstre Side af Ligningerne for saadanne Planer, af hvilke nogle svare til samme andre til forskellige Multiplikatorer, forudsat, saaledes som her, at der ikke bestaar lineære Relationer mellem venstre Side af Ligningerne for Planer svarende til samme Multiplikator.

Vi kunne nemlig antage, at Ligningerne for disse Planer, i Antal  $k$  ere,

$$\begin{aligned}X_1 x + Y_1 y \dots V_1 v &= 0, \\ X_2 x + Y_2 y \dots V_2 v &= 0, \\ \dots &\dots \dots \\ X_k x + Y_k y \dots V_k v &= 0.\end{aligned}$$

Vi ville nu vise, at vi da ikke kunne have, at følgende Relationer finde Sted

$$\begin{aligned} \alpha X_1 + \beta X_2 \dots \varepsilon X_k &= 0 \\ \alpha Y_1 + \beta Y_2 \dots \varepsilon Y_k &= 0 \\ \dots & \\ \alpha V_1 + \beta V_2 \dots \varepsilon V_k &= 0. \end{aligned}$$

Vi kunne antage, at der ikke mellem færre af disse Størrelser kunne bestaa saadanne Ligninger.

Multipliseres nu den første Ligning med  $A_1$ , den anden med  $B_1 \dots$ , den sidste med  $L_1$  og adderes, faas

$$\alpha\mu_1 X_1 + \beta\mu_2 X_2 \dots \varepsilon\mu_k X_k = 0.$$

Efter Forudsætningen kunne alle disse Værdier af Multiplikatorerne,  $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_k$  ikke være lige store. Antage vi nu  $\mu_k$  forskjellig fra  $\mu_1$ , kunne vi mellem den sidst fundne Ligning og den første givne Ligning eliminere  $X_k$ .

Vi faa da en lineær Ligning mellem  $X_1$  og en Del af de øvrige Størrelser af  $X$ , men ikke indeholdende  $X_k$ . Det ses at denne Ligning ogsaa er rigtig, naar man ombytter  $X$  med  $Y, Z, \dots$ . Men dette strider mod Forudsætningen. Da vi nu, naar  $\alpha$  er  $q$ -dobbeltd Rod i (2), til  $\alpha$  kunne lade svare  $q$  Dobbeltplaner, hvis Ligninger ere lineært uafhængige af hinanden, ses herved at være vist, at der existerer  $(n+1)$  Dobdeltplaner, hvis Ligninger ere lineært uafhængige af hinanden.

Hermed er da bevist, at de gjorte Forudsætninger ere tilstrækkelige. Da man, naar venstre Side af Ligningen for et Dobdeltplan, svarende til Multiplikatoren  $\alpha$  er  $P_1$ , har  $\mu P_1 = \alpha P_1$ , ses dette Dobdeltplan at maatte gaa gennem alle de Dobdeltpunkter, der svare til de andre Multiplikatorer; thi svarer et Dobdeltpunkt til Multiplikatoren  $\beta$  og indsættes dets Koordnater i Ligningen  $\mu P_1 = \alpha P_1$ , har man, da denne Ligning i dette Tilfælde skal være tilfredsstillet ved  $x = x', y = y' \dots v = v', \mu = \beta$ ,

$$\beta P_1 = \alpha P_1,$$

som kun er mulig naar  $P_1 = 0$ .

Omvendt ses det, at ethvert Plan, der gaar gennem de Dobdeltpunkter, der svare til alle de øvrige Multiplikatorer undtagen  $\alpha$ , er et Dobdeltplan, der svarer til  $\alpha$ .

Thi, analogt med, hvad der er vist om Dobdeltpalanerne, maa der mellem de Dobdeltpunkter, der ikke svare til  $\alpha$ , kunne udvælges  $n+1-q$ , hvis Koordnater ere lineært uafhængige af hinanden, naar  $\alpha$  er en  $q$ -dobbeltd Rod i (2), og igennem disse  $n+1-q$  Punkter kan der lægges en  $q-1$ -dobbeltd  $\infty$  Række Planer, som da maa falde sammen med de omtalte Planer, thi disse danne ogsaa en  $q-1$ -dobbeltd  $\infty$  Række.

Analoge Sætninger med dem, der her ere udviklede om Dobdeltpalanerne, gjælde naturligvis om Dobdeltpunkterne.





## II. Transformationernes Sammensætning.

10) Vi ville nu søge at finde saadanne Grupper, hvor alle Multiplikatorerne i Transformationer henhørende til Gruppen have Modulus 1, og hvor Transformationerne ere saaledes beskafte, at de kunne bringes paa Formen (12).

Lad os antage, at 2 Transformationer henhørende til Gruppen, kaldes  $A$  og  $B$ . Vi ville særligt undersøge Grupperne, under den Betingelse, at der forekommer i det mindste en Transformation heri, hvis Multiplikatorer alle ere forskellige. Vi kunne da senere ved de specielle Undersøgelser over Grupperne undersøge, hvorledes det gaar, naar dette ikke er Tilfældet (eller om der overhovedet gives saadanne Grupper).

Vi antage nu om  $A$ , at alle dens Multiplikatorer ere forskellige, og vi vælg til Koordinatplaner de  $n + 1$  Dobbeltplaner for  $A$ .

Vi kunne da sætte

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \mu v' = \lambda v \end{cases}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \dots l_1 v \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \dots l_2 v \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mu v' = a_{n+1} x + b_{n+1} y \dots l_{n+1} v, \end{cases}$$

hvor  $B$ 's Multiplikatorer ere bestemte ved

$$\begin{vmatrix} a_1 - \mu & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 - \mu & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \dots & l_{n+1} - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

en Ligning der kan skrives

$$\left. \begin{aligned} \mu^{n+1} - (a_1 + b_2 \dots l_{n+1}) \mu^n + ((a_1 b_2) + (a_1 c_3) \dots) \mu^{n-1} \dots \\ \mp ((A_1 B_2) + (A_1 C_3) \dots) \mu \pm 1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

idet vi ved  $(a_1 b_2) (a_1 c_3) \dots$  o. s. v. betegne  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \dots$  o. s. v., og betegne Underdeterminanterne i Transformationsdeterminanten ved tilsvarende store Bogstaver til Elementerne, medens øverste eller underste Fortegn svare til  $n + 1$  lige eller ulige.

Da Ligningen (24) skal vedblive at gjælde, naar  $\mu$  ombyttes med  $\frac{1}{\mu}$  (idet  $\frac{1}{\mu}$  er den konjugerede Størrelse til  $\mu$ , da dens Modulus er 1), og samtidig alle Størrelserne  $\frac{\mu}{a_1}, b_1 \dots$  ombyttes med deres konjugerede Størrelser, maa man have

$$\left. \begin{aligned} a_1 + b_2 \dots \quad l_{n+1} &= \overline{A_1 + B_2 \dots L_{n+1}} \\ (a_1 b_2) + (a_1 c_3) \dots &= \overline{(A_1 B_2) + (A_1 C_3) + \dots} \\ (a_1 b_2 c_3) + (a_1 b_2 d_4) \dots &= \overline{(A_1 B_2 C_3) + (A_1 B_2 D_4) + \dots}, \end{aligned} \right\} (25)$$

idet altid den konjugerede Størrelse til en given Størrelse betegnes ved at sætte en Streg over den, ligesom i det følgende Modulus af en Størrelse betegnes ved at sætte den mellem to Streger. Altsaa  $|b|$  lig Modulus til  $b$ .

Ligningen (25) maa nu ogsaa gjælde for  $A^m B$ , idet vi forudsætte, at enhver Transformation i Gruppen har Multiplikatorer, hvis Modulus er 1.

Man maa da have

$$\left. \begin{aligned} \alpha^m a_1 + \beta^m b_2 \dots \lambda^m l_{n+1} &= \alpha^m \overline{A_1} + \beta^m \overline{B_2} \dots \lambda^m \overline{L_{n+1}} \\ \Sigma \alpha^m \beta^m (a_1 b_2) &= \Sigma \alpha^m \beta^m \overline{(A_1 B_2)} \\ \Sigma \alpha^m \beta^m \gamma^m (a_1 b_2 c_3) &= \Sigma \alpha^m \beta^m \gamma^m \overline{(A_1 B_2 C_3)}. \end{aligned} \right\} (26) ^*)$$

Er nu  $A$  en Transformation af Ordenen  $p$ ,  $p \geq n + 1$ , hvad den altid maa være, naar alle Multiplikatorerne ere forskjellige, kræver dette at

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \overline{A_1} \\ b_2 &= \overline{B_2} \\ \dots &\dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \\ l_{n+1} &= \overline{L_{n+1}}. \end{aligned} \right\} (27)$$

Det ses ogsaa, at hvis  $p$  er tilstrækkelig høj og alle Størrelserne  $\alpha\beta, \alpha\gamma \dots$  forskjellige, vil af (26) følge, at

$$(a_1 b_2) = \overline{(A_1 B_2)}, \text{ o. s. v.}$$

11) Lad os nu antage, at  $B$  og  $C$  ere to vilkaarlige Transformationer henhørende til Gruppen. Lad os antage, at  $C$  har Ligningerne

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + \beta_1 y \dots \lambda_1 v \\ \mu y' = a_2 x + \beta_2 y \dots \lambda_2 v \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mu v' = a_{n+1} x + \beta_{n+1} y \dots \lambda_{n+1} v, \end{cases}$$

\*) Naar et Punkt transformeres ved Transformationen  $A^m B$ , forstaas herved, at det først transformeres ved  $B$ , derpaa ved  $A^m$ .

saa kunne vi danne Transformationen  $CA^mB$ . Det første Element i Transformationsdeterminanten til  $CA^mB$  er da

$$\alpha^m a_1 a_1 + \beta^m \beta_1 a_2 \dots \lambda^m \lambda_1 a_{n+1}.$$

Efter det foregaaende skal denne Størrelse være konjugeret med sin Underdeterminant i Transformationsdeterminanten for  $CA^mB$ ; men denne Underdeterminant er det første Element i Transformationsdeterminanten for den omvendte Transformation  $B^{-1}A^{-m}C^{-1}$ .

Dette Element er

$$\alpha^{-m} A_1 A_1 + \beta^{-m} B_1 A_2 \dots \lambda^{-m} A_1 A_{n+1},$$

og man har altsaa

$$\alpha^m a_1 a_1 + \beta^m \beta_1 a_2 \dots \lambda^m \lambda_1 a_{n+1} = \alpha^m \overline{A_1 A_1} + \beta^m \overline{B_1 A_2} \dots \lambda^m \overline{A_1 A_{n+1}},$$

og ligesom før, da  $A$  er en Transformation af  $(n + 1)$ te eller højere Orden,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 a_1 &= \overline{A_1 A_1} \\ \beta_1 a_2 &= \overline{B_1 A_2} \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \lambda_1 a_{n+1} &= \overline{A_1 A_{n+1}}. \end{aligned} \right\} (28)$$

ad nu  $C$  være identisk med  $B$ , saa giver (28)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 &= \overline{A_1^2} \\ b_1 a_2 &= \overline{B_1 A_2} \\ c_1 a_3 &= \overline{C_1 A_3} \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \\ l_1 a_{n+1} &= \overline{L_1 A_{n+1}}. \end{aligned} \right\} (29)$$

Disse Ligninger og de analoge, som faas ved at udtrykke, at de øvrige Elementer i Diagonalrækken i Transformationsdeterminanten for  $CA^mB$  skulle være konjugerede med deres Underdeterminanter, udtrykke, at Produktet af 2 Elementer i Transformationsdeterminanten for  $B$ , der ligge symmetrisk m. H. t. Diagonalrækken, ere konjugerede med Produktet af deres Underdeterminanter.

Lade vi  $C$  være den omvendte Transformation af  $B$ , have vi

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 A_1 &= \overline{a_1 A_1} \\ \alpha_2 A_2 &= \overline{a_2 A_2} \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \alpha_{n+1} A_{n+1} &= \overline{a_{n+1} A_{n+1}}. \end{aligned} \right\} (30)$$

Disse Ligninger og de dermed analoge, som faas paa lignende Maade, udtrykke: At Produktet af et Element og dets Underdeterminant i Transformationsdeterminanten for  $B$ , en vilkaarlig Transformation i Gruppen, er reel.

Thi dette finder Sted, naar en Størrelse er sin egen konjugerede Størrelse (og ikke er  $\infty$ ).

12) Haves en Transformationsgruppe, hvis enkelte Transformationer betegnes

$$A, B, C \dots \text{o. s. v.},$$

faas en hermed ligedannet Gruppe, idet vi danne alle Transformationerne

$$FAF^{-1}, FBF^{-1}, FCF^{-1} \dots \text{o. s. v.},$$

idet  $F$  er en vilkaarlig Transformation, og  $F^{-1}$  betegner den omvendte Transformation af  $F$ .

De 2 Grupper vi saaledes faa, svare til hinanden saaledes, at der til hver Transformation i den ene svarer en Transformation i den anden, og saaledes, at der til en Transformation, sammensat af 2 Transformationer i den ene Gruppe svarer en Transformation sammensat af de 2 tilsvarende i den anden Gruppe. Det er let at se, at de til hinanden svarende Transformationer i de 2 Grupper have samme Multiplikatorer (hvad der lettest ses, naar Transformationsligningerne ere henførte til Dobbeltplanerne), idet man faar  $FAF^{-1}$  ved at anvende Transformationen  $F^{-1}$  paa begge Sider af Transformationsligningerne for  $A$ .

Man kan derfor betragte det andet System som en Transformation af det første, idet det anførte viser, at vi ved at gaa over til dette kun indføre et nyt Koordinantsystem.

Dobbelpunkter og Dobbeltplaner i det nye System ere Transformationer af de tilsvarende Størrelser i det oprindelige System ved Transformationen  $F$ . Thi lad os antage, at et Dobbelpunkt  $P$  for Transformationen  $A$  ved  $F$  transformeres til  $P'$ , saa vil  $P'$  ved  $F^{-1}$  transformeres til  $P$ , ved  $A$  lades  $P$  uforandret og ved  $F$  transformeres  $P$  til  $P'$ . Altsaa er  $P'$  et Dobbelpunkt for  $FAF^{-1}$ .

Vi kalde det, at danne en ligedannet Gruppe med en given ved at underkaste alle den sidste Gruppens Transformationer Operationen  $F--F^{-1}$ , at transformere den ved  $F$ .

13) Vi ville nu undersøge, hvornaar en Transformation  $A$  bliver uforandret ved at transformeres ved en Transformation  $F$ . Skal  $A$  blive uforandret ved Transformation ved  $F$ , maa den have de samme Dobbelpunkter efter Transformationen som før Transformationen.

Vi se altsaa, at den bliver uforandret, hvis  $F$  har de samme Dobbelpunkter som  $A$ .

Hvis  $F$  ikke har de samme Dobbelpunkter som  $A$ , maa den ombytte de Dobbelpunkter indbyrdes, den ikke har fælles med  $A$ . Ombytter den kun saadanne Dobbelpunkter, der svare til samme Multiplikator, vil  $A$  ogsaa blive uforandret. I andet Tilfælde maa  $F$  kredsforskyde saadanne Dobbelpunkter, hvis Multiplikatorer kun ere forskellige ved en Faktor, der er en  $(n + 1)$ te Rod af Enheden.

Lad os antage, at  $F$  forvandler Dobbeltpunkterne

$$P \text{ til } P_1, P_1 \text{ til } P_2 \dots P_{r-1} \text{ til } P_r, P_r \text{ til } P,$$

saa maa man have, naar der til  $P$  svarer en Multiplikator  $m$ , og  $a$  er en  $(n+1)$ te Rod af Enheden,

$$\begin{array}{rcl} \text{at der til } P_1 \text{ svarer } & m a & \\ \text{--- } P_2 \text{ ---} & m a^2 & \\ \text{--- } P_3 \text{ ---} & m a^3 & \\ \dots & \dots & \\ \text{--- } P_r \text{ ---} & m a^r. & \end{array}$$

Skal nu  $FAF^{-1}$  være identisk med  $F$ , saa maa man, da Multiplikatorerne kun ere bestemte paa én Faktor nær, der er en vilkaarlig  $(n+1)$ te Rod af Enheden, og da i  $FAF^{-1}$   $P_1$  faar Multiplikatoren  $m$ , have, at alle Multiplikatorerne for  $FAF^{-1}$  blive identiske med dem for  $A$  ved Multiplikation med  $a$ . Man maa da have

$$m a^{r+1} = m,$$

saa at

$$a^{r+1} = 1,$$

men da  $r+1 \leq n+1$ , er kun  $FAF^{-1} \equiv A$ , hvis  $(r+1)$  er et Submultiplum af  $(n+1)$ . Har  $A$  flere Dobbeltpunkter end de her omtalte  $r+1$ , maa disse kredsforskydes paa samme Maade, saa at i dette Tilfælde Dobbeltpunkterne maa deles i Grupper paa  $r+1$  og  $r+1$ , hvis Multiplikatorer alle ere forbundne paa samme Maade som ved den omtalte Gruppe.

Er der  $p$  saadanne Grupper paa  $r+1$  Punkter, maa man have, naar de tilsvarende Multiplikatorer ere

$$\left. \begin{array}{l} m_1, \quad m_2 \quad \dots \quad m_p \\ m_1 a, \quad m_2 a \quad \dots \quad m_p a \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ m_1 a^r, \quad m_2 a^r \quad \dots \quad m_p a^r, \end{array} \right\} (31)$$

at

$$(m_1 \cdot m_2 \dots m_p)^{r+1} a^r = 1,$$

hvorved er bestemt en Relation mellem  $m_1, m_2 \dots m_p$ .

Ved dette sidste er nærmest tænkt paa det Tilfælde, at alle Multiplikatorerne vare forskjellige; men, som det ses, kan det ogsaa nemt anvendes, naar flere ere lige store.

14) Vi ville nu undersøge, hvad der er af Vigtighed for det følgende, hvorledes det forholder sig, naar et eller flere Elementer i Transformationsdeterminanten ere 0 for alle Transformationerne i en Gruppe. Vi kunne antage, at Elementerne  $a_1, a_2 \dots a_r$ , og de tilsvarende Elementer ikke ere 0 for alle Transformationer i Gruppen, men at derimod

$a_{r+1}, a_{r+2} \dots a_{n+1}$  og de tilsvarende Elementer ere 0 for alle Transformationer i Gruppen. Vi kunne altid ordne Transformationen paa en saadan Maade, at i den første Søje de Elementer, der ikke ere 0 i alle Transformationer komme først.

Er nu  $C$  en vilkaarlig Transformation i Gruppen (Koefficienterne i  $C$  betegnes ved  $a_1, \beta_1 \dots$  o. s. v.) og dannes  $CA^mB$ , hvor  $A$  og  $B$  have samme Betydning som i (10), faas for det Element, der svarer til  $a_{r+1}$

$$\beta^m \beta_{r+1} a_2 + \gamma^m \gamma_{r+1} a_3 + \dots + \varepsilon^m \varepsilon_{r+1} a_r = 0, \tag{31}$$

idet de øvrige Led af denne Størrelse falde væk, da  $a_{r+1} = a_{r+2} \dots a_{n+1} = 0$ . Men heraf følger, at

$$\beta_{r+1} a_2 = \gamma_{r+1} a_3 \dots = \varepsilon_{r+1} a_r = 0,$$

da Ligningen (31) skal gjælde for alle Værdier af  $m$ .  $\beta_{r+1}$  og  $a_2$  kunne nu være Koefficienter i ganske vilkaarlige Transformationer hørende til Gruppen, og da  $a_2$  ikke er 0 for alle Transformationer, maa  $\beta_{r+1}$  være det. Paa samme Maade ses at

$$\gamma_{r+1} = \delta_{r+1} \dots = \varepsilon_{r+1} = 0.$$

Man faar da ligeledes

$$\begin{aligned} \beta_{r+2} &= \gamma_{r+2} = \dots = \varepsilon_{r+2} = 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ \beta_{n+1} &= \gamma_{n+1} = \dots = \varepsilon_{n+1} = 0, \end{aligned}$$

d. v. s. for de sidste  $n+1-r$  Rækker i enhver Transformationsdeterminant hørende til Gruppen er de første  $r$  Elementer 0.

Transformationsdeterminanten for  $B$  ser da saaledes ud

$$\left| \begin{array}{cccccccc} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & e_1 f_1 & g_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & e_2 f_2 & g_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & b_r & c_r & \dots & e_r f_r & g_r & \dots & l_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{r+1} g_{r+1} & \dots & l_{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{r+2} g_{r+2} & \dots & l_{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{n+1} g_{n+1} & \dots & l_{n+1} \end{array} \right| \tag{32}$$

Til Exempel hidsættes, hvorledes Transformationsdeterminanten maa se ud for en Mangfoldighed af 4de Orden, naar Elementerne svarende til  $a_4, a_5$  skulle være 0 i alle Transformationer. Den maa være

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

Det ses tillige, at hvis Transformationsdeterminanterne for 2 Transformationer have Formen (32), vil Determinanten for disse 2 Transformationers Produkt have samme Form.

Endvidere ses det, at alle Elementerne i Produktet af de 2 Transformationer svarende til Elementerne i Determinanterne

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & e_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & b_r & c_r & \dots & e_r \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{vmatrix} f_{r+1} & g_{r+1} & \dots & l_{r+1} \\ f_{r+2} & g_{r+2} & \dots & l_{r+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n+1} & g_{n+1} & \dots & l_{n+1} \end{vmatrix}$$

ere uafhængige af Værdierne af de til

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & \dots & l_1 \\ f_2 & g_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_r & g_r & \dots & l_r \end{vmatrix}$$

svarende Elementer i de 2 Determinanter.

Hvad der her er sagt om Produktet af 2 Transformationer, hvis Determinant er af Formen (32), kan naturligvis udvides til at gjælde om Produktet af et vilkaarligt Antal Transformationer, hvis Determinanter ere af denne Form.

Vi ville i det følgende i de almindelige Undersøgelser ikke videre beskæftige os med Transformationsgrupper, hvis Transformationer alle have Determinanter af Formen (32), eller hvor altsaa i alle Determinanterne et Element f. Ex. det, der svarer til  $a_r$  er 0, idet Undersøgelsen af saadanne Grupper af  $n$  Variable altid kan føres tilbage til Undersøgelsen af Transformationsgrupper for et ringere Antal Variable.

Vi ville derfor i det følgende forudsætte, at ikke alle Elementer svarende til et Element, f. Ex.  $a_r$ , i en Transformationsdeterminant ere 0.

Vi kunne da ogsaa forudsætte, at vi ikke kunne have et Element i en Transformationsdeterminant lig 0, uden at den tilsvarende Underdeterminant ogsaa er 0. Thi var f. Ex.  $a_2 = 0$  uden at  $A_2$  var 0, maatte ifølge (28)  $\beta_1$  være 0, det vil sige Elementerne svarende til  $b_1$  maatte være 0 for alle Transformationsdeterminanter i Gruppen.

15) Vi antage nu, at en Gruppe indeholder de i 10, nævnte Transformationer  $A$  og  $B$ , og at vi transformere Gruppen ved Transformationen

$$F \equiv \begin{cases} \mu x' = px \\ \mu y' = py \\ \dots \dots \dots \\ \mu v' = tv, \end{cases}$$

hvor  $p, q, \dots t$  ere ganske vilkaarlige Konstanter (der dog ikke kunne være 0). Produktet af  $p \cdot q \cdot b \dots t$  behøver ikke at være 1.

Transformationen  $A$  bliver herved helt uforandret, medens  $B$  bliver til

$$\begin{aligned} \mu x' &= a_1 x + \frac{p b_1 y}{q} + \frac{p c_1 z}{r} \dots \frac{p l_1 v}{t} \\ \mu y' &= \frac{q a_2 x}{p} + b_2 y + \frac{q c_2 z}{r} \dots \frac{q l_2 v}{t} \\ \dots \dots \dots \\ \mu v' &= \frac{l a_{n+1} x}{p} + \frac{l b_{n+1} y}{q} \dots l_{n+1} v. \end{aligned}$$

Det ses, at medens  $a_2$  bliver erstattet ved  $\frac{q a_2}{p}$ , bliver  $A_2$  erstattet ved  $\frac{p A_2}{q}$ . Vi kunne da bestemme  $\frac{p}{q}, \frac{p}{r} \dots$  o. s. v. saaledes at

$$\begin{aligned} \left| \frac{q}{p} a_2 \right| &= \left| \frac{p}{q} A_2 \right| \\ \left| \frac{r}{p} a_3 \right| &= \left| \frac{p}{r} A_3 \right| \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

saaledes at altsaa alle Elementerne i den første Søjle af den transformerede Transformationsdeterminant faa samme Modulus som deres Underdeterminanter, under den i 14) gjorte Forudsætning.

Idet det ved de følgende Undersøgelser er ligegyldigt, om vi betragte den oprindelige eller den transformerede Gruppe, sætte vi denne i den oprindeliges Sted og antage altsaa at

$$|a_1| = |A_1|, |a_2| = |A_2| \dots |a_{n+1}| = |A_{n+1}|.$$

Det følger da af (30), at

$$a_1 = \overline{A_1} a_2 = \pm \overline{A_2} \dots a_{n+1} = \pm A_{n+1}, \quad (33)$$

og af (28) ses, at det samme maa finde Sted for en vilkaarlig Transformation i Gruppen, hvis ingen af Elementerne  $a_1, a_2 \dots a_{n+1}$  ere 0, saa at man altsaa har

$$a_1 = \overline{\Lambda_1} a_2 = \pm \overline{\Lambda_2} \dots a_{n+1} = \pm \Lambda_{n+1}, \quad (34)$$

idet tillige Fortegnene i begge Ligningerne (33) og (34) svare til hinanden.



Skulde en af Størrelserne  $a_1, a_2 \dots a_{n+1}, a_p$ , være 0, maa der findes Transformationer, for hvilke det tilsvarende Element  $a_p$  ikke er 0, og vi kunne da bestemme  $a_p$  saaledes at det er konjureret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn saa at Ligningerne (33) og (34) i alle Tilfælde bestaa samtidigt, og Fortegnene ere de samme for alle til hinanden svarende Elementer.

Vi danne nu Transformationen  $C^{-1}A^mB$ . Det Element, der svarer til  $a_2$  i  $C^{-1}A^mB$ 's Transformationsdeterminant er

$$\alpha^m \mathbf{B}_1 a_1 + \beta^m \mathbf{B}_2 a_2 \dots \lambda^m \mathbf{B}_{n+1} a_{n+1}.$$

Da det skal være konjureret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn, maa man altsaa have

$$\alpha^m \mathbf{B}_1 a_1 + \beta^m \mathbf{B}_2 a_2 \dots \lambda^m \mathbf{B}_{n+1} a_{n+1} = \pm (\alpha^m \overline{\beta_1 A_1} + \beta^m \overline{b_2 A_2} \dots + \lambda^m \overline{\beta_{n+1} A_{n+1}}).$$

Ligesom før faas heraf

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_1 a_1 &= \pm \overline{\beta_1 A_1} \\ \mathbf{B}_2 a_2 &= \pm \overline{\beta_2 A_2} \\ \dots & \\ \mathbf{B}_{n+1} a_{n+1} &= \pm \overline{\beta_{n+1} A_{n+1}} \end{aligned} \right\} (35)$$

Ligningerne (35) vise, hvis ingen af Størrelserne  $a_1, a_2 \dots a_{n+1}$  ere 0, at man for enhver Transformation i Gruppen maa have  $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n+1}$  konjurerede med sine Underdeterminanter med positivt eller negativt Fortegn.

Skulde en af Størrelserne,  $a_p$ , være 0, kan man ligesom før erstatte den med en tilsvarende Størrelse  $a_p$ , der hører til en af de øvrige Transformationer i Gruppen og ikke er 0. Ved at betragte de Ligninger, som faas ved at danne Elementerne svarende til  $a_3, a_4 \dots a_{n+1}$  i  $C^{-1}A^mB$ , ses paa lignende Maade, at man maa have, at ethvert Element i Transformationsdeterminanten for  $C$  er konjureret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn.

I (35) gjælder  $+$  eller  $\div$  eftersom man har  $a_2 = \pm A_2$ . Man skal i alle Ligningerne (35) bruge det samme Fortegn.

Det ses da, at alle de tilsvarende Elementer i 2den Søjle af Transformationsdeterminanten ere konjurerede med deres Underdeterminanter med samme Fortegn som skal bruges i første Søjle, eller alle med modsat Fortegn af hvad der bruges i første Søjle, eftersom i (35)  $+$  eller  $-$  Tegnet er det gjældende.

Hvad der her er sagt om anden Søjle, gjælder naturligvis almindeligt.

Da  $\beta_1 a_2 = \mathbf{B}_1 A_2$  (se 28), ses  $\beta_1$  og  $a_2$  begge at maatte være konjurerede med deres Underdeterminanter med samme Fortegn, eller man har almindeligt, at 2 Elementer i en Transformationsdeterminant, som ligge symmetrisk m. H. t. Dianogalrækken, ere begge konjurerede med deres Underdeterminant med samme Fortegn.

16) Idet vi stadig antage, at intet Element er 0 i alle Transformationsdeterminanterne, og at derfor et Element og dets Underdeterminant altid samtidigt ere 0, kunne vi fremsætte de Resultater, hvortil vi ere komne, paa en meget simple Maade.

Sætte vi nemlig

$$f = x\bar{x} + \varepsilon_1 y\bar{y} + \varepsilon_2 z\bar{z} \dots \varepsilon_n v\bar{v}, \quad (36)$$

hvor  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$  er  $\pm 1$ , eftersom Koefficienterne til  $x, y, \dots$  i den første af Transformationsligningerne for en vilkaarlig Transformation  $B$  (se 10) i Gruppen er konjugeret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn, saa skulle vi vise at  $f$  bliver uforandret, naar vi for  $x, y \dots$  sætte  $\mu x', \mu y' \dots$  o. s. v., idet samtidigt  $\bar{x}, \bar{y} \dots$  o. s. v. erstattes ved de konjugerede Værdier  $\overline{\mu x'}, \overline{\mu y'} \dots$  o. s. v. Man skal altsaa have

$$f = \mu\bar{\mu} [x'\bar{x}' + \varepsilon_1 y'\bar{y}' + \varepsilon_2 z'\bar{z}' \dots \varepsilon_n v'\bar{v}']. \quad (37)$$

Dette kræver, at

$$\left. \begin{aligned} a_1 \bar{a}_1 + \varepsilon_1 a_2 \bar{a}_2 \dots \varepsilon_n a_{n+1} \bar{a}_{n+1} &= 1 \\ b_1 \bar{b}_1 + \varepsilon_1 b_2 \bar{b}_2 \dots \varepsilon_n b_{n+1} \bar{b}_{n+1} &= \varepsilon_1 \\ c_1 \bar{c}_1 + \varepsilon_1 c_2 \bar{c}_2 \dots \varepsilon_n c_{n+1} \bar{c}_{n+1} &= \varepsilon_2 \\ \dots &\dots \\ l_1 \bar{l}_1 + \varepsilon_1 l_2 \bar{l}_2 \dots \varepsilon_n l_{n+1} \bar{l}_{n+1} &= \varepsilon_n, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

og at

$$\left. \begin{aligned} a_1 \bar{b}_1 + \varepsilon_1 a_2 \bar{b}_2 + \varepsilon_2 a_3 \bar{b}_3 \dots \varepsilon_n a_{n+1} \bar{b}_{n+1} &= 0 \\ a_1 c_1 + \varepsilon_1 a_2 c_2 + \varepsilon_2 a_3 c_3 \dots \varepsilon_n a_{n+1} c_{n+1} &= 0 \\ \dots &\dots \\ b_1 c_1 + \varepsilon_1 b_2 c_2 + \varepsilon_2 b_3 c_3 \dots \varepsilon_n b_{n+1} c_{n+1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Ligningerne (38) angive nemlig, at Koefficienterne til  $x\bar{x}, y\bar{y} \dots$  i (37) ere lig med de tilsvarende i (36), og Ligningerne (39), at Koefficienterne til  $x\bar{y}, x\bar{z} \dots$  i (37) ere 0.

Men da

$$\begin{aligned} A_1 &= \bar{a}_1, & A_2 &= \varepsilon_1 \bar{a}_2 \dots & A_{n+1} &= \varepsilon_n \bar{a}_{n+1} \\ B_1 &= \varepsilon_1 \bar{b}_1, & B_2 &= \varepsilon_1^2 \bar{b}_2 \dots & B_{n+1} &= \varepsilon_1 \varepsilon_n \bar{b}_{n+1} \\ \dots &\dots & \dots &\dots & \dots &\dots \\ L_1 &= \varepsilon_n \bar{l}_1, & L_2 &= \varepsilon_n \varepsilon_1 \bar{l}_2 \dots & L_{n+1} &= \varepsilon_n^2 \bar{l}_{n+1} \end{aligned}$$

ses herved, at baade (38) og (39) ere rigtige.

Omvendt ses det, at hvis Størrelserne  $\mu x', \mu y' \dots \mu v'$  indsatte for  $x, y, z \dots$  o. s. v. i (36), medens  $\overline{\mu x'}, \overline{\mu y'} \dots$  indsættes for  $\bar{x}, \bar{y} \dots$ , lade disse identisk uforandret, maa Koefficienterne for Transformationen,  $B$ , opfylde de i 15) fremsatte Betingelser.



### III. De endelige Transformationsgrupper, hvorved en ret Linie transformeres til sig selv.

17) Vi ville antage, at 2 Transformationer i Gruppen ere  $A$  og  $B$  (dens Grundtransformationer), og at Gruppen kan tænkes fremkommet ved Sammensætning af disse<sup>1)</sup>.

Idet  $A$  og  $B$  skulle transformere en ret Linie til sig selv, kunne vi tænke os dem bragt paa Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \end{cases} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y. \end{cases}$$

Vi kunne da for det første se, at vi ikke i  $A$  kunne have  $a_2 = 0$ , uden at ogsaa  $b_1$  er 0.

Thi i dette Tilfælde er  $a_1$  og  $b_2$   $A$ 's Multiplikatorer. Da disse skulle være Rødder af Enheden, naar Gruppen skal være endelig, og  $A$ 's Determinant skal være 1, har man  $a_1 = \bar{b}_2$ . Man har da

$$A^{-1} \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}_1 x - b_1 y \\ \mu y' = \dots a_1 y, \end{cases}$$

og sætte vi  $C \equiv BAB^{-1}A^{-1}$ , har man

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = x + a_1 b_1 (\alpha^2 - 1)y \\ \mu y' = y. \end{cases}$$

Man har nemlig  $\alpha = \bar{\beta}$ , da  $\alpha$  og  $\beta$  ere  $B$ 's Multiplikatorer, og  $\alpha\beta$  altsaa lig 1.

Skal nu  $C$  høre til en endelig Gruppe, maa man have

$$b_1 (\alpha^2 - 1) = 0.$$

Man kan ikke have  $\alpha^2 - 1 = 0$ ; thi da maatte  $\beta$  være lig  $\alpha$ , og  $B$  være en identisk Transformation. Vi maa altsaa have  $b_1 = 0$ .  $a_2$  og  $b_1$  ere da 0 paa samme Tid, og vi kunne da ifølge foregaaende Afsnit altid forudsætte

$$a_1 = \bar{b}_2, \quad a_2 = \pm b_1, \\ D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1.$$

<sup>1)</sup> Vi skulle senere se, at vi ikke behøve flere end 2 Grundtransformationer.

Da  $A$ 's Multiplikatorer  $a'$  og  $\overline{a'}$  ere Rødder i Ligningen

$$\mu^2 - (a_1 + b_2)\mu + 1 = 0,$$

maa man desuden have

$$a_1 + b_2 = a' + \overline{a'},$$

hvor  $a'$  er en Rod af Enheden.

Hvis Multiplikatorerne ere ulige  $(2n + 1)$ te Rødder af Enheden, er Transformationen af  $(2n + 1)$ te Orden; ere de lige  $2n$ te Rødder af Enheden, er Transformationen af  $n$ te Orden.

Ligningen  $D = 1$  kan skrives

$$|a_1|^2 \pm |b_1|^2 = 1. \quad (41)$$

Vi skulle nu først vise, at hvis Gruppen skal være endelig, maa man altid have

$$b_1 = -\overline{a_2}. \quad (42)$$

Af (41) ses,  $|a_1| > 1$  hvis  $b_1 = \overline{a_2}$  (med mindre Gruppen kun bestaar af Transformationen af samme Form som  $B$ ). Lad os danne Transformationen

$$ABA^{-1}B^{-1},$$

saa er dennes Transformationsdeterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 a, & b_1 \overline{a} \\ a_2 a, & b_2 \overline{a} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 \overline{a_1}, & -b_1 a \\ -a_2 \overline{a}, & a_1 a \end{vmatrix} = \\ \begin{vmatrix} a_1 b_2 - b_1 a_2 \overline{a^2}, & -a_1 b_1 a^2 + b_1 a_1 \\ a_2 b_2 - a_2 b_2 \overline{a^2}, & a_1 b_2 - a_2 b_1 a^2 \end{vmatrix}$$

hvis Elementer ere Koefficienter for Ligningerne for  $ABA^{-1}B^{-1}$ . Antages nu  $b_1 = \rho e^{i\mu}$ ,  $\overline{a^2} = e^{i\nu}$ , faar man, at Summen af det første og det sidste Element i denne Determinant er

$$2|a_1|^2 - 2\rho^2 \cos v,$$

og da ifølge (41)

$$|a_1|^2 - \rho^2 = 1,$$

$$2|a_1|^2 - 2\rho^2 \cos v > 2,$$

med mindre  $v = 0$ , eller  $\rho = 0$ .

Men

$$2|a_1|^2 - 2\rho^2 \cos v = a_1 + \overline{a_1},$$

naar  $a_1$  er en af Multiplikatorerne for  $ABA^{-1}B^{-1}$ . Denne sidste Ligning er da kun mulig, hvis  $v = 0$ , eller  $\rho = 0$ . I første Tilfælde er Multiplikatorerne for  $B \pm 1$ ,  $B$  en identisk Transformation.

Man maa da have, idet, efter det foregaaende,  $\rho = 0$  heller ikke kan bruges, da  $A$  og  $B$  saa have samme Dobbelpunkter, at  $b_1 = \overline{a_2}$  er en Umulighed og altsaa

$$b_1 = -\overline{a_2}.$$

Vi have da Sætningen:  
Skulle Transformationerne

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \end{cases}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \end{cases}$$

høre til en endelig Gruppe, maa man have

$$\begin{aligned} a_1 &= \overline{b_2}, & b_1 &= -\overline{a_2} \\ \underline{|a_1|^2 + |b_1|^2} &= 1. \end{aligned}$$

Det ses, at naar vi i

$$f = x\bar{x} + y\bar{y}$$

sætte  $\mu x'$  for  $x$ ,  $\mu y'$  for  $y$ , bliver  $f$  uforandret.

Naar  $A$  ombytter  $B$ 's Dobbelpunkter, maa  $A^2$  være identisk, idet  $A^2$  har  $B$ 's Dobbelpunkter til Dobbelpunkter, og desuden de samme 2 Dobbelpunkter som  $A$ , forskellige fra  $B$ 's Dobbelpunkter, og en Transformation, der transformerer en ret Linie til sig selv, ikke kan have flere end 2 Dobbelpunkter uden at være identisk.

Skal  $A$  ombytte  $B$ 's Dobbelpunkter  $x = 0$  og  $y = 0$ , maa den have Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = b_1 y \\ \mu y' = a_2 x, \end{cases}$$

Omvendt ses det let, at enhver Transformation af samme Form som den her nævnte,  $A_1$  er af anden Orden, idet  $b_1 = -\overline{a_2}$ .

18) Efter at have bestemt Formen for de enkelte Transformationer hørende til en Gruppe, ville vi søge at løse det Problem:

Hvilke mulige endelige Grupper eksisterer der, hvis Transformationer transformere en ret Linie til sig selv.

Lad os først antage, at Gruppen indeholder en Transformation  $A$  af højere end 2den Orden, saa kunne vi transformere  $A$  ved alle Transformationer i Gruppen, d. v. s. danne alle de ligedannede Transformationer  $C \equiv B A B^{-1}$ , idet  $B$  er en vilkaarlig Transformation i Gruppen. Indeholder Gruppen  $N$  Transformationer (den identiske Transformation medregnet), ville vi have  $N$  Transformationer  $C$ , som dog ikke alle ville være forskellige.

Vi kalde alle de forskellige Transformationer, som ere dannede af samme Transformation  $A$  ved at transformere den ved alle Transformationer i Gruppen, en Samling hørende til  $A$ .

Vi ville nu bestemme, hvor mange Transformationer der høre til den Samling, hvortil  $A$  hører.

Vi antage, at  $A$  er af  $n$ te Orden  $n > 2$ .

Vi se nu for det første, at vi faa samme Samling ved at gaa ud fra en vilkaarlig Transformation hørende til Samlingen. Thi hører  $C$  til Samlingen dannet ved  $A$  som Udgangspunkt, vil den ogsaa høre til Samlingen dannet fra  $D$  som Udgangspunkt, naar  $D$  og  $A$  høre til samme Samling. Man har nemlig da

$$BAB^{-1} \equiv C$$

$$B_1AB_1^{-1} \equiv D,$$

hvor  $B$  og  $B_1$  ere 2 Transformationer hørende til Gruppen. Men heraf faas

$$A \equiv B^{-1}CB \equiv B_1^{-1}DB_1,$$

$$C \equiv BB_1^{-1}DB_1B^{-1},$$

hvorved Sætningen bevises, idet  $BB_1^{-1}$  atter er en Transformation hørende til Gruppen.

Ligeledes ses, at der gives lige mange Transformationer i Gruppen, som lade enhver Transformation i Samlingen uforandret. Thi ere atter  $A$  og  $C$  Transformationer i samme Samling, saa at man har

$$C \equiv BAB^{-1},$$

og lades  $A$  uforandret ved Transformationen ved  $D$ , altsaa

$$DAD^{-1} \equiv A,$$

saa har man

$$A \equiv B^{-1}CB,$$

og altsaa

$$DB^{-1}CBD^{-1} \equiv B^{-1}CB$$

$$BDB^{-1}CBD^{-1}B^{-1} \equiv C,$$

saa at  $C$  lades uforandret ved  $BDB^{-1}$ . Da nu tillige 2 Transformationer  $BDB^{-1}$  og  $BD_1B^{-1}$  ikke kunne være identiske, hvis  $D$  og  $D_1$  ikke ere det, svarer til hver Transformation, der transformerer  $A$  til sig selv, een Transformation, der transformerer  $C$  til sig selv.

Dannes nu den Samling, hvortil  $A$  hører, vil det være let af se, hvor mange Transformationer den indeholder.

Vi antage  $A$  af  $n$ te Grad  $n > 2$ , da kan  $A$  kun lades uforandret ved Transformation af saadanne Transformationer, der have samme Dobbelpunkter som den.

Vi kunne tillige antage om  $A$ , at kun dens Potenser have samme Dobbelpunkter som den. Thi havde 2 Transformationer  $A$  og  $B$  samme Dobbelpunkter og vare 2 Multiplikatorer henholdsvis for  $A$  og  $B$   $\alpha$  og  $\beta$ , hvor  $\alpha$  og  $\beta$  ere Rødder af Enheden, saa

vilde en Multiplikator for  $A^p B^q$  være  $\alpha^p \beta^q$ , idet vi antage, at  $\alpha$  og  $\beta$  svare til samme Dobbelpunkt.

Vare nu  $A$  og  $B$  af Ordenerne  $n$  og  $n_1$ ,  $M$  mindste fælles delelige Tal for  $n$  og  $n_1$ , saa ses det, at  $p$  og  $q$  kunne bestemmes saaledes, at  $A^p B^q$  er af  $M$ te Orden. Thi er

$$n = p_1^a p_2^b p_3^c \dots,$$

hvor  $p_1, p_2, p_3 \dots$  ere Primtall, vil  $A^{p_1^a p_2^b p_3^c} \dots$  være af Ordenen  $p_1^a$ , og der vil altsaa være en Potens af  $A$ , som er af Ordenen  $p_1^a$ , en af Ordenen  $p_2^b \dots$  o. s. v., medens omvendt Produktet af 2 Transformationer med samme Dobbelpunkter men af Ordenen  $p_1^a, p_2^b$  ere af Ordenen  $p_1^a, p_2^b$ .

Endvidere ses det, at af 2 Transformationer af samme Orden  $n$  med de samme Dobbelpunkter, den ene altid er en Potens af den anden, da en hvilken som helst primisk  $n$ te Rod af Enheden altid er en Potens af en anden primisk  $n$ te Rod af Enheden, og endelig ses det ved lignende Betragtninger, at naar 2 Transformationer have samme Dobbelpunkter og Ordenen af den ene  $n$  er et Multiplum af Ordenen  $m$  af den anden, vil den sidste være en Potens af den første.

Men da fremgaar det, at naar  $p$  og  $q$  ere bestemte som ovenfor omtalt, baade  $A$  og  $B$  ere Potenser af  $C \equiv A^p B^q$ .

Vi kunne altsaa altid, blandt de Transformationer, der have samme Dobbelpunkter, vælge en saaledes, at alle de andre ere Potenser af denne, og vi kunne nu netop antage  $A$  saaledes valgt. Da der nu findes  $n$  saadanne Potenser af  $A$ , vil der altsaa i Gruppen findes  $n$  Transformationer, der transformere  $A$  til sig selv. Altsaa ville vi ved at transformere  $A$  ved alle Transformationer i Gruppen faa  $A$   $n$  Gange gjentaget, og lige saa ofte ville vi da faa enhver anden Transformation i Samlingen, hvortil  $A$  hører, gjentaget.

Kaldes Antallet af Transformationer i Samlingen  $S$ , have vi da  $nS = N$ , eller  $S = \frac{N}{n}$ . Alle Transformationer i Samlingen have de samme Multiplikatorer. Vi kunne da ikke faa to Transformationer i Samlingen, der have de samme Dobbelpunkter, uden at den ene er den omvendte Transformation af den anden, idet ved Transformationer, der alle transformere den rette Linie til sig selv, kun saadanne Transformationer baade kunne have samme Dobbelpunkter og de samme Multiplikatorer, men naturligvis saaledes at den til samme Dobbelpunkt svarende Multiplikator er forskjellig i de 2 Transformationer.

Skal Samlingen da baade indeholde en Transformation og dens omvendte Transformation, maa Gruppen indeholde Transformationer af 2den Orden, idet kun en Transformation af 2den Orden indbyrdes kan ombytte to Punkter. Er der da ikke nogen Transformation, der ombytter Dobbelpunkterne for  $A$ , maa alle Transformationerne i den Samling, hvortil  $A$  hører have forskjellige Dobbelpunkter. Den Samling, man faar ved for  $A$  at sætte en Potens af  $A$ , maa da ogsaa indeholde  $S$  Transformationer, som alle ere forskjel-



lige fra dem der forekomme i Samlingen, hvortil  $A$  hører, idet den kommer til at bestaa af Potenser af alle Transformationer i Samlingen, hvortil  $A$  hører. Disse Samlinger indeholde da alle tilsammen  $\frac{n-1}{n} N$  Transformationer.

Vi ville for Fremtiden kalde de Samlinger, som tilhøre Transformationer med samme Dobbelpunkter, for Samlinger der tilhøre disse Dobbelpunkter, eller for Samlinger der tilhøre en enkelt Transformation med disse Dobbelpunkter. Er der én Transformation af 2<sup>den</sup> Orden, som ombytter  $A$ 's Dobbelpunkter, vil den Samling, man faar ved for  $A$  at sætte  $A^{-1}$ , falde sammen med den Samling, hvortil  $A$  hører.

Er derimod  $A^p$  ikke den omvendte Transformation af  $A$ , vil den Samling, hvortil  $A^p$  høre, indeholde  $S$  Transformationer forskellige fra dem, der forekomme i samme Samling som  $A$ , medens  $A^p$  og  $A^{n-p}$  høre til samme Samling, uden at være identiske med hinanden. Dette finder dog kun Sted hvis ikke  $n$  lige, og  $p = \frac{n}{2}$ . I dette Tilfælde bliver  $A^p$  af anden Orden og falder sammen med sin omvendte Transformation. Samlingen hvortil  $A^p$  hører, kommer da i dette Tilfælde til at indeholde  $\frac{S}{2}$  Transformationer.

Hvad enten  $n$  er lige eller ulige komme de Samlinger, der tilhøre  $A$  (eller dens Dobbelpunkter) i Alt til at indeholde  $\frac{n-1}{2n} N$  Transformationer<sup>1)</sup>.

Tilbage staar da kun at afgjøre, hvor mange Transformationer en Samling indeholder, der tilhører en Transformation af 2<sup>den</sup> Orden  $A$ , naar  $A$  ikke er en Potens af nogen anden Transformation hørende til Gruppen.

Er der nu ikke nogen Transformation i Gruppen, der ombytter  $A$ 's Dobbelpunkter, faas ligesom før, at den Samling, hvortil  $A$  hører, indeholder  $\frac{N}{2}$  Transformationer.

Er der en Transformation  $B$  i Gruppen, der ombytter  $A$ 's Dobbelpunkter, kunne vi tænke os  $A$  transformeret, saa at  $A$  har Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ix \\ \mu y' = -iy. \end{cases}$$

$B$  maa da have Formen

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = by \\ \mu y' = -\bar{b}x, \end{cases}$$

idet  $|b| = 1$ .

Skulde en Gruppe indeholde en Transformation til,  $C$ , som ligeledes transformerede  $A$  til sig selv, maatte den have Formen

<sup>1)</sup> Næmlig enten for  $n$  ulige  $\frac{n-1}{2}$  Samlinger hver paa  $\frac{N}{n}$  Transformationer, eller for  $n$  lige  $\frac{n-2}{2}$  Samlinger paa  $\frac{N}{n}$  og 1 paa  $\frac{N}{2n}$  Transformationer.

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = cy \\ \mu y' = -\bar{c}x. \end{cases}$$

Men da havde man

$$BC \equiv \begin{cases} \mu x' = -\bar{b}c x \\ \mu y' = -\bar{b}c y. \end{cases}$$

Da  $BC$  har samme Dobbelpunkter som  $A$ , og efter Forudsætningen ingen anden Transformation maatte have samme Dobbelpunkter som  $A$ , man maa altsaa have

$$\bar{b}c = \pm i.$$

Vi kunne gjerne sætte  $+i$ , da vi faa samme Transformation  $B$ , ved at ombytte  $b$  med  $-b$ . Dette giver

$$b = ic.$$

Men i dette Tilfælde er

$$C \equiv AB,$$

og vi have

$$AB \equiv BA,$$

da

$$BAB \equiv A.$$

Vi se da, at der er 4 Transformationer i Gruppen, der transformere  $A$  til sig selv, den identiske Transformation  $A$ ,  $B$  og  $AB$ . Den Samling, hvortil  $A$  hører, indeholder saaledes  $\frac{N}{4}$  Transformationer.

19) Det er herefter let at bestemme, hvilke mulige endelige Transformationsgrupper der gives.

Man maa nemlig have, naar Gruppen indeholder Transformationerne

$$\underline{A_1, B_2 \dots}$$

af Ordenen

$$\underline{n_1, n_2 \dots},$$

hvis Dobbelpunkter ikke ombyttes ved nogen Transformation i Gruppen, og Transformationerne

$$\underline{B_1, B_2 \dots}$$

af Ordenen

$$\underline{m_1, m_2 \dots},$$

hvis Dobbelpunkter ombyttes af Transformationer i Gruppen, idet vi antage, at de her omtalte Transformationer ikke høre til hinandens Samlinger, og tillige at der ikke gives Transformationer med de samme Dobbelpunkter som  $A_1, A_2 \dots B_1, B_2 \dots$  af højere end de her anførte Ordener.

$$N \left( \frac{n_1-1}{n_1} + \frac{n_2-1}{n_2} \dots + \frac{m_1-1}{2m_1} + \frac{m_2-1}{2m_2} \dots \right) + 1 = N, \quad (43)$$

idet Gruppen foruden Samlingerne hørende til  $A_1, A_2 \dots B_1, B_2$  endnu indeholder den identiske Transformation.

Da  $\frac{n_1-1}{n_1} \geq \frac{1}{2}$ , kan der kun forekomme en eneste Transformation  $A_1$  med tilhørende Samlinger, hvis Dobbelpunkter ikke ombyttes af nogen anden Transformation i Gruppen.

Da  $\frac{m_1-1}{2m_1} > \frac{1}{4}$ , kan der, hvis der forekommer en Transformation i Gruppen, hvis Dobbelpunkter ikke ombyttes, desuden kun i det højeste forekomme en Transformation  $B_1$ , med tilhørende Samlinger, saaledes beskaffen, at dens Dobbelpunkter ombyttes ved en anden Transformation i Gruppen. Man har altsaa, naar der eksisterer en Transformation  $A_1$ , enten at der ikke hører nogen Transformation  $B_1$  til Gruppen.

I dette Tilfælde har man

$$N \binom{n_1-1}{n_1} + 1 = N, \quad (44)$$

$$N = n_1.$$

Da Gruppen kun indeholder  $n_1$  Transformationer, bestaar den alene af  $A_1$  og dens Potenser.

Eller ogsaa indeholder den endnu en Transformation  $B_1$ , med tilhørende Samlinger.

I dette Tilfælde har man

$$N \left( \frac{n_1-1}{n_1} + \frac{m_1-1}{2m_1} \right) + 1 = N, \quad (45)$$

$$N = \frac{2m_1 n_1}{n_1 + 2m_1 - m_1 n_1}.$$

Nævneren skal her være positiv, saa at man har

$$n_1 + 2m_1 - m_1 n_1 > 0$$

$$(m_1 - 1)(n_1 - 2) < 2,$$

idet  $m_1$  og  $n_1$  mindst ere 2. Denne Ligning kan da kun tilfredsstilles, hvis enten

$$m_1 = 2, \quad n_1 = 3,$$

eller

$$n_1 = 2, \quad m_1 \text{ vilkaarlig.}$$

I det første Tilfælde maa  $N$  være 12.

Gruppen indeholder 12 Transformationer. Den maa bestaa af en Transformation af 3<sup>de</sup> Orden med dertil hørende Samlinger, indeholdende i Alt 8 Transformationer, samt en Transformation af 2<sup>den</sup> Orden, med den dertil hørende Samling, bestaaende af 3 Transformationer.

Det vil vise sig, at der eksisterer en saadan Gruppe, den saakaldte Tetraedergruppe.

I andet Tilfælde er  $N = 2m$ .

Gruppen indeholder een Transformation  $A_1$  af en vilkaarlig høj Orden  $m_1$ , samt de til  $A_1$  hørende Samlinger, indeholdende i Alt  $m_1-1$  Transformationer, samt en Samling

af  $m_1$  Transformationer af 2den Orden. Da de til  $A_1$  hørende Samlinger kun bestaa af  $m_1 - 1$  Transformationer, bestaa de udelukkende af  $A_1$  og dens Potenser.

Denne Gruppe, den cykliske, eksisterer ogsaa, naar  $m_1$  er ulige<sup>1)</sup>.

Forekommer der ikke nogen Transformation i Gruppen, hvis Dobbelpunkter ikke ombyttes ved en anden Transformation i Gruppen, faar Ligningen (43) Formen

$$\frac{N}{2} \left( \frac{m_1 - 1}{m_1} + \frac{m_2 - 1}{m_2} + \frac{m_3 - 1}{m_3} \right) + 1 = N. \quad (46)$$

Den kan ikke indeholde flere Led, da  $\frac{m_1 - 1}{2m_1} \geq \frac{1}{4}$ .

Ligningen kan imidlertid heller ikke indeholde færre Led; thi Gruppen maa indeholde flere end  $m_1$  Transformationer, da den maa indeholde  $A_1$  og dens Potenser, og desuden en Transformation, der ombytter  $A_1$ 's Dobbelpunkter. Manglede nu baade  $m_2$  og  $m_3$ , fik man

$$N = \frac{2m_1}{m_1 + 1} < m_1,$$

og havde man

$$\frac{N}{2} \left( \frac{m_1 - 1}{m_1} + \frac{m_2 - 1}{m_2} \right) + 1 = N,$$

fik man

$$N = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

som ogsaa er umuligt, da vi kunne antage  $m_1 \geq m_2$  og altsaa

$$N \leq m_1.$$

(43) maa altsaa nu have Formen (46). I det mindste een af Størrelserne  $m_1, m_2, m_3$  maa være 2; thi ellers vilde den mindste Værdi af  $\frac{m_1 - 1}{2m_1}$  være  $\frac{1}{3}$ , og

$$\frac{N}{2} \left( \frac{m_1 - 1}{m_1} + \frac{m_2 - 1}{m_2} + \frac{m_3 - 1}{m_3} \right) \geq N,$$

hvad der er umuligt.

Vi kunne da sætte  $m_1 = 2$ , og faa da

$$\frac{N}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{m_2 - 1}{m_2} + \frac{m_3 - 1}{m_3} \right) + 1 = N,$$

eller

$$N = \frac{4m_2 m_3}{2m_3 + 2m_3 - m_2 m_3}.$$

Man maa da have

$$2m_2 + 2m_3 - m_2 m_3 > 0,$$

eller

$$(m_2 - 2)(m_3 - 2) < 4.$$

<sup>1)</sup> Det er klart, at hvis  $m_1$  lige, maa der ogsaa være en Potens af  $A_1$ , der ombytter  $B_1$ 's Dobbelpunkter, naar  $B_1$  ombytter  $A_1$ 's Dobbelpunkter.

Vi kunne da have følgende Tilfælde:

$$m_2 = 2, \quad m_3 \text{ vilkaarlig,}$$

$$m_2 = 3, \quad m_3 = 3,$$

$$m_2 = 3, \quad m_3 = 4,$$

$$m_2 = 3, \quad m_3 = 5.$$

I første Tilfælde maa Gruppen bestaa af  $N = 2m_3$  Transformationer.

Den skal indeholde 2 Transformationer  $A$  og  $B$  af 2den Orden med forskjellige tilhørende Samlinger, der hver indeholde  $\frac{N}{4} = \frac{m_3}{2}$  Transformationer, og desuden en Transformation  $C$  af  $m_3$ -die Orden med tilhørende Samlinger indeholdende  $\frac{m_3 - 1}{2m_3} N = m_3 - 1$  Transformationer. Altsaa maa de  $C$  tilhørende Samlinger kun bestaa af Potenserne af  $C$ . Det ses, at  $m_3$  maa være et lige Tal, da  $\frac{m_3}{2}$  skal være hel.

Der eksisterer en saadan Gruppe, den cykliske Gruppe.

Er dernæst

$$m_2 = 3, \quad m_3 = 3,$$

faar man  $N = 12$ ; men Gruppen er umulig. Den skulde bestaa af en Transformation af 2den Orden med tilhørende Samling paa 3 Transformationer, og 2 Samlinger paa 4 Transformationer hver, hørende til 2 Transformationer  $B$  og  $C$  af 3die Orden.

En af Transformationerne,  $A$ , maatte ombytte Dobbelpunkterne for  $B$ ; men da har man

$$\begin{aligned} ABA &= B^{-1}, \\ AB &= B^{-1}A, \end{aligned}$$

saa at  $AB$  er af 2den Orden, da den er sin egen omvendte Transformation, og paa samme Maade er da ogsaa  $AB^{-1}$  af 2den Orden. De 3 Transformationer af 2den Orden i Gruppen ere da  $A$ ,  $AB$ ,  $AB^{-1}$ . De ombytte alle 3  $B$ 's Dobbelpunkter. Men paa samme Maade ses, at alle 3 Transformationer ombytte  $C$ 's Dobbelpunkter og altsaa kunne skrives  $A$ ,  $AC$ ,  $AC^{-1}$ , hvad der er umuligt, da dette vilde fordre, at  $C$  var identisk med en Potens af  $B$ .

Vi have dernæst

$$\underline{m_2 = 3, \quad m_3 = 4.}$$

$N$  bliver 24, Gruppen kommer til at bestaa af een Transformation af 2den, een af 3die og een af 4de Orden med tilhørende Samlinger, paa henholdsvis 6, 8, 9 Transformationer. Gruppen eksisterer, den saakaldte Oktaedergruppe eller Kubusgruppe.

Endelig har man

$$m_2 = 3, \quad m_3 = 5.$$

Dette giver  $N = 60$ . Gruppen kommer til at bestaa af een Transformation af 2den Orden, een af 3die Orden og een af 5te Orden med tilhørende Samlinger paa henholdsvis 15, 20 og 24 Transformationer.

Gruppen eksisterer, den saakaldte Ikosaedergruppe eller Dodekaedergruppe.

20) Da Bestemmelsen af de mulige Grupper er af saa stor Vigtighed, skal den foretages paa en ny Maade, idet vi udelukkende støtte os paa den Form, det i det foregaaende er vist at Transformationerne maatte have, og antage, at Grupperne mindst indeholde 2 Transformationer med forskellige Dobbelpunkter.

Vi have vist, at i enhver Transformation

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \end{cases}$$

hørende til en endelig Gruppe kunne vi antage

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1, \quad a_1 = \overline{b_2} \quad \text{og} \quad a_2 = -\overline{b_1}.$$

Vi antage desuden, at der til Gruppen hører en Transformation

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y, \end{cases}$$

hvis Dobbelpunkter ere  $x = 0, y = 0$ . Har da  $A$  Dobbelpunkterne  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , saa er Dobbeltforholdet mellem  $A$ 's og  $B$ 's Dobbelpunkter

$$f = \frac{x_1}{y_1} : \frac{x_2}{y_2},$$

og om dette kunne vi vise, at det er reel.

$A$ 's Multiplikatorer bestemmes ved Ligningen

$$\mu^2 - (a_1 + \overline{a_1})\mu + 1 = 0, \quad (47)$$

og er  $\mu_1$  én af Rødderne i denne Ligning, har man da  $\frac{x_1}{y_1}$  bestemt ved

$$\mu_1 x_1 = a_1 x_1 + b_1 y_1$$

eller

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{b_1}{\mu_1 - a_1}.$$

Men af Ligningen (47) følger, da  $\mu$  skal være en Rod af Enheden,

$$\mu_1 - a_1 = \overline{a_1 - \mu_1},$$

saa at  $\mu_1 - a_1$  er lig med sin egen konjugerede Størrelse med modsat Fortegn eller er rent imaginær.

Vi have da

$$f = \frac{\mu_1 - a_1}{\mu_2 - a_1},$$

idet  $\mu_2$  er den anden Rod i (47) og  $\mu_2 - a_1$  ligeledes er rent imaginær. Men (48) viser da, at  $f$  er reel.

Da  $A$  og  $B$  kan være 2 vilkaarlige Transformationer i Gruppen, faar man:

I en endelig Transformationsgruppe, der transformerer en ret Linie til sig selv, er Dobbeltforholdet mellem Dobbelpunkterne for to vilkaarlige Transformationer henhørende til Gruppen altid reelt.

21) Som Følge af 20) kunne vi paavise, at enhver endelig Gruppe Transformationer, der transformerer en ret Linie til sig selv, altid indeholder en Transformation af 2den Orden.

Vi kunne nemlig altid antage, at Gruppen indeholder 2 Transformationer  $A$  og  $B$ , hvis Dobbelpunkter ere reelle, og vi antage, at de have forskellige Dobbelpunkter og ikke selv ere af 2den Orden, da der i sidste Tilfælde ikke behøvedes noget Bevis.

$B$  antages at have Formen

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \bar{a}y, \end{cases}$$

medens  $A$  har Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1x + b_1y \\ \mu y' = a_2x + b_2y, \end{cases}$$

hvor  $a_1 = \bar{b}_2$ ,  $a_2 = -\bar{b}_1$ .

Transformeres disse Transformationer ved

$$\begin{aligned} \mu x' &= px \\ \mu y' &= qy, \end{aligned}$$

bliver  $B$  uforandret, medens  $A$  bliver til

$$\begin{aligned} \mu x' &= a_1x + \frac{q}{p}b_1y \\ \mu y' &= a_2\frac{p}{q}x + b_2y, \end{aligned}$$

og bestemmes nu

$$\frac{q}{p}b_1 = i|b_1|,$$

vil man have  $\frac{p}{q}a_2 = i|b_1|$ , saa at Dobbelpunkterne for  $A$  efter 20) ere reelle.

Danne vi nu  $AB^2A$  og antage, at denne er af  $n$ te Orden, saa er  $(AB^2A)^{\frac{n}{2}}$  af 2den Orden, hvis  $n$  er lige.

Hvis  $n$  derimod er ulige, saa er

$$(AB^2A)^{\frac{n-1}{2}}AB \cdot BA(AB^2A)^{\frac{n-1}{2}}$$

en identisk Transformation. De 2 Dele, der ere adskilte ved Multiplikationstegnet, ere saaledes beskafne, at den ene faas af den anden ved at ombytte  $A$  med  $B$ . Da Dobbelpunkterne i  $A$  og  $B$  ere reelle, saa faas de omvendte Transformationer af  $A$  og  $B$  ved i Stedet for Koefficienterne i Transformationsligningerne at sætte de konjugerede Størrelser. Dette ses let ved at henhøre Transformationerne til Dobbelpunkterne, og altsaa for  $A$  sætte

$$\begin{aligned}\mu(x'y_1 - y'x_1) &= a'(xy_1 - yx_1) \\ \mu(x'y_2 - y'x_2) &= \bar{a}'(xy_2 - yx_2),\end{aligned}$$

idet  $(x_1, y_1)$   $(x_2, y_2)$  er Dobbelpunkternes Koordinater,  $a'$ ,  $\bar{a}'$  Transformationens Multiplikatorer.

Man har da, at

$$C \equiv (AB^2A)^{\frac{n-1}{2}} AB$$

og

$$C_1 \equiv (A^{-1}B^{-2}A^{-1})^{\frac{n-1}{2}} A^{-1}B^{-1}$$

have konjugerede Multiplikatorer og konjugerede Dobbelpunkter (d. v. s. Koordinaterne til deres Dobbelpunkter have konjugerede Værdier).

Men kaldes

$$BA(AB^2A)^{\frac{n-1}{2}} \equiv C_2,$$

saa har man

$$C_1 \equiv C_2^{-1},$$

og da  $CC_2 \equiv 1$  (d. v. s. er identisk), har man

$$C \equiv C_1.$$

$C$  og  $C_1$ 's Dobbelpunkter ere da fælles, og da  $C$  bliver uforandret ved at dens Multiplikatorer og Koordinaterne til dens Dobbelpunkter ombyttes med deres konjugerede Størrelser, maa disse sidste enten være reelle eller konjugerede imaginære Størrelser. Have Dobbelpunkterne reelle Koordinater, skal Transformationen blive uforandret ved at dens Multiplikatorer ombyttes med deres konjugerede Størrelser, d. v. s. Transformationen og dens omvendte Transformation skulle være identiske, den maa være af 2den Orden eller identisk.

Skulde den være identisk, maatte man have, at  $AB^2A$  og  $AB$  havde samme Dobbelpunkter. Men da havde man, at

$$BA \equiv B^{-1}A^{-1} \cdot AB^2A$$

havde samme Dobbelpunkter som  $AB$ , og da

$$BA \equiv B \cdot AB \cdot B^{-1},$$

havde  $BA$  og  $AB$  samme Multiplikatorer og ere altsaa identiske eller omvendte Transformationer.

I første Tilfælde vilde man have

$$BA \equiv AB$$

eller

$$B \equiv ABA^{-1},$$

hvad der medfører, at baade  $A$  og  $B$  ere af 2den Orden, stridende mod vore Forudsætninger.



I sidste Tilfælde vilde  $AB^2A$  være en identisk Transformation, og altsaa kunde  $C$ , der da blev identisk med  $AB$ , ikke være det.

Vare Koordinaterne til  $C$ 's Dobbelpunkter konjugeret imaginære Størrelser, havde man, naar disses Koordinater kaldtes  $\frac{\xi_1}{\eta_1}$ ,  $\frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\eta}_1}$ , da Dobbeltforholdet mellem Dobbelpunkterne for 2 vilkaarlige Transformationer skal være reelt<sup>1)</sup>,

$$\frac{\xi_1}{\eta_1} : \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\eta}_1} = -1,$$

da for at  $\frac{\xi_1}{\eta_1} : \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\eta}_1}$  skal være reel, enten  $\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\eta}_1}$ , idet begge Størrelser ere reelle, hvad der strider mod Forudsætningen, eller  $\frac{\xi_1}{\eta_1} = -\frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\eta}_1}$ , idet begge Størrelser ere rent imaginære.

Vi skulle nu vise, at der ogsaa i dette Tilfælde maa forekomme Transformationer af 2den Orden i Gruppen.

Vi antage da, at Gruppen indeholder en Transformation

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = -\bar{b}_1 x + \bar{a}_1 y \end{cases}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \bar{a}y, \end{cases}$$

og at  $A$  og  $B$ 's Dobbelpunkter ere harmonisk konjugerede.

$A$ 's Dobbelpunkter ere bestemte ved

$$\frac{x}{b_1} = \frac{y}{\mu - a_1},$$

hvor  $\mu$  er Rod i Ligningen

$$\mu^2 - \mu(a_1 + \bar{a}_1) + 1 = 0,$$

og man maa da have, da  $A$ 's og  $B$ 's Dobbelpunkter skulle være harmonisk konjugerede,

$$\frac{\mu - a_1}{\mu - \bar{a}_1} = -1$$

eller

$$2a_1 = \mu + \bar{\mu},$$

saa at  $a_1$  er reel.

Vi kunne da ogsaa antage, at  $b_1$  er reel (smlgn. S. 49). Transformationen  $A$  kan da skrives, idet  $a$  og  $b$  ere reelle Størrelser,

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ax + by \\ \mu y' = -bx + ay. \end{cases}$$

Vi kunne tillige antage  $a$  og  $b$  forskjellige fra 0, det første fordi  $A$  ellers var givet at være af 2den Orden.

<sup>1)</sup> Da  $\frac{\xi_1}{\eta_1} : \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\eta}_1}$  er Dobbeltforholdet mellem  $B$  og  $C$ 's Dobbelpunkter.

Vi kunne nu antage, at  $A$  er den af alle de Transformationer, hvis Dobbelpunkter ere harmonisk konjugerede med  $B$ 's Dobbelpunkter, hvor den første og sidste Koefficient har den numerisk mindste Værdi. Lad os da danne Transformationen

$$AB^m A B^{-m} A.$$

Denne faar Transformationsdeterminanten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & \alpha^{2m} b \\ -\bar{\alpha}^{2m} b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = \\ \begin{vmatrix} a^3 - \alpha^{2m} b^2 a - \bar{\alpha}^{2m} a b^2 - a b^2, & 2a^2 b + \alpha^{2m} a^2 b - \bar{\alpha}^{2m} b^3 \\ -2a^2 b - \bar{\alpha}^{2m} a^2 b + \alpha^{2m} b^3, & a^3 - \alpha^{2m} b^2 a - \bar{\alpha}^{2m} a b^2 - a b^2 \end{vmatrix},$$

og dennes Dobbelpunkter ere ogsaa harmonisk forbundne med  $B$ 's Dobbelpunkter, da første og sidste Element ere reelle.

Man skal da have

$$| a^3 - \alpha^{2m} a b^2 - \bar{\alpha}^{2m} a b^2 - a b^2 | > | a |$$

eller

$$| a^2 - b^2 (\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} + 1) | \geq 1;$$

men er  $\alpha$  forskjellig fra  $i$ , kan man altid vælge  $m$  saaledes at

$$-2 < \alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} < 0^1),$$

saa at

$$| \alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} + 1 | < 1$$

og altsaa, da  $a^2 + b^2 = 1$ ,

$$| a^2 - b^2 (\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} + 1) | < 1.$$

Vi se saaledes, at den gjorte Antagelse ikke kan være rigtig.

22) Vi ville nu anvende det her udviklede til rent algebraisk at bestemme de mulige Grupper. Vi antage stadigt, at der til Gruppen hører 2 Transformationer  $A$  og  $B$ , af hvilke vi endda antage  $A$  af anden Orden, og antage, at baade  $A$  og  $B$  have reelle Dobbelpunkter (smlgn. S. 49).

Vi kunne da antage

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \bar{a}y \end{cases} \\ A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + iby \\ \mu y' = ibx + \bar{a}_1 y, \end{cases}$$

hvor  $b$  er reel.

Da  $A$  er af 2den Orden, skal dens Multiplikatorer være  $i$  og  $-i$ , og man maa da have

$$a_1 + \bar{a}_1 = 0,$$

<sup>1)</sup> Er nemlig  $\alpha^2 = \cos 2u + i \sin 2u$ , kan man altid vælge  $u$  saaledes, at  $2mu$  ligger i 2den eller 3die Kvadrant.

saa at  $a_1$  er en rent imaginær Størrelse,  $a_1 = ia$ , hvor  $a$  er en reel Størrelse. Vi have da

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iay. \end{cases}$$

Vi kunne nu enten antage, at Gruppen indeholder lutter Transformationer af 2den Orden, for hvilke Koefficienten til  $x$  i første Transformationsligning er 0, eller at dette ikke er Tilfældet. Lad os begynde med det sidste Tilfælde og antage, at i første Transformationsligning for  $A$ ,  $a$  er forskjellig fra 0.

Lad os danne Transformationen

$$AB^m AB^{-m} A,$$

som ogsaa er af 2den Orden ( $A$  transformeret ved  $AB^m$ ).

I Stedet for selve Transformationerne opskrives, hvad her oftere vil blive brugt i det følgende, kun deres Determinanter.

Vi have da

$$\begin{vmatrix} ia & ib \\ ib & -ia \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ia & ib a^{2m} \\ ib a^{2m} & -ia \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ia & ib \\ ib & -ia \end{vmatrix} \equiv \\ \begin{vmatrix} ia(-a^2 - b^2(a^{2m} + \bar{a}^{2m}) + b^2), & ib(-2a^2 + a^2 a^{2m} - b^2 \bar{a}^{2m}) \\ ib(-2a^2 + a^2 \bar{a}^{2m} - b^2 a^{2m}), & -ia(-a^2 - b^2(a^{2m} + \bar{a}^{2m}) + b^2). \end{vmatrix}$$

Vi antage nu om  $A$ , at den er saaledes valgt, at Koefficienten til  $x$  i første Ligning har den numeriske mindste Værdi forskjellig fra 0, den kan have i nogen Transformation af 2den Orden hørende til Gruppen. Vi skulle da have

$$|a| \leq |a(-a^2 - b^2(a^{2m} + \bar{a}^{2m} - 1))|,$$

med mindre

$$-a^2 - b^2(a^{2m} + \bar{a}^{2m} - 1) = 0.$$

Men vi have  $a^2 + b^2 = 1$ , og faa da, idet vi sætte  $a = \cos u + i \sin u$ ,

$$-a^2 - b^2(a^{2m} + \bar{a}^{2m} - 1) = -1 + 2b^2(1 - \cos 2mu) = -1 + 4b^2 \sin^2 mu,$$

og maa da enten for alle Værdier af  $m$  have

$$-1 + 4b^2 \sin^2 mu = 0 \tag{49}$$

eller

$$|-1 + 4b^2 \sin^2 mu| \geq 1. \tag{50}$$

Det ses, at  $-1 + 4b^2 \sin^2 mu$  da maa være en positiv Størrelse, da  $4b^2 \sin^2 mu$  er positiv, og

$$-1 + 4b^2 \sin^2 mu > +1,$$

idet vi altid kunne vælge  $m$ , saa at  $|\sin mu| > 0$ , Ligningen (50) kan da skrives

$$2b^2 \sin^2 mu > 1,$$

og da  $b < 1$ ,

$$\sin^2 mu > \frac{1}{2}$$

$$|\sin mu| > \sqrt{\frac{1}{2}}. \tag{51}$$

Ligning (49) giver

$$|\sin mu| > \frac{1}{2}; \quad (52)$$

men det er tydeligt, at kan (52) ikke finde Sted for alle Værdier af  $m$ , kan (51) end mindre gjøre det.

Er  $B$  nu en Transformation af  $n$ te Orden, saa kunne vi, hvad enten  $n$  er lige eller ulige antage  $u = \frac{p\pi}{n}$ , hvor  $n$  og  $p$  ere indbyrdes primiske.

Den numerisk mindste Værdi,  $\sin mn$  kan have, foruden 0, er da  $\sin \frac{\pi}{n}$ , og man maa da have

$$\sin \frac{\pi}{n} > \frac{1}{2}$$

$$n < 6.$$

Vi se saaledes, at hvis en endelig Gruppe indeholder en Transformation af Formen  $B$ , og desuden Transformationer af 2den Grad, hvis 1ste Koefficient ikke er 0, kan Gruppen i det højeste indeholde Transformationer af 5te Orden.

Idet vi stadigt antage Gruppen bragt paa en saadan Form, at én af dens Transformationer har Formen  $B$ , antage vi nu, at alle dens Transformationer af 2den Orden af Formen  $A$  have den 1ste Koefficient i 1ste Transformationsligning lig 0.

Gruppen indeholder da 2 Transformationer, som kan gives Formerne

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = y \\ \mu y' = -x \end{cases}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \bar{\alpha} y. \end{cases}$$

Gruppen kan da ikke indeholde nogen Transformation af Formen

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = -\bar{b}_1 x + \bar{a}_1 y, \end{cases}$$

hvor  $a_1$  og  $b_1$  begge ere forskjellige fra 0.

$A$ 's og  $B$ 's Dobbelpunkter ere nemlig harmonisk konjugerede; og det ses let, at dette er den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at 2 givne Transformationer  $A$  og  $B$ ,  $A$  af 2den Orden,  $B$  af en vilkaarlig Orden kunne transformeres til de Former,  $A$  og  $B$  her have.  $C$ 's Dobbelpunkter maa da ogsaa være harmonisk konjugerede med  $A$ 's Dobbelpunkter; thi ellers kunde man transformere Gruppen, saa at  $C$  fik en lignende Form, som nu  $B$  har, og  $A$  vilde da ikke længer have sin første Koefficient lig 0. Ere nu  $C$ 's Multiplikatorer  $\mu'$  og  $\bar{\mu}'$ , er Betingelsen for at  $C$ 's og  $A$ 's Dobbelpunkter ere konjugerede

$$\frac{b_1}{\mu' - a_1} \cdot \frac{b_1}{\bar{\mu}' - a_1} = -1,$$

idet  $A$ 's Dobbelpunkter ere  $\frac{x}{y} = \pm i$ .

Da man har

$$\mu' + \overline{\mu'} = a_1 + \overline{a_1}$$

faas

$$\frac{b_1^2}{1 - |a_1|^2} = \frac{\overline{b_1^2}}{|\overline{b_1}|^2} = -1,$$

hvad der vilde kræve, at  $b_1$  var rent imaginær. Men var  $b_1$  rent imaginær og dannede man

$$BC \equiv \begin{cases} \mu x' = a a_1 x + a b_1 y \\ \mu y' = -\overline{a} b_1 x + \overline{a} \overline{a_1} y, \end{cases}$$

da var her ikke  $a b_1$  rent imaginær, og altsaa  $BC$ 's Dobbelpunkter ikke harmonisk konjugerede med  $A$ 's, hvorved ses, at Gruppen umuligt kan indeholde en Transformation af Formen  $C$ .

Gruppen kunde da kun indeholde én Transformation og dens Potenser af Formen  $B$ , og desuden kun Transformationer af Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = by \\ \mu y' = -\overline{b} x. \end{cases}$$

Lad os nu antage, at Transformationsgruppen indeholder en Transformation af Formen

$$A_1 \equiv \begin{cases} \mu x' = b_1 y \\ \mu y' = -\overline{b_1} x, \end{cases}$$

saa er

$$A A_1 \equiv \begin{cases} \mu x' = -\overline{b} \overline{b_1} x \\ \mu y' = -\overline{b} b_1 y, \end{cases}$$

altsaa en Transformation med samme Dobbelpunkter som  $B$ , og kan altsaa, naar  $B$  er passende valgt (smlgn. S. 42), sættes lig en Potens af  $B$ . Vi have da

$$A A_1 = B^m$$

eller

$$A_1 = A B^m.$$

Vi kunne da danne hele Gruppen ved Hjælp af  $A$  og  $B$ , og se, at den kun kommer til at bestaa af  $B$  og dens Potenser samt  $n$  Transformationer af 2den Orden<sup>1)</sup>, som faas ved at multiplicere  $A$  med Potenser af  $B$ , idet  $B$  antages at være af  $n$ te Orden.

23) Vi ville nu danne en Oversigt over de mulige endelige Transformationsgrupper.

A) Gruppen kan bestaa af Potenser af én Transformation af  $n$ te Orden. Gruppen indeholder

$$N = n$$

Transformationer.

B) Gruppen indeholder Transformationer med forskellige Dobbelpunkter.

Den kan da indeholde (22):

<sup>1)</sup> At de ere af 2den Orden bevises senere se 24).

- 1) Enten én Transformation af en vilkaarlig høj  $n^{\text{te}}$  Orden, og Transformationer af 2den Orden der ombytte den 1ste Transformations Dobbelpunkter. Gruppen indeholder (19)

$$N = 2n$$

Transformationer.

Den indeholder, hvis  $n$  ulige, én Samling Transformationer af 2den Orden, hvis  $n$  lige, 2 saadanne Samlinger, i de 2 Tilfælde paa henholdsvis  $n$  og  $\frac{n}{2}$  Transformationer.

- 2) Gruppen indeholder flere Transformationer af højere end 2den Orden med forskellige Dobbelpunkter.

Den indeholder da ifølge (22) ikke Transformationer af højere end 5te Orden. Den kan indeholde ifølge (19):

- a)  $N = 12$  Transformationer, bestaaende af en Transformation af 3die Orden med dertil hørende Samlinger paa i Alt 8 Transformationer, og en Transformation af 2den Orden med dertil hørende Samling paa 3 Transformationer.

Dette er den saakaldte Tetraedergruppe.

- b)  $N = 24$  Transformationer af i det højeste 4de Orden. De bestaa af en Transformation af 4de Orden med tilhørende Samlinger paa i Alt 9 Transformationer, en Transformation af 3die Orden med tilhørende Samlinger paa i Alt 8 Transformationer og en Transformation af 2den Orden med tilhørende Samling paa i Alt 6 Transformationer

Dette er den saakaldte Oktaedergruppe eller Kubusgruppe.

- c)  $N = 60$  Transformationer i det højeste af 5te Orden. De bestaa af en Transformation af 5te Orden med tilhørende Samlinger paa i Alt 24 Transformationer, en Transformation af 3die Orden med tilhørende Samlinger paa 20 Transformationer og en Transformation af 2den Orden med tilhørende Samling paa 15 Transformationer.

Gruppen er den saakaldte Ikosaedergruppe eller Dodekaedergruppe.

- 24) Vi skulle nu til virkeligt at vise Dannelsen af disse Grupper.

Vi begynde med den cykliske Gruppe, hvis Dannelse egentlig allerede er vist (se 22).

Den skal indeholde en Transformation  $B$

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \bar{a}y \end{cases}$$

af en vilkaarlig høj Orden  $n$ , og en Transformation

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = by \\ \mu y' = -\bar{b}x \end{cases}$$

af 2den Orden der ombytter  $B$ 's Dobbelpunkter. Man har da

og

$$AB^m A = B^{-m}$$

$$AB^m = B^{-m}A,$$

hvoraf ses, at  $AB^m$  er af 2den Orden, da den er sin egen omvendte Transformation.

Det ses let, at Gruppen kun indeholder Transformationer af Formerne

$$A \text{ og } AB^m,$$

thi da  $AB^m A \equiv B^{-m}$ , kan man reducere et Produkt af Transformationer

$$B^m A B^{m_1} A B^{m_2} A \dots$$

ved stadigt at erstatte  $AB^{m_1} A$  ved  $B^{-m_1}$  o. s. v., til kun at indeholde i det højeste 3 Faktorer og altsaa til at faa Formen

$$B^p A B^{p_1},$$

og ved her for  $B^p A$  at sætte  $AB^{-p}$  til

$$AB^{p_1-p}.$$

Herved er da Gruppens Endelighed bevist, og tillige ses ifølge 22), at naar  $B$  er passende valgt får man den fuldstændige Gruppe og ikke en Undergruppe.

Det ses ogsaa, at den indeholder  $(n-1)$  Potenser af  $B$ , og  $n$  Transformationer af 2den Orden, der alle ombytte  $B$ 's Dobbelpunkter. Gjorde nemlig en af dem ikke dette, vilde Gruppen mindst indeholde 2 Transformationer af  $n$ te Orden med forskellige Dobbelpunkter.

Transformeres  $A$  ved en vilkaarlig Transformation af Gruppen, som kan skrives  $B^m A^s$ , faas

$$B^m A^s . A . A^s B^{-m} = B^m A B^{-m} = AB^{-2m}.$$

Er  $n$  nu et ulige Tal, ses da Samlingen, hvortil  $A$  hører, at indeholde alle  $n$  Transformationer af 2den Orden, som høre til Gruppen. Er  $n$  derimod lige, saa er  $B^{-2m} = B^{2(\frac{n}{2}-m)}$ , og Samlingen, hvortil  $A$  hører, kommer kun til at indeholde  $\frac{n}{2}$  Transformationer. Der er altsaa i dette Tilfælde 2 Samlinger Transformationer af 2den Orden.

25) Vi skulle nu betragte Tetraedergruppen.

Gruppen skal i dette Tilfælde indeholde en Transformation af 3die Orden og en af 2den Orden, der ikke ombytter Dobbelpunkterne for Transformationen af 3die Orden.

Vi kalde disse Transformationer

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = iax + by \\ \mu y' = ibx - iax \end{cases}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = ay \end{cases} \quad a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

hvor  $A$  er af 2den,  $B$  af 3die Orden, og hvor vi antage Gruppen transformeret, saa at baade  $A$  og  $B$  have reelle Dobbelpunkter, saa at  $a$  og  $b$  ere reelle.

Til Gruppen hører da ogsaa

$$BA \equiv \begin{cases} \mu x' = i a a x + i a b y \\ \mu y' = i \bar{a} b x - i \bar{a} a x \end{cases}$$

og

$$B^2 A \equiv \begin{cases} \mu x' = i \bar{a} a x + i \bar{a} b y \\ \mu y' = i a b y - i a a x, \end{cases}$$

hvor man ogsaa gjerne kunde skrive

$$B^2 A \equiv \begin{cases} \mu x' = -i \bar{a} a x - i \bar{a} b y \\ \mu y' = -i a b x + i a a y. \end{cases}$$

$BA$  og  $B^2 A$  ses da at have de samme Multiplikatorer, og da  $a$  ikke er 0, maa baade  $AB$  og  $A^2 B$  være af 3<sup>die</sup> Orden. Man maa da have, at den reelle Del af  $i a a$  er  $\cos \frac{2\pi}{6}$  (eller  $\cos \frac{2\pi}{3}$ , det er ligegyldigt, hvad vi sætte, da alle Koefficienter i Transformationen, uden at forandre denne, kunne erstattes ved de samme Størrelser med negativt Fortegn). Vi have altsaa, idet  $a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ,

$$\frac{-a\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Da  $a^2 + b^2 = 1$ , er  $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , og altsaa maa Transformationerne  $A$  og  $B$  have Formen

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} x \\ \mu y' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} y \end{cases} \quad (54)$$

og

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{i\sqrt{3}}{3} x + \frac{i\sqrt{6}}{3} y \\ \mu y' = \frac{i\sqrt{6}}{3} x - \frac{i\sqrt{3}}{3} y. \end{cases} \quad (55)$$

Ved Sættelse af  $A$  med Potenser af  $B$  faar man Transformationer af Formen

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{i a^p \sqrt{3}}{3} x + \frac{i a^q \sqrt{6}}{3} y \\ \mu y' = \frac{i \bar{a}^q \sqrt{6}}{3} x - \frac{i \bar{a}^p \sqrt{3}}{3} y. \end{cases} \quad (56)$$

Det skal nu vises, at man ved at sammensætte 2 Transformationer af Formen  $C$  føres tilbage til Transformationer af Formen  $B$  eller  $C$ .



I Stedet for selve Transformationerne skrives her stadigt kun deres Determinanter. Vi have da

$$\begin{vmatrix} \frac{i\alpha^p\sqrt{3}}{3} & \frac{i\alpha^q\sqrt{6}}{3} \\ \frac{i\alpha^q\sqrt{6}}{3} & \frac{i\alpha^p\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{i\alpha^{p_1}\sqrt{3}}{3} & \frac{i\alpha^{q_1}\sqrt{6}}{3} \\ \frac{i\alpha^{q_1}\sqrt{6}}{3} & \frac{i\alpha^{p_1}\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha^{p+p_1}-2\alpha^{q-q_1}}{3} & \frac{\sqrt{2}(\alpha^{p+q_1}-\alpha^{q-p_1})}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(\alpha^{p+q_1}-\alpha^{q-p_1})}{3} & -\frac{\alpha^{p+p_1}-2\alpha^{q-q_1}}{3} \end{vmatrix}$$

Det gjælder da kun om at vise, at Elementerne

$$\alpha_1 = \frac{-\alpha^{p+p_1}-2\alpha^{q-q_1}}{3} = -\frac{\alpha^{p+p_1}(1+2\alpha^{q-p-p_1-q_1})}{3}$$

og

$$b_1 = -\frac{\sqrt{2}(\alpha^{p+q_1}-\alpha^{q-p_1})}{3} = -\frac{\sqrt{2}\alpha^{p+q_1}(1-\alpha^{q-p-p_1-q_1})}{3},$$

atler have samme Former som de tilsvarende Elementer i Transformationsdeterminanterne for (54) og (56).

Men som det ses, kommer dette kun an paa, hvilke Former

$$a' = -\frac{1+2\alpha^{q-p-p_1-q_1}}{3}$$

og

$$b' = -\frac{\sqrt{2}(1-\alpha^{q-p-p_1-q_1})}{3}$$

kunne antage. Vi kunne lade  $q-p-p_1-q_1$  være 0, 1 eller  $-1$ .

1) Er  $q-p-p_1-q_1 = 0$  faas

$$\begin{aligned} a' &= -1 \\ b' &= 0. \end{aligned}$$

Kaldes de 2 Transformationer, vi have multipliceret,  $C$  og  $D$ , faas da

$$CD \equiv B^{p+p_1}.$$

Er  $q-p-p_1-q_1 = \pm 1$ , faas

$$a' = -\frac{1+2\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)}{3} = \mp \frac{\sqrt{3}i}{3}$$

$$b' = -\frac{\sqrt{2}\left(1 - \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)}{3} = -\frac{\sqrt{2}(3 \mp i\sqrt{3})}{6} = \begin{cases} -\frac{i\sqrt{6}}{3} a \\ \frac{i\sqrt{6}}{3} a, \end{cases}$$

saa at  $CD$  bliver af Formen (56).

Det er saaledes vist, at Gruppen er endelig.

Da Transformationerne henhørende til Gruppen er indbefattet i Formerne  $B^m$  og  $C$ , hvor  $p$  og  $q$  kan gives Værdierne  $0, \pm 1$ , ses Gruppen at indeholde 11 Transformationer foruden den identiske Transformation, og den er saaledes ifølge det foregaaende fuldstændig, d. v. s. er ikke Undergruppe i nogen anden Gruppe, der indeholder Transformationer af i det højeste 3<sup>de</sup> Orden. Tager man ikke Hensyn til at Transformationsdeterminanten skal være 1, og sætter man  $x$  for  $\frac{x}{y}$ , kan Gruppen dannes ved følgende simple Transformationer

$$A \equiv x' = \frac{-x + 2}{x + 1}$$

og

$$B \equiv x' = \left( \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) x.$$

26) Oktaedergruppen eller Kubusgruppen.

Gruppen skal indeholde Transformationer af 2<sup>den</sup>, 3<sup>de</sup> og 4<sup>de</sup> Orden.

Vi antage, at der til Gruppen hører 2 Transformationer

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iay, \end{cases}$$

som er af 2<sup>den</sup> Orden, og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = ay, \end{cases} \quad \text{hvor } a = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2},$$

som er af 4<sup>de</sup> Orden, og ligesom før at  $a$  og  $b$  ere reelle. Vi faa da

$$BA \equiv \begin{cases} \mu x' = i\bar{a}ax + i\bar{a}by \\ \mu y' = i\bar{a}bx - i\bar{a}ay, \end{cases}$$

$$B^2A \equiv \begin{cases} \mu x' = -ax - by \\ \mu y' = bx - ay, \end{cases}$$

$$B^3A \equiv \begin{cases} \mu x' = i\bar{a}ax + i\bar{a}by \\ \mu y' = i\bar{a}bx - i\bar{a}ay, \end{cases}$$

hvor den sidste Transformation kan skrives

$$\begin{aligned} \mu x' &= -i\bar{a}ax - i\bar{a}by \\ \mu y' &= -i\bar{a}bx + i\bar{a}ay. \end{aligned}$$

$BA$  og  $B^3A$  have da samme Multiplikatorer, medens  $B^2A$  har forskjellige Multiplikatorer fra disse, og da ingen af disse Transformationer kunne være af 2<sup>den</sup> Orden, maa de være af 3<sup>de</sup> eller 4<sup>de</sup> Orden. Da nu  $-a$  er numerisk større end den reelle Del af  $i\bar{a}a$ , maa  $B^2A$  være af 4<sup>de</sup> Orden,  $BA$  og  $B^3A$  af 3<sup>de</sup> Orden. Vi have da

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Transformationerne  $A$  og  $B$  kunne da skrives

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{i\sqrt{2}}{2} x + \frac{i\sqrt{2}}{2} y \\ \mu y' = \frac{i\sqrt{2}}{2} x - \frac{i\sqrt{2}}{2} y \end{cases} \quad (57)$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} x \\ \mu y' = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} y. \end{cases} \quad (58)$$

Vi se da, at der i Gruppen maa forekomme alle mulige Transformationer af Formen

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{a^p i\sqrt{2}}{2} x + \frac{a^q i\sqrt{2}}{2} y \\ \mu y' = \frac{\bar{a}^q i\sqrt{2}}{2} x - \frac{\bar{a}^p i\sqrt{2}}{2} y, \end{cases} \quad (59)$$

hvor  $p + q \equiv 0 \pmod{2}$ , eller hvor  $p + q$  er et lige Tal.

Gruppens Endelighed vises nu ligesom ved Tetraedergruppen, ved at vise at Produktet af 2 Transformationer af Formen (59) atter blive enten af samme Form, af Formen (58) eller endelig af Formen

$$E \equiv \begin{cases} \mu x' = a^r y \\ \mu y = -\bar{a}^r x, \end{cases} \quad (60)$$

idet det let ses, at Sættelse af Transformationer af Formen (59) med Transformationer af de nævnte Former atter vil føre tilbage til de nævnte Former.

Idet vi atter kun opskrive Determinanterne, have vi

$$\begin{aligned} CD &\equiv \begin{vmatrix} \frac{a^p i\sqrt{2}}{2} & \frac{a^q i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\bar{a}^q i\sqrt{2}}{2} & -\frac{\bar{a}^p i\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{a^{p_1} i\sqrt{2}}{2} & \frac{a^{q_1} i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\bar{a}^{q_1} i\sqrt{2}}{2} & -\frac{\bar{a}^{p_1} i\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{-a^{p+p_1} - a^{q-q_1}}{2} & \frac{-a^{p+q_1} + a^{q-p_1}}{2} \\ \frac{\bar{a}^{p+q_1} - \bar{a}^{q-p_1}}{2} & \frac{-\bar{a}^{p+p_1} - \bar{a}^{q-q_1}}{2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Sætte vi her

$$\begin{aligned} a &= \frac{-a^{p+p_1} (1 + a^{q-q_1-p-p_1})}{2} \\ b &= \frac{-a^{p+q_1} (1 - a^{q-q_1-p-p_1})}{2}, \end{aligned}$$

skulle vi altsaa undersøge, hvilke Værdier disse Størrelser kunne antage, idet vi dog maa erindre, at  $p+p_1$  og  $q+q_1$  paa én Gang ere lige eller ulige, da deres Sum skal være et lige Tal, medens  $q-q_1-p-p_1$  altid er et lige Tal, som altsaa kan have Værdierne  $0, \pm 2, \pm 4$ .

Vi have da

$$\begin{aligned} 1) \quad & q - q_1 - p - p_1 = 0, \\ & a = -\alpha^{p+p_1}, \\ & b = 0. \end{aligned}$$

$CD$  har Formen (58).

$$\begin{aligned} 2) \quad & q - q_1 - p - p_1 = \pm 2, \quad \alpha^{q-q_1-p-p_1} = \pm i, \\ & a = \frac{-\alpha^{p+p_1}(1 \pm i)}{2} = \frac{-\alpha^{p+p_1} \pm i \sqrt{2}}{2}, \\ & b = \frac{-\alpha^{p+q_1}(1 \mp i)}{2} = \frac{\alpha^{p+q_1} \mp i \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Transformationen  $CD$  har Formen (59).

$$\begin{aligned} 3) \quad & q - q_1 - p - p_1 = 4, \quad \alpha^{q-q_1-p-p_1} = -1, \\ & a = 0, \quad b = -\alpha^{p+q_1}. \end{aligned}$$

Transformationen  $CD$  har Formen (60).

Gruppens Endelighed er saaledes bevist.

Det er let at se, hvor mange Transformationer Gruppen indeholder foruden den identiske Transformation. Thi  $C$  giver, naar  $p = 1$  eller  $3$ ,  $q = 1, 3, 5, 7$  otte Transformationer af 3<sup>de</sup> Orden, naar  $p = 2$ ,  $q = 0, 2, 4, 6$  fire Transformationer af 4<sup>de</sup> Orden, endelig naar  $p = 0$ ,  $q = 0, 2, 4, 6$  fire Transformationer af 2<sup>den</sup> Orden. Endelig ses det, at der er fire Transformationer af 2<sup>den</sup> Orden af Formen (60) og at Potenserne af  $B$  giver 3 Transformationer, 2 af 4<sup>de</sup>, 1 af 2<sup>den</sup> Orden. Man faar da i det Hele med den identiske Transformation 24 Transformationer.

Det ses heraf, at den fundne Gruppe ikke er Undergruppe i nogen anden endelig Gruppe for den rette Linie.

Tillige ses, at de fundne Tal stemme med, hvad der er fundet S. 56.

Kaldes  $\frac{x}{y}$  for  $x$ , og tager man ikke Hensyn til at Transformationsdeterminanten skal være 1, kan Gruppen dannes ved Sættning af Transformationerne

$$\begin{aligned} x' &= ix \\ x' &= \frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

og

27) Vi komme nu til den sidste endelige Gruppe for den rette Linie.

Denne, Ikosaedergruppen, skal efter det foregaaende (se S. 56) indeholde 60 Transformationer, 24 af 5te Orden, 20 af 3die Orden og 15 af 2den Orden. Gruppen indeholder altsaa en Transformation af 2den Orden og en Transformation af 5te Orden. Disse kalde vi

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = iby - iax \end{cases}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \bar{a}y, \end{cases} \text{ hvor } a = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

idet  $a$  og  $b$  ere reelle Tal.

Vi faa da

$$BA \equiv \begin{cases} \mu x' = iaa x + iaby \\ \mu y' = i\bar{a}bx - i\bar{a}ay; \end{cases}$$

$$B^2A \equiv \begin{cases} \mu x' = ia^2ax + ia^2by \\ \mu y' = i\bar{a}^2by - i\bar{a}^2ay, \end{cases}$$

hvor vi skulle have

$$ia(a - \bar{a}) = 2 \cos u$$

$$ia(a^2 - \bar{a}^2) = 2 \cos v,$$

hvor  $u$  og  $v$  ere 5te Dele eller 3die Dele af hele Omdrejningen.

Vi kunne da have  $\cos u$  og  $\cos v$  lig med

$$\frac{\sqrt{5} \pm 1}{4}, \quad \frac{1}{2},$$

vi vælge her  $a$  negativ, da vi kunne vælge den positiv eller negativ efter Behag. Vi faa

$$\frac{\cos u}{\cos v} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}.$$

Vi maa da enten have

$$\cos u = \frac{1}{2}$$

$$\cos v = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

eller

$$\cos u = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos v = \frac{1}{2}.$$

Vi faa da enten

$$a = \frac{1}{i(a-\bar{a})} = \frac{-2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{-\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10},$$

$$b = \frac{\pm\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}.$$

eller

$$a = \frac{1}{i(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2)} = \frac{-\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10},$$

$$b = \frac{\pm\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}.$$

Transformationen  $A$  er da

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{-i\sqrt{50 \pm 10\sqrt{5}}}{10} x \mp \frac{i\sqrt{50 \mp 10\sqrt{5}}}{10} y \\ \mu y' = \mp \frac{i\sqrt{50 \mp 10\sqrt{5}}}{10} x + \frac{i\sqrt{50 \pm 10\sqrt{5}}}{10} y. \end{cases} \quad (61)$$

Det skal siden vises, at Gruppen indeholder Transformationer af begge Former, idet dog øverste og nederste Førtegn svare til hinanden.

Vi se, at Gruppen indeholder Transformationer af Formen

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{-i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \alpha^p x - \frac{i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \alpha^q y \\ \mu y' = \frac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \alpha^q x + \frac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \alpha^p y, \end{cases} \quad (62)$$

og det vil vise sig, at den indeholder Transformationer af Formen

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \alpha^p x + \frac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \alpha^q y \\ \mu y' = \frac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \alpha^q x + \frac{i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \alpha^p y. \end{cases} \quad (63)$$

Endelig vil man faa Transformationer af Formen

$$E \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha^p y \\ \mu y' = -\bar{\alpha}^p x. \end{cases} \quad (64)$$

Multiplicerer man 2 Transformationer af Formen (62), faar man, idet atter kun deres Determinanter nedskrives, og Transformationerne kaldes  $C$  og  $F$

$$CF \equiv \begin{vmatrix} \frac{-i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \alpha^p, & \frac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \alpha^q \\ \frac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \alpha^q, & \frac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \alpha^p \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{-i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \alpha^{p_1}, & \frac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \alpha^{q_1} \\ \frac{-i\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \alpha^{q_1}, & \frac{i\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} \alpha^{p_1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10} \alpha^{p+p_1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \alpha^{q-q_1}\right), & -\frac{\sqrt{5}}{5} (\alpha^{p+q_1} - \alpha^{q-p_1}) \\ \frac{\sqrt{5}}{5} (\alpha^{p+q_1} - \alpha^{q-p_1}), & -\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10} \alpha^{p+p_1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \alpha^{q-q_1}\right). \end{vmatrix}$$

Vi sætte

$$\left. \begin{aligned} a &= -a^{p+p_1} \left[ \frac{5+V\sqrt{5}}{10} + \frac{5-V\sqrt{5}}{10} a^{q-q_1-p-p_1} \right] \\ b &= a^{p+q_1} \frac{V\sqrt{5}}{5} [1 - a^{q-q_1-p-p_1}], \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

og ville nu undersøge, hvilke Værdier  $a$  og  $b$  kunne antage for  $q-q_1-p-p_1 = 0, \pm 1, \pm 2$ .

$$1) \quad q-p-p_1-q_1 = 0$$

$$\begin{aligned} a &= a^{p+p_1} \\ b &= 0, \end{aligned}$$

Transformationen bliver en Potens af  $B$ .

$$2) \quad q-p-p_1-q_1 = \pm 1$$

$$\begin{aligned} a &= -a^{p+p_1} \left[ \frac{5+V\sqrt{5}}{10} + \frac{5-V\sqrt{5}}{10} \left( \frac{V\sqrt{5}-1}{4} \pm \frac{i\sqrt{10+2V\sqrt{5}}}{4} \right) \right] \\ &= \mp a^{p+p_1} i \frac{\sqrt{50+10V\sqrt{5}}}{10} \left[ \frac{V\sqrt{5}-1}{4} \mp \frac{i\sqrt{10+2V\sqrt{5}}}{4} \right] \\ &= \mp a^{p+p_1 \mp 1} i \frac{\sqrt{50+10V\sqrt{5}}}{10}, \\ b &= -a^{p+q_1} \frac{V\sqrt{5}}{5} [1 - a^{\pm 1}] = -a^{p+q_1} \frac{V\sqrt{5}}{5} \left[ \frac{5-V\sqrt{5}}{4} \mp \frac{i\sqrt{10+2V\sqrt{5}}}{10} \right] \\ &= \mp i \frac{\sqrt{50-10V\sqrt{5}}}{10} a^{p+q_1 \mp 2}, \end{aligned}$$

Transformationen er af Formen (62).

$$3) \quad \text{Vi sætte } q-q_1-p-p_1 = \pm 2.$$

Vi faa da

$$\begin{aligned} a &= -a^{p+p_1} \left[ \frac{5+V\sqrt{5}}{10} + \frac{5-V\sqrt{5}}{10} \left( \frac{-V\sqrt{5}-1}{4} \pm \frac{i\sqrt{10-2V\sqrt{5}}}{4} \right) \right] \\ &= \mp i \frac{\sqrt{50-10V\sqrt{5}}}{10} a^{p+p_1 \mp 1}, \\ b &= -a^{p+q_1} \frac{V\sqrt{5}}{5} [1 - a^{\pm 2}] \\ &= -a^{p+q_1} \frac{V\sqrt{5}}{5} \left[ \frac{5+V\sqrt{5}}{4} \mp \frac{i\sqrt{10-2V\sqrt{5}}}{4} \right] = \pm \frac{i\sqrt{50+10V\sqrt{5}}}{10} a^{p+q_1 \pm 1}. \end{aligned}$$

Denne Transformation er af Formen (63).

Multiplacere vi 2 Transformationer af Formen (63) med hinanden, faa vi med de samme Betegnelser

$$\left. \begin{aligned} a &= -\alpha^{q-q_1} \left[ \frac{5+V\sqrt{5}}{10} + \frac{5-V\sqrt{5}}{10} \alpha^{p+p_1-q+q_1} \right] \\ b &= -\alpha^{q-q_1} \frac{V\sqrt{5}}{5} [1 - \alpha^{p+p_1-q+q_1}], \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

hvor vi nu atter kunne bruge det lige udviklede, idet vi sætte  $p+p_1-q+q_1 = 0, \pm 1, \pm 2$ .

Endelig skal her undersøges Resultatet af en Multiplikation af en Transformation af Formen (62) og en Transformation af Formen (63).

Med de samme Betegnelser som før faar man

$$\left. \begin{aligned} a &= +\alpha^{q-q_1} \frac{V\sqrt{5}}{5} [1 - \alpha^{p+p_1-q+q_1}] \\ b &= +\alpha^{p+q_1} \left[ \frac{5+V\sqrt{5}}{10} + \frac{5-V\sqrt{5}}{10} \alpha^{q-q_1-p-p_1} \right], \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

hvor vi atter kunne benytte, hvad der er sagt om (65) og finde da, at vi for  $q-q_1-p-p_1 = 0$  faa Transformationer af Formen (64), for  $q-q_1-p-p_1 = \pm 1$  faa Transformationer af Formen (63) og endelig for  $q-q_1-p-p_1 = \pm 2$  faa Transformationer af Formen (62).

Her er en Transformation af Formen (62) multipliceret med en Transformation af Formen (63); men Multiplikation i den omvendte Orden havde givet ganske lignende Resultat.

Endelig ses det, at vi ikke ved at multiplicere de fundne Transformationer med en Transformation af Formen (64) vilde have faaet nye Transformationsformer frem.

Gruppens Endelighed er saaledes bevist.

Gruppen indeholder Transformationer af Formerne

$$\begin{aligned} B &\equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha^p x \\ \mu y' = \bar{\alpha}^p y, \end{cases} \\ C &\equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{i\sqrt{50+10V\sqrt{5}}}{10} \alpha^p x + \frac{i\sqrt{50-10V\sqrt{5}}}{10} \alpha^q y \\ \mu y' = \frac{i\sqrt{50-10V\sqrt{5}}}{10} \bar{\alpha}^q x - \frac{i\sqrt{50+10V\sqrt{5}}}{10} \bar{\alpha}^p y, \end{cases} \\ D &\equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{i\sqrt{50-10V\sqrt{5}}}{10} \alpha^p x - \frac{i\sqrt{50+10V\sqrt{5}}}{10} \alpha^q y \\ \mu y' = -\frac{i\sqrt{50+10V\sqrt{5}}}{10} \bar{\alpha}^q x - \frac{i\sqrt{50-10V\sqrt{5}}}{10} \bar{\alpha}^p y, \end{cases} \\ E &\equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha^p y \\ \mu y' = -\bar{\alpha}^p x, \end{cases} \end{aligned}$$

hvor  $p$  og  $q$  uafhængigt af hinanden kunne tillægges alle Værdier fra 0 til 4.



Det ses heraf, at der i Alt forekommer 60 Transformationer i den fundne Gruppe, saa at denne altsaa er fuldstændig og ikke Undergruppe i nogen anden Gruppe, der transformerer en ret Linie til sig selv.

Man faar de Transformationer af 2den Orden, som høre til Gruppen, ved i  $C$  og  $D$  at sætte  $p = 0$  i Forbindelse med Transformationerne  $E$ . Der er altsaa 15 saadanne Transformationer. Man har

$$\frac{i\sqrt{50 \pm 10\sqrt{5}}}{10} a^p - \frac{i\sqrt{50 \pm 10\sqrt{5}}}{10} \bar{a}^p = \pm 1,$$

naar for øverste For tegn paa venstre Side  $p = \pm 2$ , for nederste For tegn  $p = \pm 1$ .

Der findes altsaa 20 Transformationer af 3die Orden, af hvilke de 10 ere Potenser af de andre 10.

Der findes da endnu i Gruppen 25 Transformationer, af hvilke den ene er den identiske. De andre maa da være af 5te Orden. Af saadanne findes der da 24, der ere Potenser af 6 Transformationer med forskellige Dobbelpunkter. Det her fundne ses at stemme med S. 56.

#### IV. De endelige Transformationsgrupper, hvorved et Plan transformeres til sig selv (de endelige Transformationsgrupper for 2 Variable).

28) I de almindelige Bemærkninger, som ere gjorte om endelige Transformationsgrupper, er der ikke taget Hensyn til saadanne Grupper, der indeholde lutter Transformationer, som have 2 eller flere Multiplikatorer lige store. Ved Transformationen af den rette Linie til sig selv forekomme ikke saadanne Transformationer, der have flere Multiplikatorer lige store; men her kunne saadanne Transformationer optræde. Vi kalde saadanne Transformationer perspektiviske.

Enhver Transformation, der transformerer en ret Linie til sig selv, har altid 3 Dobbeltpunkter og 3 Dobbeltlinier. Er det en perspektivisk Transformation, maa dog enhver Linie, der gaar gennem dens ene Dobbeltpunkt, være en Dobbeltlinie, og ethvert Punkt paa den Linie, der forbinder de 2 andre Dobbeltpunkter, selv være et Dobbeltpunkt. Vi ville kalde det omtalte Dobbeltpunkt og den omtalte Dobbeltlinie Perspektivcentret og Perspektivaxen.

Haves 2 saadanne perspektiviske Transformationer, ville de begge lade den Linie, der forbinder deres Perspektivcentre og Skjæringspunktet mellem deres Perspektivaxer uforandret.

Lægges Koordinatsystemet saaledes, at den Linie, der forbinder Perspektivcentrene for 2 perspektiviske Transformationer  $A$  og  $B$  hørende til en Gruppe, er  $x = 0$ , og at Skjæringspunkterne mellem Perspektivaxerne er  $y = 0$ ,  $z = 0$ , samt saaledes at  $A$  har sit Centrum i  $x = 0$ ,  $y = 0$ , kunne disse Transformationer skrives

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = \bar{a}^2 z, \end{cases} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor  $B$  har endnu en Multiplikator lig  $a_1$ .

Dannes nu Transformationen  $AB$ , er denne

$$AB = \begin{cases} \mu x' = aa_1 x \\ \mu y' = ab_2 y + ac_2 z \\ \mu z' = \bar{a}^2 b_3 z + \bar{a}^2 c_3 z. \end{cases}$$

Skal  $AB$  atter være perspektivisk, maa man have, enten at

$$\begin{vmatrix} ab_2 - \mu, & ac_2 \\ \bar{a}^2 b_3, & \bar{a}^2 c_3 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

har lige Rødder, eller at een af Rødderne er lig med  $aa_1$ . I sidste Tilfælde har man, da Multiplikatorerne for  $B$  ere  $a_1, a_1, \bar{a}_1^2$ , for  $AB$   $aa_1, aa_1, \bar{a}^2 \bar{a}_1^2$ ,

$$\begin{aligned} b_2 + c_3 &= a_1 + \bar{a}_1^2, \\ ab_2 + \bar{a}^2 c_3 &= aa_1 + \bar{a}^2 \bar{a}_1^2, \end{aligned}$$

og heraf

$$c_3(a - \bar{a}^2) = \bar{a}_1^2(a - \bar{a}^2),$$

og da  $a$  ikke kan være en 3die Rod af Enheden, idet  $A$  da var identisk,

$$c_3 = \bar{a}_1^2, \quad b_2 = a_1.$$

Dette vilde medføre, at  $c_2 b_3 = 0$ , da Determinanten for  $AB$  skal være 1, og  $a_1 b_2 c_3 = 1$ . Da

$$A' \equiv \begin{cases} \mu y' = ay \\ \mu z' = \bar{a}^2 z \end{cases} \quad B' \equiv \begin{cases} \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

ere Transformationer, som transformere en ret Linie til sig selv, maa de ved deres Sammensætning danne en endelig Gruppe for den rette Linie. Men da maa  $c_2 b_3 = 0$ , som medfører, at en af Størrelserne  $c_2$  eller  $b_3$  er 0, ogsaa medføre, at den anden er 0 (se S. 38). Men  $A$  og  $B$  have da 3 Dobbelpunkter fælles.

Skulde derimod

$$\begin{vmatrix} ab_2 - \mu, & ac_2 \\ \bar{a}^2 b_3, & \bar{a}^2 c_3 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

have lige Rødder, maa man have, da

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ab_2 & ac_3 \\ \bar{a}^2 b_3 & \bar{a}^2 c_3 \end{vmatrix} &= \bar{a} a_1, \\ (ab_2 + \bar{a}^2 c_3)^2 &= 4 \bar{a}_1 \bar{a}, \end{aligned}$$

eller man maa have

$$|ab_2 + \bar{a}^2 c_3| = 2,$$

men dette er kun muligt, da Modulus af en Sum i det højeste er lig Summen af Addendernes Modulus, naar

$$|ab_2| = 1, \quad |\bar{a}^2 c_3| = 1,$$

idet vi atter tage Hensyn til at  $A'$  og  $B'$  skulde være Transformationer hørende til en endelig Gruppe for  $x = 0$ .

Men da haves  $|b_2| = 1, |c_3| = 1$ , hvorved vi atter føres til at  $b_3 = c_2 = 0$ , saa at  $A$  og  $B$  begge maa have de samme 3 Dobbelpunkter.

Skal altsaa ikke alle Transformationer i Gruppen have de samme 3 Dobbelpunkter, maa den indeholde Transformationer, der ikke ere perspektiviske, og vi se da, at vi paa Grupper, hvis Transformationer transformere et Plan til sig selv, kunne anvende de Sætninger, som i Afsnit I og II ere udviklede om Transformationernes Form.

29) Vi skulle dernæst til at undersøge, hvorvidt der kan være endelige Grupper, hvori Transformationerne kunne have Elementer i Transformationsdeterminanten, der ere 0, uden at den tilsvarende Underdeterminant er 0, idet vi have transformeret én af Gruppens Transformationer til Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z. \end{cases}$$

En saadan Transformation maa have Formen

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = \quad \quad b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = \quad \quad b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor  $b_1$  og  $c_1$  ikke begge ere 0, eller

$$B' \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor  $a_2$  og  $a_3$  ikke begge ere 0.

Vi skulle vise, at der ikke gives saadanne Grupper, og behøve kun at vise, at Gruppen ikke kan indeholde Transformationer af Formen  $B$ , idet  $B$  transformerer rette Linier ved en Transformation af Formen  $B'$ , d. v. s. Liniekoordinaterne transformeres ved en Transformation af denne Form.

Vi kunne desuden antage, at  $A$  ikke er perspektivisk, idet Gruppen maa indeholde ikke perspektiviske Transformationer, hvis ikke alle dens Transformationer ere af Formen  $A$ .  $A$  er da mindst af 3die Orden.  $A$  og  $B$  have et fælles Dobbelpunkt,  $y = z = 0$ , svarende til Multiplikatorerne  $\alpha$  og  $a_1$ , medens de til disse Multiplikatorer svarende Dobbeltlinier  $L$  og  $L_1$  ikke ere fælles for  $A$  og  $B$ .

Danne vi nu Transformationen  $A^{-1}BAB^{-1}$ , se vi, at denne Transformation ikke kan være identisk; thi den flytter den Linie, der ved  $B$  forandres til  $L$ . Ikke heller kan den have Dobbeltlinien  $L_1$ . Det første Element i  $A^{-1}BAB^{-1}$ 's Transformationsdeterminant er 1, og denne faar altsaa Formen

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = x + p_1 y + q_1 z \\ \mu y' = \quad \quad p_2 y + q_2 z \\ \mu z' = \quad \quad p_3 y + q_3 z, \end{cases}$$

hvor  $p_1$  og  $q_1$  ikke begge ere 0.

Vi kunne desuden antage, at  $C$  ikke er perspektivisk; thi da én af dens Multiplikatorer er én, maatte de 2 andre da være  $-1$ , og man maatte da have  $p_2 = q_3 = -1$ ,  $q_2 = p_3 = 0$ , da

$$\begin{array}{l} \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{l} \mu y' = p_2 y + q_2 z \\ \mu z' = p_3 y + q_3 z \end{array}$$

ved Sættelse maatte danne en endelig Gruppe, der transformerer  $x = 0$  til sig selv.

Man havde da

$$C \equiv \begin{vmatrix} 1 & p_1 & q_1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{og } CAC^{-1}A^{-1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & p_1(\alpha\bar{\beta}-1) & q_1(\alpha\bar{\gamma}-1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

eller

$$CAC^{-1}A^{-1} \equiv \begin{cases} \mu x' = x + p_1(\alpha\bar{\beta}-1)y + q_1(\alpha\bar{\gamma}-1)z \\ \mu y' = y \\ \mu z' = z, \end{cases}$$

en Transformation, hvoraf ingen Potens bliver identisk.

$C$  kan altsaa ikke være en perspektivisk Transformation, og danne vi  $ACA^{-1}$ , faa vi en ny Transformation, som har et Dobbelt punkt fælles med  $C$ , uden at have den Dobbeltlinie, som ikke gaar gennem dette Dobbelt punkt, fælles med  $A$ .

Lægge vi nu vort Koordinatsystem saaledes, at  $C$ 's Dobbelt punkter ere  $x = y = 0$ ,  $x = z = 0$ ,  $y = z = 0$  og saa at  $y = z = 0$  svarer til Multiplikatoren 1, faa vi, at de to Transformationer  $C$  og  $ACA^{-1} \equiv D$  have Formen

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = \bar{a}z \end{cases} \quad \text{og} \quad D \equiv \begin{cases} \mu x' = x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

som have de samme Multiplikatorer.

Skulle  $C$  og  $D$  høre til en endelig Gruppe maa

$$C' \equiv \begin{cases} \mu y' = ay \\ \mu z' = \bar{a}z \end{cases} \quad \text{og} \quad D' \equiv \begin{cases} \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

ved Sættelse danne en endelig Transformationsgruppe, der transformerer en ret Linie til sig selv.

$D'$  kan ikke være en Potens af  $C'$ . Da  $D'$  og  $C'$  nemlig have samme Multiplikatorer, maatte den være identisk med eller den omvendte Transformation af  $C'$ , og da ville  $DC^{-1}$  eller  $DC$  være en Transformation af Formen

$$\begin{aligned}\mu x' &= x + py + qz \\ \mu y' &= y \\ \mu z' &= z,\end{aligned}$$

hvor  $p$  og  $q$  ikke begge ere 0; men en saadan Transformation kan ikke forekomme i en endelig Gruppe.

Er  $D'$  nu ikke en Potens af  $C'$  maa der til Gruppen, dannet ved  $D'$  og  $C'$ , høre en Transformation af 2den Orden hvis Multiplikatorer er  $i$  og  $-i$ , der vil da til den oprindelige Gruppe høre en Transformation, hvis Multiplikatorer ere 1,  $i$ ,  $-i$  og hvis anden Potens er

$$E \equiv \begin{cases} \mu x' = x + py + qz \\ \mu y' = -y \\ \mu z' = -z. \end{cases}$$

Her ere muligvis  $p$  og  $q = 0$ . I saa Tilfælde danner man

$$EDED^{-1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & -b_2 & -c_2 \\ 0 & -b_3 & -c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & A_2 & A_3 \\ 0 & -\bar{b}_2 & -\bar{b}_3 \\ 0 & -\bar{c}_2 & -\bar{c}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2A_2 & 2A_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

hvor  $A_2$  og  $A_3$  ere Underdeterminanterne til Leddene 0, 0 i første Søjle af  $D$  og ikke begge kunne være 0.

Men da kan  $EDED^{-1}$  ikke høre til en endelig Gruppe.

Ere derimod  $p$  og  $q$  ikke begge 0, kan man danne

$$ECEC^{-1} \equiv \begin{cases} \mu x' = x + p(1 - \bar{a})y + q(1 - a)z \\ \mu y' = y \\ \mu z' = z, \end{cases}$$

en Transformation, som heller ikke kan forekomme i en endelig Gruppe.

Som Resultat af alle disse Undersøgelser faas altsaa:

Naar en Transformation skal høre til en endelig Transformationsgruppe for Planen, og denne Gruppe indeholder en Transformation af Formen

$$\left. \begin{aligned} \underline{\mu x' = ax} \\ \underline{\mu y' = \beta y} \\ \underline{\mu z' = \gamma z}, \end{aligned} \right\} (68)$$

maa altid samtidig et Element i Transformationsdeterminanten for en vilkaarlig Transformation i Gruppen og dette Elements Underdeterminant være Nul.

30) Vi ville nu nærmere undersøge Formen af Transformationerne i saadanne Grupper, som vi her undersøge, idet vi antage, at Gruppen ikke indeholder lutter Transformationer, der have 3 Dobbelpunkter fælles.

Vi antage stadigt, at Gruppen indeholder en Transformation, der ikke er perspektivisk, med Dobbelpunkter i Begyndelsespunkterne af Koordinatsystemet. Idet vi stadigt skrive Transformationsdeterminanterne for selve Transformationerne, vil, ifølge 14) og 29), i enhver Transformation

$$B \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (69)$$

henhørende til Gruppen, ethvert Element være konjugeret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn.

Dens Multiplikatorer ere bestemte ved Ligningen

$$\mu^3 - (a_1 + b_2 + c_3)\mu^2 + (A_1 + B_2 + C_3)\mu - 1 = 0. \quad (70)$$

$a_1 + b_2 + c_3$  kaldes Transformationens Diagonalsum, og det ses af (70), at en Transformations Multiplikatorer ere bestemte ved dens Diagonalsum, naar den hører til en endelig Gruppe, thi

$$a_1 + b_2 + c_3 = \bar{A}_1 + \bar{B}_2 + \bar{C}_3,$$

saar at 2 Transformationer, der have samme Diagonalsum ogsaa have samme Multiplikatorer.

Transformationens Dobbelpunkter ere bestemte ved

$$\begin{aligned} (a_1 - \mu)x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + (b_2 - \mu)y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + (c_3 - \mu)z &= 0, \end{aligned}$$

idet  $\mu$  er en Rod i (70).

Man har da Koordinaterne  $x, y, z$  til Dobbelpunkterne bestemt ved

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_3 + \mu^{\frac{1}{2}}c_1} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_3 + \mu^{\frac{1}{2}}c_2} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_3 - (a_1 + b_2)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_1 - (b_2 + c_3)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_1 + \mu^{\frac{1}{2}}a_2} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_1 + \mu^{\frac{1}{2}}a_3} \\ \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_2 + \mu^{\frac{1}{2}}b_1} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_2 - (a_1 + c_3)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_2 + \mu^{\frac{1}{2}}b_3} \end{aligned} \right\} (71)$$

De 3 Ligninger skulle ved Indsættelse af  $\mu$ 's Værdier blive identiske, men opstilles her for det følgende Skyld, idet vi i det følgende ville se, hvor mange Betingelser  $a_1, b_1, c_1$  o. s. v. ere underkastede.

31) Vi ville nu først vise, at i en Transformation henhørende til en endelig Gruppe ethvert Element er konjugeret med sin Underdeterminant, stadigt under de samme Forudsætninger som i 30).

Vi have allerede omtalt, at ethvert Element maa være konjugeret med sin Underdeterminant med positivt eller negativt Fortegn. Ifølge 14) maa nu alle Elementer i en Række enten være konjugerede med deres Underdeterminanter med samme Fortegn, som de tilsvarende Elementer i en anden Række, eller alle være konjugerede med deres Underdeterminanter med modsat Fortegn af, hvad der gjælder for en anden Række.

Elementerne i Diagonalrækken ere altid konjugerede med deres Underdeterminanter med positivt Fortegn. Endelig ere 2 Elementer, der ligge symmetrisk m. H. t. Diagonalrækken, konjugerede med deres Underdeterminanter med samme Fortegn.

Er nu

$$B \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

en Transformation i Gruppen, og findes der Elementer, som ere konjugerede med deres Underdeterminanter med negativt Fortegn, saa maa der findes Rækker, hvor der forekommer 2 saadanne Elementer.

Vi kunne antage, at den øverste Række er en saadan, saa faa vi

$$|a_1|^2 - |b_1|^2 - |c_1|^2 = 1,$$

og altsaa

$$|a_1|^2 > 1,$$

idet vi forudsætte, at  $b_1$  og  $c_1$  ikke ere 0<sup>1)</sup>.

Lad nu en anden Transformation hørende til Gruppen være

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y & \alpha\beta\gamma = 1, \\ \mu z' = \gamma z \end{cases}$$

saa kunne vi danne Transformationen

$$A^m B A^{-m} B^{-1} \equiv \begin{vmatrix} \alpha^m a_1 & \alpha^m b_1 & \alpha^m c_1 \\ \beta^m a_2 & \beta^m b_2 & \beta^m c_2 \\ \gamma^m a_3 & \gamma^m b_3 & \gamma^m c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\alpha}^m A_1 & \bar{\alpha}^m A_2 & \bar{\alpha}^m A_3 \\ \bar{\beta}^m B_1 & \bar{\beta}^m B_2 & \bar{\beta}^m B_3 \\ \bar{\gamma}^m C_1 & \bar{\gamma}^m C_2 & \bar{\gamma}^m C_3 \end{vmatrix}.$$

Det første Element her er

$$|a_1|^2 - \alpha^m \bar{\beta}^m |b_1|^2 - \alpha^m \bar{\gamma}^m |c_1|^2.$$

Sætte vi nu

$$\alpha = \cos t + i \sin t$$

$$\beta = \cos u + i \sin u$$

$$\gamma = \cos v + i \sin v,$$

saa er den reelle Del af denne Størrelse

$$\alpha = |a_1|^2 - \cos m(t-u) |b_1|^2 - \cos m(t-v) |c_1|^2,$$

<sup>1)</sup> Omvendt ere  $b_1$  og  $c_1$  ikke begge 0, hvis  $|a_1|^2 > 1$ .



hvor  $t, u, v$  staa i et rationalt Forhold til  $2\pi$ . Vi skulle nu vise, at vi i ethvert Tilfælde kunne vælge  $m$  saaledes, at  $a > |a_1|^2$ .

Vi sætte

$$t = \frac{k_1}{n} 2\pi, \quad u = \frac{k_2}{n} 2\pi, \quad v = \frac{k_3}{n} 2\pi,$$

hvor  $k_1, k_2, k_3$  ere hele Tal. Sættes endvidere  $k_1 - k_2 = k, k_1 - k_3 = l$ , er

$$a = |a_1|^2 - \cos \frac{mk}{n} 2\pi \cdot |b_1|^2 - \cos \frac{ml}{n} 2\pi \cdot |c_1|^2.$$

Vi forudsætte, at  $A$  ikke er perspektivisk. Da kunne hverken  $k_1 - k_2$  eller  $k_1 - k_3$  være 0, ligesom  $k$  og  $l$  ikke kunne være lige store.

Man kan nu have:

1)  $k = -l$ ,  $\cos \frac{mk}{n} 2\pi = \cos \frac{ml}{n} 2\pi$ , og kan da altid bestemme  $m$  saaledes, at  $\cos \frac{ml}{n} 2\pi$  bliver negativ, i hvilket Tilfælde  $a > |a_1|^2$ .

2)  $\frac{k}{n}$  og  $\frac{l}{n}$  ere uforkortelige Brøker og  $k$  ikke lig  $-l$ .

Vi antage  $|b_1|^2 > |c_1|^2$  og bestemme  $m$  saaledes, at  $\cos \frac{mk}{n} 2\pi$  faar sin numerisk største negative Værdi, i hvilket Tilfælde vi altid have

$$\cos \frac{mk}{n} 2\pi < \cos \frac{ml}{n} 2\pi,$$

da denne største Værdi for  $\frac{mk}{n} 2\pi$  er  $-1$  for  $n$ -lige,  $-\cos \frac{\pi}{n}$  for  $n$ -ulige, medens den største Værdi,  $\cos \frac{ml}{n} 2\pi$  da kan have, er  $\cos \frac{2\pi}{n}$ , saa at  $a > |a_1|^2$ .

3) Man kan endelig have, at  $\frac{k}{n}$  og  $\frac{l}{n}$  kunne forkortes til  $\frac{k_1}{n_1}$  og  $\frac{l_1}{n_2}$ , hvori det gjerne kan antages, at  $n_1$  og  $n_2$  ere indbyrdes primiske Tal, hvis den ene af disse Størrelser ikke er et Multiplum af den anden, idet hvis  $n_1$  og  $n_2$  ikke vare det, et Multiplum  $\frac{m_1 k_1}{n_1}$  og  $\frac{m_1 l_1}{n_2}$  kunde forkortes til Brøker, hvis Nævnerne vare saadanne Tal. Vi kunne da bestemme  $m$  saaledes, at  $\frac{mk_1}{n_1} 2\pi$  fik en Værdi mellem  $\frac{\pi}{2}$  og  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{mk_1}{n_1} 2\pi$  vil da kunne skaffes en lignende Værdi, naar  $m$  erstattes ved  $m_1 = y \cdot n_1 + m$ , hvor  $y$  er et helt Tal, og vi bestemme  $y$  ved at

$$(yn_1 + m)l_1 \equiv l_2 \pmod{n_2},$$

saaledes, at  $\frac{l_2}{n_2} 2\pi$  ligeledes faar en Værdi mellem  $\frac{\pi}{2}$  og  $\frac{3\pi}{2}$ ; det ses, at denne sidste Kongruens altid er mulig, da  $l_1 n_1$  og  $n_2$  ere primiske.

Gaar  $n_2$  op i  $n_1$ , kan man paa samme Maade som i 2) sørge for, at  $\cos \frac{mk_1}{n_1}$  er negativ og numerisk større end  $\cos \frac{ml_1}{n_2}$ .

Er  $n_2$  et Multiplum af  $n_1$  og er  $n_2 = m_1 n_1$ ,  $m_1$  indbyrdes primisk med  $n_1$ , kan man ogsaa ved at erstatte  $k_1$  og  $l_1$  ved  $m_1 k_1$  og  $m_1 l_1$  reducere Tilfældet til 2). Kun hvis dette ikke er Tilfældet, kan der opstaa Vanskeligheder. Det ses let, at vi kun behøve at undersøge det Tilfælde, hvor  $n_2 = n_1^p$ . Vi kunne da altid bestemme  $m$  saaledes, at  $\frac{m k_1}{n_1} 2\pi$  bliver en Vinkel mellem  $\frac{\pi}{2}$  og  $\frac{3\pi}{2}$ , og idet vi erstatte  $m$  ved  $m + 2y n_1$ , skulle vi nu bestemme  $y$  saaledes, at  $\frac{(m + 2n_1 y) l_1}{n_1^p}$  bliver en Vinkel, ligeledes beliggende mellem  $\frac{\pi}{2}$  og  $\frac{3\pi}{2}$ ; men dette ses let at være opnaaeligt. Er nemlig  $\frac{l_2}{n_1^p} 2\pi$  en saadan Vinkel, kan man altid tillægge  $l_2$  mindst  $n_1$  forskellige Værdier, og altsaa bestemme  $y$  saaledes, at

$$(m + 2n_1 y) l_1 \equiv l_2 \pmod{(n_1^p)},$$

da denne Kongruens, for at være mulig, kun kræver

$$m l_1 \equiv l_2 \pmod{(n_1)}.$$

Det er saaledes vist, at man, naar  $b_1$  og  $c_1$  ikke begge ere 0, altid kan bestemme  $m$  saaledes, at  $a > |a_1|^2$ , hvor  $|a_1|^2$  igjen er større end den reelle Del af  $a_1$ .

Gruppen kan da ikke være endelig; thi i saa Tilfælde maatte der være en Transformation i Gruppen, for hvilken den reelle Del af  $a_1$  havde sin største Værdi.

Ere  $b_1$  og  $c_1$  begge Nul, ville  $a_2$  og  $a_3$  ogsaa være Nul, da  $A_2$  og  $A_3$  ere Nul; men i saa Tilfælde ses det, at alle Elementerne for  $B$  ville være konjugerede med deres Underdeterminanter, da

$$A' \equiv \begin{cases} \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z, \end{cases} \quad B' \equiv \begin{cases} \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

maa høre til en endelig Transformationsgruppe for en ret Linie.

Vi have da i alle Tilfælde vist:

Naar en Transformationsgruppe, hvor Transformationerne transformere et Plan til sig selv, er endelig, maa den kunne transformeres saaledes, at i enhver Transformationsdeterminant hørende til Gruppen, ethvert Element er konjugeret med sin Underdeterminant. . . . . (72)

32) Vi ville nu gaa nøjere ind paa, hvilke af de Betingelser, Transformationsdeterminantens Elementer ere underkastede paa Grund af (72), der ere uafhængige og hvilke der er en Følge af de andre. Lad os antage, at Gruppen (eller en Undergruppe) er bestemt ved at skulle indeholde

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z, \end{cases}$$

$$B \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3. \end{vmatrix}$$

De første Betingelser, vi fik, vare, at  $a_1, b_2, c_3$  skulle være konjugerede med deres Underdeterminanter. Disse Betingelser ere øjensynligt uafhængige af hinanden. Derimod ere en Del af de øvrige Betingelser en Følge heraf, eller vi ville endogsaa vise, at have vi valgt  $a_1, b_2, c_3$ , og ere disse konjugerede med deres Underdeterminanter, er herved givet, om Betingelserne (72) ere mulige eller ej.

Til Bestemmelse af Dobbelpunkterne havde vi Ligningerne

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_3 + \mu^{\frac{1}{2}}c_1} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_3 + \mu^{\frac{1}{2}}c_2} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_3 - (a_1 + b_2)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_1 - (b_2 + c_3)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_1 + \mu^{\frac{1}{2}}a_2} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_1 + \mu^{\frac{1}{2}}a_3} \\ \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_2 + \mu^{\frac{1}{2}}b_1} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_2 - (a_1 + c_3)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_2 + a^{\frac{1}{2}}b_3}, \end{aligned} \right\} (71)$$

hvor  $\mu$  er én af Multiplikatorerne.

Nu have vi

$$\mu^3 - (a_1 + b_2 + c_3)\mu^2 + (\bar{a}_1 + \bar{b}_2 + \bar{c}_3)\mu - 1 = 0,$$

og altsaa

$$\mu^{\frac{3}{2}} - (a_1 + b_2)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{-\frac{1}{2}}C_3 = \mu^{-\frac{3}{2}} - (A_1 + B_2)\mu^{-\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{1}{2}}c_3,$$

og, idet vi forudsætte, at  $\mu$  er en Rod af Enheden, ere altsaa Størrelserne paa begge Sider af Lighedstegnet sin egen konjugerede Størrelse, og ere altsaa reelle. Man ser altsaa, at alle de treleddede Størrelser i Nævnerne ere reelle.

Multipliseres nu i de 2 første Ligninger første og sidste Forhold med hinanden, faas

$$(\mu^{-\frac{1}{2}}A_3 + \mu^{\frac{1}{2}}c_1)(\mu^{-\frac{1}{2}}C_1 + \mu^{\frac{1}{2}}a_3) = \text{Reel.} \quad (73)$$

Man har desuden

$$b_2 = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{c}_1 \\ \bar{a}_3 & \bar{c}_3 \end{vmatrix},$$

og da  $\bar{a}_1\bar{c}_3 = A_1C_3$ , havs altsaa ogsaa

$$A_3C_1 = \bar{a}_3\bar{c}_1 \quad (74)$$

og de andre analoge Ligninger.

Udføres nu Multiplikationen i (73) faas

$$\mu^{-1}A_3C_1 + \mu a_3c_1 + c_1C_1 + a_3A_3 = \text{Reel},$$

og da efter (74)  $\mu^{-1}A_3C_1 + \mu a_3c_1$ , er Reel, havs altsaa ogsaa

$$c_1C_1 + a_3A_3 = \text{Reel.} \quad (75)$$

Men nu er

$$c_1C_1a_3A_3 = \text{Reel (positiv)},$$

da  $c_1a_3 = \overline{C_1A_3}$ , og altsaa er enten  $c_1C_1$  og  $a_3A_3$  reelle, eller  $c_1C_1$  og  $a_3A_3$  konjugerede imaginære Størrelser.

Finder det første Sted, er altsaa  $c_1 C_1$  reel, er dette i og for sig tilstrækkeligt til, at Transformationen kan bringes paa den i (72) omtalte Form for Transformationer, hørende til en endelig Gruppe, hvis  $|a_1| |b_2| |c_3|$  alle tre ere mindre end 1, og  $a_1, b_2, c_3$  ere konjugerede med deres Underdeterminanter, og idet vi forudsætte, at ethvert Element i Determinanten og dets Underdeterminant ere Nul paa samme Tid.

Thi er  $c_1 C_1$  reel, maa man ogsaa have  $b_1 B_1$  reel, da

$$|a_1|^2 + b_1 B_1 + c_1 C_1 = 1.$$

Paa samme Maade ses, at Produktet af ethvert Element og dets Underdeterminant ere reelle Størrelser. Tillige maa disse Produkter alle blive positive. Thi  $b_1 B_1$  og  $c_1 C_1$  kunne ikke begge være negative, da  $|a_1|$  saa var større end 1. Lad os da antage  $b_1 B_1$  negativ,  $c_1 C_1$  positiv, da er  $a_3 A_3$  ogsaa positiv; thi  $c_1 C_1 a_3 A_3$  er en positiv Størrelse. Transformerer nu Gruppen, saa at Transformationen  $A$  bliver uforandret og  $|c_1| = |C_1|$ , bliver ogsaa  $|a_3| = |A_3|$ .

Men da ere alle Elementerne i Diagonalrækken  $c_1 b_2 a_3$  konjugerede med deres Underdeterminanter, og ligesom vi før, paa Grundlag af denne Egenskab, ved  $a_1 b_2 c_3$  fik  $a_3 c_1 = \overline{A_3 C_1}$ , faa vi nu  $b_1 c_2 = \overline{B_1 C_2}$ ,  $b_1 c_2 B_1 C_2$  positiv; er altsaa  $b_1 B_1$  negativ, maa  $c_2 C_2$  ogsaa være det, og da  $b_1 B_1 a_2 A_2$  er positiv, maa  $a_2 A_2$  ogsaa være negativ; men dette er umuligt, da

$$a_2 A_2 + |b_2|^2 + c_2 C_2 = 1,$$

hvoraf vilde følge  $|b_2| > 1$ .

Altsaa er Produktet af ethvert Element og dets Underdeterminant positiv.

Transformerer nu, saa at

$$|b_1| = |B_1|, \quad |c_1| = |C_1|,$$

faas

$$b_1 = \overline{B_1}, \quad c_1 = \overline{C_1}$$

og heraf

$$a_2 = \overline{A_2}, \quad a_3 = \overline{A_3},$$

og da alle Elementer i Diagonalrækken  $c_1 b_2 a_3$  ere konjugerede med deres Underdeterminanter

$$b_1 c_2 = \overline{B_1 C_2}$$

og heraf

$$c_2 = \overline{C_2}, \quad b_3 = \overline{B_3}.$$

Var  $c_1 C_1$  ikke reel, kunde Transformationen ikke høre til en endelig Gruppe. Det kan vises, at i saa Tilfælde kan Gruppen transformeres, saa at baade Transformationerne  $A$  og  $B$  faa reelle Dobbelpunkter.

Skal baade  $A$  og  $B$  have reelle Dobbelpunkter og høre til en endelig Gruppe, kan det vises, at Dobbelpunkterne for  $A$  og  $B$  ligge paa samme Keglesnit.

Vi skulle nu vise, hvorledes man kan beregne  $c_1 C_1$ , naar  $a_1, b_2, c_3$  ere givne.

Da  $a_1 = \bar{A}_1$  o. s. v., har man

$$\begin{aligned} b_1 a_2 &= a_1 b_2 - \bar{c}_3 \\ c_1 a_3 &= a_1 c_3 - \bar{b}_2 \\ c_2 b_3 &= b_2 c_3 - \bar{a}_1 \end{aligned}$$

og da  $D = 1$ ,

$$b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 = 1 - |a_1|^2 - |b_2|^2 - |c_3|^2 + 2a_1 b_2 c_3.$$

Ved Multiplikation af de 3 første Ligninger faas

$$b_1 c_2 a_3 \cdot c_1 a_2 b_3 = a_1^2 b_2^2 c_3^2 - \bar{a}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_3 + |a_1^2 b_2^2| + |a_1^2 c_3^2| + |b_2^2 c_3^2| - a_1 b_2 c_3 (|a_1|^2 + |b_2|^2 + |c_3|^2).$$

Man faar da

$$\left. \begin{aligned} b_1 c_2 a_3 \\ c_1 a_2 b_3 \end{aligned} \right\} = \frac{1 - |a_1|^2 - |b_2|^2 - |c_3|^2 + 2a_1 b_2 c_3}{2}$$

$$\pm \frac{\sqrt{1 + |a_1|^4 + |b_2|^4 + |c_3|^4 + 4(a_1 b_2 c_3 + \bar{a}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_3) - 2(|a_1|^2 + |b_2|^2 + |c_3|^2 + |a_1^2 b_2^2| + |a_1^2 c_3^2| + |b_2^2 c_3^2|)}}{2},$$

hvor Størrelsen under Rodtegnet er reel.

Vi betegne Rodstørrelsen med  $R$ .

Man har

$$c_1 C_1 = c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 = c_1 a_2 b_3 - a_1 b_2 c_3 + |b_2|^2 = \frac{1 - |a_1|^2 + |b_2|^2 - |c_3|^2 \pm R}{2},$$

Altsaa er  $c_1 C_1$  reel, hvis Rodstørrelsen er det, og Transformationen kan altsaa bringes paa Formen (72), hvis  $R$  er en reel Størrelse<sup>1)</sup>.

33) Vi ville nu, paa lignende Maade, som det er gjort for de endelige Transformationsgrupper for den rette Linie, undersøge de mulige endelige Transformationsgrupper for Planen.

Vi ville først undersøge Sættningen af to Transformationer, der have de samme Dobbelpunkter. Lad os antage, at en saadan Transformation er

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z. \end{cases}$$

Lad os antage, at  $A$  er af Ordenen

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots,$$

hvor  $p_1, p_2 \dots$  ere Primal,  $a_1, a_2 \dots$  hele Tal, saa vil  $A^{p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots}$  være af Ordenen  $p_1^{a_1}$ ,

<sup>1)</sup> For at Ligningen  $\mu^3 - (a_1 + b_2 + c_3)\mu^2 + (\bar{a}_1 + \bar{b}_2 + \bar{c}_3)\mu - 1 = 0$  skal have Rødder, hvis Modulus er 1, kræves visse Ulighedsbetingelser mellem  $a_1, b_2, c_3$ . Saaledes er det nødvendigt, men ikke tilstrækkeligt, at  $|a_1 + b_2 + c_3| < 3$ . En af Rødderne i Ligningen har altid Modulus 1. Have ikke alle Rødderne Modulus 1, ere de to af dem  $d\alpha, \frac{1}{d}\alpha$ , den 3die  $\bar{\alpha}^2$ , hvor  $|\alpha| = 1, d > 1$ .

og det ses let, at  $A$  kan erstattes ved forskellige Transformationer af Ordenerne  $p^{a_1}, p^{a_2} \dots$  med  $A$ 's Dobbelpunkter som Dobbelpunkter, medens omvendt disse Transformationer kunne betragtes som Potenser af  $A$ .

Der er derfor kun Grund til at betragte Sættningen af 2 Transformationer  $A$  og  $B$  med samme Dobbelpunkter, hvoraf denne ene er af Ordenen  $p^a$ , den anden af Ordenen  $p^b$ , hvor vi antage  $a \geq b$ , og tilmed kunne antage, at  $B$  ikke er en Potens af  $A$ .

Vi ville navnlig se, hvor mange forskellige Transformationer vi kunne faa ved Sættning af  $A$  og  $B$ . Lad os da se, hvor naar vi kunne have

$$A^m B^n \equiv A^{m_1} B^{n_1}.$$

Man maa da have

$$A^{m-m_1} \equiv B^{n_1-n}.$$

Er nu

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha_1 x \\ \mu y' = \beta_1 y \\ \mu z' = \gamma_1 z, \end{cases}$$

kræver dette, at

$$\begin{aligned} \alpha^{m-m_1} &= \alpha_1^{n-n_1} \cdot a^q \\ \beta^{m-m_1} &= \beta_1^{n-n_1} \cdot a^q \quad \text{hvor } a = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \\ \gamma^{m-m_1} &= \gamma_1^{n-n_1} \cdot a^q \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha^{\frac{m-m_1}{n-n_1}} \cdot a^{\frac{-q}{n-n_1}} \\ \beta_1 &= \beta^{\frac{m-m_1}{n-n_1}} \cdot a^{\frac{-q}{n-n_1}} \\ \gamma_1 &= \gamma^{\frac{m-m_1}{n-n_1}} \cdot a^{\frac{-q}{n-n_1}}. \end{aligned}$$

Er nu  $p$  ikke 3, ses det, at vi kunne antage  $q = 0$ . Multiplikatorerne  $\alpha, \beta, \gamma$  (eller nogle af dem), maa da være  $p^a$ de primiske Rødder af Enheden, og  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, p^b$ de primiske Rødder af Enheden.  $\frac{m-m_1}{n-n_1}$  maa da være lig  $p^{a-b}$ , og vi kunne sætte

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha' \cdot \alpha^{p^{(a-b)}} \\ \beta_1 &= \beta' \cdot \beta^{p^{(a-b)}} \\ \gamma_1 &= \gamma' \cdot \gamma^{p^{(a-b)}}, \end{aligned}$$

hvor  $\alpha', \beta', \gamma'$  ere  $(n-n_1)$ te Rødder af Enheden og  $n-n_1 < p^b$ . Vi have da

$$B \equiv B' A^{p^{(a-b)}},$$

hvor  $B'$  er en Transformation af i det højeste  $(n-n_1)$ te Orden, og vi se, at vi faa den samme Gruppe ved Sættning af  $A$  og  $B'$  som ved Sættning af  $A$  og  $B$ , saa at vi gjerne kunne erstatte  $B$  med  $B'$ .

Ganske paa samme Maade kan imidlertid gaas frem, naar  $p = 3$ , undtagen at  $q$  da ikke altid kan sættes lig 0, og at Multiplikatorerne  $\alpha, \beta, \gamma$  kunne være primitive Rødder af Enheden af Ordenen  $p^{a+1}$  eller  $p^{b+1}$ .

Som Resultat af disse Undersøgelser ses da, at vi kunne forudsætte  $B$  saaledes valgt, at ingen Potens af  $A$  er lig en Potens af  $B$ .

Er dette Tilfældet, og er  $B$  af Ordenen  $p^b$ , ville  $A$  og  $B$  ved Sættelse give Oprindelse til  $p^{a+b}$  Transformationer. Specielt ses det, at der iblandt disse Transformationer ville findes alle mulige Transformationer med de givne Dobbelpunkter af Ordenen  $p^b$ , idet der af denne Orden og lavere Orden vil blive  $p^{2b}$  Transformationer.

Vide vi om en Gruppe af Transformationer, hvor alle Transformationerne have samme Dobbelpunkter, at den indeholder Transformationerne  $A, B, C$  af Ordenen  $p^a, p^b, p^c$ , hvor  $a \geq b \geq c$ , og  $B$  ikke ved at multipliceres med en Potens af  $A$  kan reduceres til en Transformation af lavere Orden, vil man have den samme Gruppe dannet ved at multiplicere Potenser af  $A$  og  $B$ , som ved at multiplicere Potenser af  $A, B$  og  $C$ , saa at  $C$  ikke er nødvendig til Dannelse af Gruppen.

Vi se saaledes, at, naar alle Transformationer i en Gruppe have samme Dobbelpunkter, behøve vi kun at kjende 2 af dens Transformationer for at kunne danne Gruppen, i Fald ikke alle Transformationer i Gruppen ere Potenser af samme Transformation.

Kaldes de omtalte Transformationer  $A$  og  $B$ , og er Transformationen af højeste Orden hørende til Gruppen af Ordenen  $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots$ , hvor  $p_1, p_2$  o. s. v. ere Primal, skal  $B$  være af Ordenen  $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots$ , den højeste Orden af en Transformation i Gruppen, der ikke ved Multiplikation med en Potens af  $A$  kan reduceres til lavere Orden. Gruppen vil da indeholde  $p_1^{a_1+b_1} p_2^{a_2+b_2} \dots$  Transformationer, den identiske Transformation mediberegnet.

34) Vi ville dernæst undersøge, hvorledes en Gruppe er beskaffen, der indeholder perspektiviske Transformationer, specielt saadanne Grupper, der indeholde perspektiviske Transformationer af højere end anden Orden.

Vi ville begynde med at undersøge saadanne Grupper, der indeholde en perspektivisk Transformation af 6te eller højere Orden.

Lad os antage, at denne Transformation er

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = a^2 y \\ \mu z' = \bar{a}z, \end{cases}$$

og at Transformationerne i Gruppen ikke alle transformere  $A$ 's Perspektivcentrum og Perspektivaxe til sig selv (i hvilket Tilfælde alle Transformationerne i Gruppen transformere en ret Linie til sig selv, et Tilfælde, som vi ikke nøjere skulle komme ind paa), saa maa der existere endnu en perspektivisk Transformation  $B$  i Gruppen, hvor  $B$  er af samme Orden som  $A$ .

$A$ 's Perspektivcentrum er  $x = 0, z = 0$ , dens Axe  $y = 0$ .

Vi kunne nu antage Koordinatsystemet saaledes valgt, at  $B$ 's Perspektivcentrum ligger paa  $x = 0$ , og dens Axe skjærer  $A$ 's Axe i  $y = 0, z = 0$ , saa vil  $B$ 's Ligninger være

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

$A$  og  $B$  transformere da begge Linien  $x = 0$  til sig selv. Gruppen dannet ved Sammensætning af  $A$  og  $B$  maa da indeholde lutter Transformationer, der transformere  $x = 0$  til sig selv.

Tillige ses det, at Linien  $x = 0$  ved Transformationerne  $A$  og  $B$  transformeres til sig selv ved Transformationer, der ere af 6te eller højere Orden for denne Linies Vedkommende. Gruppen dannet ved  $A$  og  $B$  maa da for denne Linies Vedkommende være cyklisk. De Punkter af  $x = 0$ , som  $A$  og  $B$  lade uforandrede, maa da falde sammen; men disse ere dels Perspektivcentrene dels de Punkter, hvori Axerne skjære  $x = 0$ . Perspektivcentret for den ene af disse Transformationer maa da falde paa den andens Axe. Enhver Transformation  $C$  i den oprindeligt omtalte Gruppe, der altsaa ikke lader  $A$ 's Perspektivcentrum og Axe uforandret, maa transformere Centret til at falde paa Axen og Axen til at gaa gennem Centret.

$B$  har Ligningen

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = \bar{a}y \\ \mu z' = a^2 z. \end{cases}$$

Gruppen maa da ogsaa, hvis  $A$  og  $B$  ere af  $n$ te Orden, indeholde alle Transformationer af  $n$ te Orden, der have Dobbelpunkter i Begyndelsespunkterne for Koordinatsystemet.

Der hører da ogsaa til Gruppen en Transformation

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = a^2 x \\ \mu y' = \bar{a}y \\ \mu z' = \bar{a}z \end{cases}$$

med Perspektivaxe i  $x = 0$ , Perspektivcentrum i  $y = 0, z = 0$ .

En hvilken som helst Transformation  $C$  hørende til Gruppen, som ikke har Dobbelpunkter i Begyndelsespunkterne, maa da enten have et Dobbelpunkt i et af dem og ombytte de andre, eller kredsfor skyde dem alle 3.

Lader nemlig  $C$  ( $y = 0, z = 0$ ) uforandret, maa den lade Transformationen  $D$  uforandret, og maa altsaa lade  $x = 0$  uforandret, og da den skal bringe Centrene for  $A$  og  $B$  hen paa den andens Axe, maa  $C$  ombytte Punkterne ( $x = 0, y = 0$ ) og ( $x = 0, z = 0$ ). Lader  $C$  ikke noget af Punkterne ( $y = 0, z = 0$ ), ( $z = 0, x = 0$ ), ( $x = 0, y = 0$ ) uforandret,



maa den transformere ( $y = 0, z = 0$ ) til et af Punkterne ( $y = 0, x = 0$ ) eller ( $z = 0, x = 0$ ), da den skal transformere ( $y = 0, z = 0$ ), Centret for  $D$ , til et Punkt af  $x = 0$ ,  $D$ 's Axe, og da der ellers vilde være to Transformationer af 6te eller højere Orden, der transformerede  $x = 0$  til sig selv, uden at have sammenfaldende Dobbelpunkter paa  $x = 0$ , hvad der ikke kan forekomme i en endelig Gruppe. Men transformerer  $C$  ( $y = 0, z = 0$ ) til ( $y = 0, x = 0$ ), uden at lade  $y = 0$ , uforandret, i hvilket Tilfælde  $C$  maatte lade  $A$  uforandret og ogsaa Punktet ( $x = 0, z = 0$ ), ses det paa lignende Maade, at den maa transformere ( $y = 0, x = 0$ ) til ( $x = 0, z = 0$ ) og endelig ( $x = 0, z = 0$ ) til ( $y = 0, z = 0$ ).

Da nu  $C$  ikke har noget af sine Dobbelpunkter fælles med  $A$ , maa  $C^3$  være identisk, altsaa  $C$  af 3die Orden og ikke perspektivisk.

Vi se da, at naar Gruppen indeholder perspektiviske Transformationer af 6te eller højere Orden, kan den enten bestaa af Transformationer, der alle transformere samme rette Linie til sig selv ved en cyklisk Gruppe, eller af Transformationer, der alle have de samme 3 Dobbelpunkter, i Forbindelse med Transformationer, der enten have et Dobbelpunkt af de omtalte 3 og ombytte de to andre eller ere af 3die Orden og kredsforskyde de 3 Dobbelpunkter.

Saadanne Grupper som de her nævnte kalde vi cykliske Grupper for Planer.

Det er klart nok, at saadanne Grupper existere og at Transformationerne i dem have Ligninger af Formerne

$$\left. \begin{array}{lll} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \mu x' = ax & \mu x' = ax & \mu x' = py \\ \mu y' = \beta y & \mu y' = bz & \mu y' = qz \\ \mu z' = \gamma z & \mu z' = cy & \mu z' = rx, \end{array} \right\} (76)$$

hvor vi gjerne kunne tænke os Gruppen saaledes transformeret, at alle de indgaaende Størrelser  $a, b, c$  o. s. v. ere Rødder af Enheden.

I Stedet for II kan naturligtvis optræde de analoge Former, som ombytte  $x$  og  $y$ , eller  $x$  og  $z$ .

35) Vi komme nu til at betragte de andre Grupper, som indeholde perspektiviske Transformationer. Vi begynde da med dem, der indeholde perspektiviske Transformationer af 5te Orden. En saadan har Formen.

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = \bar{a}^2 y \\ \mu z' = \bar{a}z, \end{cases}$$

hvor  $a$  er en 5te primisk Rod af Enheden. Lad os nu antage, at Gruppen indeholder en Transformation  $C$ , som ikke lader  $A$  uforandret, saa kan den transformere  $A$  til

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

idet vi antage Koordinatsystemet saaledes valgt, at  $x = 0$  gaar gennem begge Perspektivcenterne for  $A$  og  $B$ , medens Axerne skjære hinanden i  $y = 0, z = 0$ .  $A$  og  $B$  maa da begge transformere  $x = 0$  til sig selv, og Transformationsgruppen for Transformationer dannede ved Sættning af  $A$  og  $B$  maa da for denne Linie være cyklisk eller ikosaedrisk. I sidste Tilfælde vil den indeholde en Transformation, som ombytter de Dobbelpunkter  $A$  har liggende paa  $x = 0$ , saa at Gruppen ogsaa indeholder en Transformation

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = \bar{a}y \\ \mu z' = a^2 z \end{cases}$$

og

$$DA \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^2 x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = az. \end{cases}$$

Den Transformation, der ombytter  $A$ 's Dobbelpunkter maa have Formen

$$E \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^p x \\ \mu y' = c_2 z \\ \mu z' = b_3 y \end{cases}$$

hvor  $c_2 b_3 = -a^p$ .

Man har da

$$E^2 \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^{2p} x \\ \mu y' = -a^p y \\ \mu z' = -a^p z \end{cases}$$

og

$$E^{10} \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -y \\ \mu z' = -z, \end{cases}$$

og endelig

$$E^{10} DA \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^2 x \\ \mu y' = -ay \\ \mu z' = -az, \end{cases}$$

som er en perspektivisk Transformation af 10de Orden.

Efter det foregaaende maa da enten alle Transformationer i Gruppen transformere samme Linie til sig selv, eller ogsaa maa Gruppen være cyklisk. Da dette sidste ikke kan være Tilfældet, hvis  $x = 0$  ikke transformeres til sig selv ved en cyklisk Gruppe, dannet ved Sættning af  $A$  og  $B$ , maa den altsaa i dette Tilfælde bestaa af lutter

Transformationer, der transformere  $x = 0$  til sig selv ved en ikosaedrisk Transformationsgruppe.

Aldeles lignende Bemærkninger kunne gjøres, hvis  $A$  og  $B$  ere perspektiviske Transformationer af 3<sup>de</sup> Orden og transformere  $x = 0$  til sig selv ved en Ikosaedergruppe eller en Oktaedergruppe.

36) Vi gaa derpaa over til at betragte Grupper, som indeholde perspektiviske Transformationer af 4<sup>de</sup> Orden. Vi antage ligesom før, at Gruppen indeholder en Transformation  $C$ , der ikke transformerer Centret for en perspektivisk Transformation hørende til Gruppen til sig selv, og at den altsaa maa indeholde 2 perspektiviske Transformationer af 4<sup>de</sup> Orden  $A$  og  $B$ , som vi kunne tænke os bragte paa Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ix \\ \mu y' = -y \\ \mu z' = iz \end{cases}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = ix \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

Hvis  $A$  ved Transformation ved de øvrige Transformationer i Gruppen kun transformeres til andre perspektiviske Transformationer, saaledes at Forbindelseslinierne mellem  $A$ 's Centrum og de øvrige Transformationers Centrum kan transformeres til sig selv ved cykliske Grupper, faas kun Grupper af samme Art som de i 34) omtalte.

Vi antage da her, at  $A$  og  $B$  transformere  $x = 0$  til sig selv, idet de give Opriindelse til en Gruppe, der for denne Liniens Vedkommende er oktaedrisk. Gruppen maa da ligesom før ogsaa indeholde en Transformation, der ombytter  $A$ 's Dobbelpunkter, og maa da ogsaa indeholde Transformationerne

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = ix \\ \mu y' = iy \\ \mu z' = -z \end{cases} \quad \text{og} \quad D \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = iy \\ \mu z' = iz. \end{cases}$$

Det ses da, at naar 2 Perspektivaxer for 2 Transformationer af 4<sup>de</sup> Orden skjære hinanden, vil deres Skjæringspunkt være Centrum for en perspektivisk Transformation, hvis Axe er den Linie, der forbinder de to første Transformationers Centra. Altsaa vil Axen for enhver perspektivisk Transformation af 4<sup>de</sup> Orden transformeres til sig selv ved en Transformation af 4<sup>de</sup> Orden, der har et Dobbelpunkt i Axens Skjæringspunkt med Axen for en anden Transformation af samme Art, et andet Dobbelpunkt i sin Skjæring med Forbindelseslinien mellem de 2 Transformationers Centra.

Lad os nu antage, at  $P$  og  $p$ ,  $Q$  og  $q$  ere henholdsvis Centra for og Axer for de 2 Transformationer  $A$  og  $B$ , og at Gruppen indeholder en Transformation  $T$ , der transformerer  $P$  og  $p$  henholdsvis til  $Q$  og  $q$ , og at  $T$  ikke har noget Dobbelt punkt fælles med  $A$  eller  $B$ . Linien  $PQ$  vil da, hvis Gruppen er endelig, kunne antages at transformeres til sig selv ved en Oktaedergruppe.

En saadan indeholder som bekjendt, se p. 56, 3 Transformationer af 4de Orden med forskellige Dobbelt punkter. Vi antage, at  $p$  og  $q$  skjære  $PQ$  i  $P_1$  og  $Q_1$ , saa er  $P$ ,  $Q$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$  de 4 Dobbelt punkter for saadanne Transformationer af Linien. Der maa altsaa være endnu et Par saadanne Dobbelt punkter  $S$  og  $S_1$ .

Vi kalde Skjæringspunktet mellem  $p$  og  $q$   $R$ .

Da der nu er Transformationer i Gruppen for den rette Linie, der ombytte saa vel Punkterne  $PP_1$  indbyrdes som Punktparrene  $PP_1$  med  $QQ_1$  eller  $SS_1$ , maa der gives Transformationer, fremkomne ved Sættning af  $A$  og  $B$ , der ere perspektiviske og have deres Axer gaaende gennem  $R$  og Punkterne  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $S_1$  medens deres Centra ere  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $S_1$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ .

Da nu  $PQ$  selv er Axe for en perspektivisk Transformation, maa  $T$  og dens Potenser altid transformere  $PQ$  og enhver Perspektivaxe for en Transformation af 4de Orden hørende til Gruppen til Linier, der gaa gennem et af de 6 Punkter  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $S_1$ , da der ellers paa  $PQ$  vilde findes flere end 6 Dobbelt punkter for Transformationer af 4de Orden, som transformerer  $PQ$  til sig selv. Vi kunne tillige antage, at i det mindste én Potens af  $T$  transformerer  $PQ$  til en Linie, der ikke gaar gennem  $R$ , idet, hvis dette skulde være Tilfældet, ellers en af Perspektivaxerne gennem  $R$  vilde transformeres til en Linie, der hverken gik gennem  $R$  eller faldt sammen med  $PQ$ , og kunde anvendes paa samme Maade i Beviset, som vi her anvende  $PQ$ .

Under den gjorte Forudsætning vil da den Linie, hvortil  $PQ$  transformeres, skjære hver af de 6 Perspektivaxer gennem  $R$  i et Dobbelt punkt for en Transformation af 4de Orden, der transformerer hver af dem til sig selv.

Ligesom ethvert Skjæringspunkt for 2 Perspektivaxer for Transformationer af 4de Orden er Centrum for en ny perspektivisk Transformation af 4de Orden, saaledes er enhver Forbindelseslinie for 2 Centra for saadanne Transformationer en ny Perspektivaxe for en saadan Transformation.

Nu have vi set, at der existerede i det mindste 4 Axer, af hvilke ikke 3 gik gennem samme Punkt, idet  $PQ$  blev transformeret til en Linie, der hverken gik gennem  $R$  eller faldt sammen med  $PQ$ , og der gennem  $R$  gik 6 saadanne Axer.

Saadanne 4 Axer kunne vi nu tænke os omprojicerede til 2 vilkaarlige Par parallelle Linier, der staa vinkelrette paa hinanden, og hvis Skjæringspunkter ere  $ABCD$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Læseren bedes selv tegne en Figur.

Da er den uendelig fjerne Linie ogsaa en Perspektivaxe, ligesom Linierne  $AC$  og  $BD$ , der skjære hinanden i  $E$ , og Linier gennem  $E$  parallelle henholdsvis med  $AD$  og  $AB$ . Lad os antage, at disse sidste Liniers Skjæringspunkter med Linierne  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  ere  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , da vil der være følgende nye Axer  $ab$ ,  $ad$ ,  $Ab$ ,  $Bd$ , som ville skjære  $DC$  i 4 Punkter forskjellige fra  $D$ ,  $c$ ,  $C$ , saa at der i det mindste paa denne Linie vilde falde 7 Skjæringspunkter med andre Perspektivaxer, hvad der er umuligt, da disse Punkter ere Centrer for perspektiviske Transformationer af 4de Orden, og  $CD$  skulde transformeres til sig selv ved en endelig Transformationsgruppe, saa at der i det højeste kunde være 6 saadanne Centra paa  $CD$ .

Hvis altsaa en endelig Gruppe indeholder perspektiviske Transformationer af 4de Orden, maa den enten være cyklisk, eller alle dens Transformationer maa transformere samme rette Linie til sig selv.

37) Vi komme nu til endelige Grupper, der indeholde perspektiviske Transformationer af 3die Orden. Kaldes en saadan Transformation  $A$ , antages det tillige, at Gruppen indeholder en Transformation  $C$ , der ikke har et Dobbelt punkt i  $A$ 's Centrum, og transformerer  $A$  til en Transformation  $B$ , saaledes at alle Transformationer i den Gruppe, der kan dannes ved Sættelse af  $A$  og  $B$ , transformere den Linie, der forbinder deres Centra, til sig selv ved en Tetraedertransformation. Vi antage Koordinatsystemet lagt ligesom i de forrige Tilfælde og antage da

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = a^2 y \\ \mu z' = \bar{a}z \end{cases} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor  $a$  er en primitiv 9de Rod af Enheden.

$AB$  er en Transformation, der enten transformerer  $x = 0$  til sig selv ved en Transformation af 2den Orden eller af 3die Orden. Vi kunne antage det sidste, da ellers dens Multiplikatorer vilde være  $\bar{a}^2$ ,  $ia$ ,  $-ia$  og  $(AB)^2$  være en perspektivisk Transformation af 6te Orden, hvad der vilde føre tilbage til før omtalte Grupper.

$A^2 B$  maa da transformere  $x = 0$  til sig selv ved en Transformation af 2den Orden (være af 2den Orden for denne Linies Vedkommende), hvis Multiplikatorer ere (da de kun ere bestemte paa nær en Faktor, som er en vilkaarlig 3die Rod af Enheden),  $1$ ,  $i$ ,  $-i$ , dens anden Potens en perspektivisk Transformation af anden Orden med Centrum i Skjæringspunktet for  $A$ 's og  $B$ 's Axer, Axe i Forbindelseslinien mellem deres Centra.

Vi ville nu undersøge, hvilke Undergrupper der kan forekomme i den Gruppe, vi undersøge, dannet ved Sættelse af en perspektivisk Transformation af 2den Orden

og en perspektivisk Transformation af 3<sup>die</sup> Orden hørende til Gruppen, idet vi antage, at ikke den enes Centrum ligger paa den andens Axe.

Idet vi atter tænke os Koordinatsystemet lagt som forhen, have saadanne to Transformationer Ligningerne

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = a^2 y \\ \mu z' = \bar{a}z \end{cases} \quad D = \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

Transformeres  $x = 0$ , den Linie der forbinder deres Centra, til sig selv ved en Ikosaeder eller Oktaedergruppe, vil der være Transformationer, der ombytte saavel  $C$ 's som  $D$ 's paa  $x = 0$  liggende Dobbelpunkter, altsaa transformere  $C$  til

$$\begin{aligned} \mu x' &= \bar{a}x \\ \mu y' &= \bar{a}y \\ \mu z' &= a^2 x \end{aligned}$$

og transformere  $D$  paa lignende Maade. Gruppen maa da indeholde Transformationerne

$$C_1 \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^2 x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = az \end{cases} \quad D_1 \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -y \\ \mu z' = -z, \end{cases}$$

og  $C_1 D_1$  vil da være en perspektivisk Transformation af 6<sup>te</sup> Orden, saa at vi kunne forbigaa videre Omtale af saadanne Grupper.

Var Gruppen dannet ved  $C$  og  $D$  tetraedrisk for  $x = 0$ 's Vedkommende, er  $CD$  af 3<sup>die</sup> Orden for  $x = 0$ 's Vedkommende, og da en af Multiplikatorerne for  $(CD)^3$  er  $-1$ , og denne skal være identisk for  $x = 0$ 's Vedkommende, maa den have Multiplikatorerne  $-1, i, i$  og være perspektivisk af 4<sup>de</sup> Orden. Gruppen maa da høre til de før omtalte.

Undergruppen kan da være cyklisk for  $x = 0$ , den indeholder da Transformationerne

$$\begin{aligned} \mu x' &= \bar{a}x \\ \mu y' &= \bar{a}y \\ \mu z' &= a^2 z \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \mu x' &= \bar{a}^2 x \\ \mu y' &= ay \\ \mu z' &= az. \end{aligned}$$

Deraf ses, at skal Gruppen være endelig og ikke høre til de allerede omtalte Grupper, maa Axerne for 2 perspektiviske Transformationer af 3<sup>die</sup> og 2<sup>den</sup> Orden, der ikke gaa gennem hinandens Centrum, skjære hinanden i et Punkt, der er Centrum for en perspektivisk Transformation af 3<sup>die</sup> Orden, hvis Axe er Forbindelseslinien mellem deres Centra.

Lad os nu antage, at  $P, p, Q, q$  ere Centrere og Axer henholdsvis for  $A$  og  $B$ , hvoraf  $A$  ved  $C$  transformeres til  $B$ , saa er Skjæringspunktet  $R$  mellem  $p$  og  $q$  Centrum for en perspektivisk Transformation  $F$  af 2den Orden, hvis Axe er  $PQ$ . Transformere vi nu  $F$  ved  $C$ , vil  $PQ$  transformeres til en Linie, der gaar gennem  $Q$ , medens  $R$  transformeres til et Punkt af  $q$ . Transformerede nu  $C PQ$  til at gaa gennem  $R$ , maatte  $R$  falde i  $q$ 's Skjæringspunkt  $Q_1$  med  $PQ$ ; men dette er umuligt, da det i Forvejen er forudsat, at  $PQ$  transformeres til sig selv ved en Tetraedergruppe, og en af de Transformationer af 3die Orden, der transformere  $PQ$  til sig selv, har Dobbelpunkt i  $Q_1$ , saa at dette ikke ogsaa kan være Dobbelpunkt for en Transformation af 2den Orden, der transformere  $PQ$  til sig selv.  $PQ$  maa da transformeres til en anden Linie  $QT$ , medens  $R$  transformeres til et Punkt  $U$  af  $q$ . Er  $T$  Skjæringspunktet mellem  $QT$  og  $p$ , maa  $T$  være Centrum for en perspektivisk Transformation af 3die Orden med Axe i  $PU$ , da  $QT$  og  $p$  ere Axer for en perspektivisk Transformation af 2den Orden og en af 3die Orden, hvis Centrere ikke ligger paa hinandens Axer. Der eksisterer da, som før vist, en Undergruppe af Transformationer med fælles Dobbelpunkt i  $P$ , der alle transformere  $p$  til sig selv, og denne Undergruppe maa for  $p$  være cyklisk, da  $P$  er Skjæringspunktet mellem Axerne,  $PQ$  og  $PU$ , for en perspektivisk Transformation af 2den Orden og en af 3die Orden, hvis Centrere  $R$  og  $T$  findes paa  $p$ .

$R$  maa da, ved de Transformationer der transformere  $q$  til sig selv, i det højeste kunne transformeres til 2 Punkter af denne, eller der maa gennem hvert Perspektivcentrum for en Transformation af 3die Orden beliggende paa  $PQ$ , gaa højest 2 Linier, der ere Transformationer af denne Linie. Det ses da, at der netop maa gaa dette Antal Linier gennem  $Q$  og de omtalte Punkter, d. v. s. der maa gennem hvert Perspektivcentrum for en Transformation af 3die Orden, hvortil  $Q$  kan transformeres, gaa 3 Linier, der ere Transformationer af  $PQ$ .

$PQ$  indeholder 4 Centrere for perspektiviske Transformationer af 3die Orden. Igennem hver af disse maa der gaa 2 Linier  $L$ , der ere Transformationer af  $PQ$ , og disse ere de eneste eksisterende Transformationer af  $PQ$ ; thi ellers vilde der være saadanne Linier  $L$ , der gik gennem 4 Perspektivcentrer for Transformationer af 3die Orden, beliggende paa Axer for saadanne Transformationer gaaende gennem  $R$ . Da ethvert  $L$  ved Transformationer i Gruppen kan bringes hen til mindst tre Stillinger, kom disse Axer til hver at indeholde flere end 2 Centrere, som er umuligt.

Gruppen kommer da til at indeholde en Samling paa 9.6 Transformationer af 4de Orden, og denne vil udgjøre  $\frac{1}{4}N$ , naar hele Gruppen indeholder  $N$  Transformationer.  $N$  er da 216. Nu udgjør de Transformationer med tilhørende Samlinger, som transformere  $PQ$  til sig selv,  $\frac{1}{4}N + \frac{1}{3}N + \frac{1}{9}N + \frac{1}{24}N = \frac{53}{72}N = 159$  Transformationer. Gruppen maa da indeholde Transformationer, der ikke høre til disse Samlinger. Men dette er

umuligt, da ingen Sæt Dobbelpunkter med tilhørende Samlinger tilsammen kan indeholde  $\frac{56}{216}N = \frac{7}{27}N$  Transformationer.

38) Vi ere nu naaede til at vise, at, hvis en endelig Gruppe ikke er cyklisk eller indeholder lutter Transformationer, der transformere samme rette Linie til sig selv, kan den kun indeholde perspektiviske Transformationer, der ere af 2den Orden.

Vi skulle nu undersøge, hvorvidt en endelig Gruppe, der ikke er af de før nævnte Arter, kan indeholde to Transformationer med forskellige Dobbelpunkter, hvis Potenser kunne være en perspektivisk Transformation af 2den Orden. Da de to Transformationer maa transformere samme rette Linie til sig selv, kunne de antages at være

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha' x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor  $x = 0$  er den rette Linie, som begge Transformationerne transformere til sig selv.

Efter Forudsætningen maa der da være 2 Tal  $m$  og  $n$ , saaledes at

$$C \equiv A^n \equiv B^m \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -y \\ \mu z' = -z. \end{cases}$$

Da  $x = 0$  skal transformeres til sig selv ved en endelig Gruppe, maa denne enten være cyklisk, tetraedrisk, oktaedrisk eller ikosaedrisk. Der maa da til Gruppen høre Transformationer, der ombytte enten baade  $A$ 's og  $B$ 's paa  $x = 0$  liggende Dobbelpunkter, medens de lade deres fælles Dobbelpunkt uforandret, eller Transformationer, der gjøre dette for den ene af Transformationerne  $A$ , saa at vi altid kunne antage, at der til Gruppen hører en Transformation

$$A' \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha^2 x \\ \mu y' = \overline{\alpha} y \\ \mu z' = \overline{\alpha} z, \end{cases}$$

hvoraf ses, at  $\alpha$  maa være  $\pm 1$  og at, hvis ogsaa  $B$ 's Dobbelpunkter ombyttes ved en Transformation hørende til Gruppen, at da det samme maa være Tilfældet med  $\alpha'$ .

Skulde der ikke være en Transformation i Gruppen, der ombytter  $B$ 's Dobbelpunkter maa Gruppen enten for  $x = 0$  være cyklisk,  $B$  for denne Linies Vedkommende af 2den Orden, eller tetraedrisk  $B$  af 3die Orden for  $x = 0$ . Desuden kan  $B$  ikke være af 2den Orden, da saa  $B$  var en Potens af  $A$ .

Lad os antage, at Gruppen dannet ved  $A$  og  $B$  for  $x = 0$ 's Vedkommende er oktaedrisk eller ikosaedrisk, saa har  $A$  og  $B$  Formerne

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = \pm \alpha y \\ \mu z' = \overline{\alpha} z \end{cases} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z \end{cases}$$



Disse ere nu begge ikke af 2den Orden, og en af dem i det mindste kan antages ikke at være af 2den Orden for  $x = 0$ 's Vedkommende. Er nu en af dem  $B$  af 2den Orden for  $x = 0$ 's Vedkommende, maa man bruge øverste Fortegn for denne, da ellers  $B^2$  var identisk og ingen Potens af den af Formen  $C$ . Er  $A$  ikke af 2den Orden for  $x = 0$ 's Vedkommende, er den enten af 3die, 4de eller 5te Orden. Er den af 3die eller 5te Orden, maa  $A$  i en ulige Potens være en perspektivisk Transformation identisk med  $C$ , hvilket er umuligt, hvis nederste Fortegn bruges. Man maa da bruge øverste Fortegn. Er den endelig af 4de Orden for  $x = 0$ 's Vedkommende, maa man have

$$\pm a^2 = \pm i.$$

Lad os nu antage at vi skulde bruge nederste Fortegn, saa havde man

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = -\bar{a}z. \end{cases}$$

Der maa da høre mindst endnu en Transformation  $B$  til Gruppen med de samme Multiplikatorer som  $A$ , der ligeledes transformerer  $x = 0$  til sig selv. Multipliceres  $B$  med  $A$  faas en Transformation  $D$  af 3die Orden for  $x = 0$ , hvis Multiplikatorer ere 1,  $\alpha'$ ,  $\bar{\alpha}'$ , hvor  $\alpha' = \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ .

Desuden maa der til Gruppen høre Transformationer af 2den Orden, der transformere  $x = 0$  til sig selv, og hvis Multiplikatorer ere  $-1, -1, 1$ . Disse kunne høre til samme Samling som  $A^4$ .

Der er nu i Alt 48 Transformationer, der transformere  $x = 0$  til sig selv.

Indeholder hele Gruppen  $N$  Transformationer udgjør  $A$  og dens Potenser (med Undtagelse af 4de Potens) og tilhørende Samlinger  $\frac{3}{8}N$  Transformationer,  $AB$  med Potenser og tilhørende Samlinger  $\frac{1}{3}N$  (med Undtagelse af den Potens, der er lig  $A^4$ ), og endelig  $A^4$  med tilhørende Samling  $\frac{1}{48}N$ , tilsammen  $\frac{35}{48}N$  Transformationer.

Gruppen kan da (smlgn. S. 166) kun endnu indeholde en Transformation af 2den Orden med tilhørende Samling udgjørende  $\frac{1}{4}N$  Transformationer. Man maa da have  $N = 48$ . Den eneste eksisterende Gruppe af den omtalte Art er da en saadan, at alle Transformationer i den transformere samme rette Linie til sig selv.

Hvad der her er sagt i det foregaaende om Transformationer af ulige Orden og Transformationer af anden Orden, ses ogsaa at finde Anvendelse paa Tetraedergruppen, saa at ogsaa for dens Vedkommende øverste Fortegn maa bruges i alle Tilfælde.

Er endelig Gruppen cyklisk for  $x = 0$ 's Vedkommende, maa en af Transformationerne  $B$ , for denne Linies Vedkommende være af 2den Orden og vi kunne for  $B$  da kun bruge øverste Fortegn.

Er  $A$  af ulige Orden for  $x = 0$ 's Vedkommende, ses det ogsaa ligesom før, at man for  $A$ 's Vedkommende kun kan bruge øverste Fortegn.

Er  $A$  af lige Orden for  $x = 0$ 's Vedkommende, maa man have den i det mindste af 8de Orden for Planens Vedkommende, hvis øverste Fortegn skal kunne bruges.

Vi ville udsætte den nøjere Betragtning af de Grupper, hvori der kunne forekomme saadanne Undergrupper som de sidst nævnte, for at gaa over til at undersøge hvor mange Transformationer forskellige Undergrupper med tilhørende Samlinger til deres Transformationer ville udgjøre.

39) Lad os antage, at en Transformation  $A$  med Multiplikatorerne  $\alpha, \beta, \gamma$  hører til en Gruppe, saa ville vi undersøge, hvornaar en anden Transformation hørende til Gruppen kan transformere  $A$  til en Transformation med de samme Dobbelpunkter.

Dette kan ske under 3 Omstændigheder, idet vi antage, at  $A$  ikke er perspektivisk:

- 1) Naar alle dens Dobbelpunkter lades uforandrede.
- 2) Naar 2 af dens Dobbelpunkter ombyttes, medens det 3die lades uforandret.
- 3) Naar de alle 3 ombyttes (kredsforskydes).

Vi tage i det følgende ikke Hensyn til saadanne Grupper, om hvilke det i det foregaaende er bevist, at de enten maa være Grupper, hvori alle Transformationer transformere samme rette Linie til sig selv, eller ere cykliske.

1) Skal nu  $A$ 's Dobbelpunkter alle blive uforandrede, maa de Transformationer, der transformere  $A$  paa denne Maade, selv have  $A$ 's Dobbelpunkter til Dobbelpunkter.

Nu have vi set, at hvis 2 forskellige Transformationer af  $n$ te Orden have fælles Dobbelpunkter og ikke have en fælles Potens, vil der forekomme perspektiviske Transformationer i Gruppen af Ordenen  $n$ , med de fælles Dobbelpunkter til Dobbelpunkter.  $n$  kan da kun være 2. Alle Transformationer, der have fælles Dobbelpunkter, ere da enten

- a) Alle Potenser af samme Transformation

eller

b) Potenser af samme Transformation  $A$ , i Forbindelse med disse Transformationer multiplicerede med en Transformation af 2den Orden, der har sit Perspektivcentrum i et af  $A$ 's Dobbelpunkter, sin Axe gaaende gennem de 2 andre.

2) 2 Dobbelpunkter for  $A$  kunne ombyttes. Dette maa da ske ved en Transformation  $B$ , der transformerer Forbindelseslinien mellem 2 af  $A$ 's Dobbelpunkter  $P$  og  $Q$  til sig selv, medens den lader det 3die,  $R$ , uforandret.  $B$  maa da faa  $PQ$  til Dobbeltlinie og 2 af sine Dobbelpunkter liggende herpaa.

$B^2$  maa da lade alle  $A$ 's Dobbelpunkter uforandrede, og altsaa have dem til Dobbelpunkter, og desuden endnu have 2 Dobbelpunkter  $PQ$ . Den maa da enten være identisk eller perspektivisk med  $R$  til Centrum,  $PQ$  til Axe.

I første Tilfælde maa  $B$  være af 2den Orden med sit Centrum paa  $PQ$ , sin Axe gaaende gennem  $R$ , og saaledes at Axen og Centret dele  $PQ$  harmonisk. I sidste Tilfælde maa  $B$  være af 4de Orden, have 2 Dobbelpunkter paa Linien  $PQ$ , saaledes at denne Linie deles harmonisk, sit 3die i  $R$ , med tilsvarende Multiplikatorer  $i$ ,  $-i$ ,  $+1$ . I dette sidste Tilfælde, vil der, som det let ses, altid være en Potens af en Transformation med Dobbelpunkterne  $PQR$ , der falder sammen med  $B^2$ .

Lad os nu antage, at  $B$  ombytter Dobbelpunkterne svarende til Multiplikatorerne  $\beta$  og  $\gamma$  i  $A$  og lad os antage

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z, \end{cases}$$

saa indeholder Gruppen altsaa ogsaa Transformationen

$$\begin{aligned} \mu x' &= \alpha x \\ \mu y' &= \gamma y \\ \mu z' &= \beta z \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \mu x' &= \alpha^2 x \\ \mu y' &= \beta \gamma y = \overline{\alpha} y \\ \mu z' &= \beta \gamma z = \overline{\alpha} z. \end{aligned}$$

Denne sidste Transformation er perspektivisk og maa altsaa være af 2den Orden.  $\alpha$  kan da kun være  $\pm 1$ , og

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \pm \overline{\alpha} z. \end{cases}$$

3) Endelig ville vi undersøge, hvornaar en Transformation  $B$  kan kredsfor skyde Dobbelpunkterne i  $A$ . Denne anden Transformation  $B$  maa være af 3die Orden, eftersom tredie Potens af denne skal lade Dobbelpunkterne i  $A$  uforandrede, og  $B^3$  desuden har  $B$ 's Dobbelpunkter, saa at  $B^3$  maa være identisk.

Lad os nu antage

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z, \end{cases}$$

saa vil denne Transformation ved Kredsfor skydning af Dobbelpunkterne blive til

$$A' \equiv \begin{cases} \mu x' = \beta x \\ \mu y' = \gamma y \\ \mu z' = \alpha z \end{cases}$$

og

$$A'' \equiv \begin{cases} \mu x' = \gamma x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \beta z. \end{cases}$$

Her skal nu  $A'$  og  $A''$  enten være Potenser af  $A$  eller saadanne Potenser multiplicerede med en perspektivisk Transformation af 2den Orden.

Vi kunne nu antage, at  $A$  er af  $m$ te Orden, idet vi antage, at  $m = p_1^a \cdot p_2^b \dots$ , hvor  $p_1, p_2 \dots$  ere Primaltal. Vi behøve da kun at undersøge, hvor naar det er muligt, at en saadan Kredsfor skydning af Dobbeltpunkterne kan finde Sted, hvis  $A$  var af Ordenen  $p_1^a, p_2^b \dots$ , idet, hvis den kan finde Sted for Transformationer af disse Ordener, den ogsaa kan finde Sted naar  $m = p_1^a \cdot p_2^b \dots$ .

Lad os da først undersøge hvor naar den kan finde Sted, naar  $A$  er af Ordenen  $3^a$ , eller rettere, naar  $\alpha, \beta, \gamma$  ere  $3^a$ de primiske Rødder af Enheden<sup>1)</sup>. Man skal da have

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \beta^m f \\ \beta &= \gamma^m f \\ \gamma &= \alpha^m f \end{aligned} \right\} (77)$$

hvor  $f$  er en 3die Rod af Enheden. Vi behøve imidlertid her kun at sætte  $\alpha = 1$  og 2. Hvis  $\alpha = 1$ , er det klart, at Ligningerne (77) kunne tilfredsstilles. Er  $\alpha = 2$ , saa kunne vi af Ligningerne (77) faa

$$1 = \alpha^{m^3-1} f^{m^2+m+1}, \quad (78)$$

hvor vi kun behøve at give  $m$  Værdierne 1 og 2. For 1 faar man, idet  $f$  er en 3die Rod af Enheden

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha f^{-1} \\ \gamma &= \alpha f, \end{aligned}$$

og da  $\alpha\beta\gamma = 1$ ,  $\alpha^3 = 1$ , saa at  $\alpha$  ikke er nogen 9de primisk Rod af Enheden. For  $m = 2$  er (78) umulig.

Det ses da, at da man ikke kan bruge  $\alpha = 2$ , kan man heller ikke bruge højere Værdier af  $\alpha$ , idet for højere Værdier af  $\alpha$  en Potens af Transformationen vilde have Multiplikatorer, der vare  $3^2$  primiske Rødder af Enheden.

Er  $A$  en Transformation af  $p_1^a$ te Orden, hvor  $p_1$  ikke er 3, skal man have, naar dens Multiplikatorer ere  $\alpha, \beta, \gamma$

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha^m \\ \gamma &= \beta^m \\ \alpha &= \gamma^m, \\ 1 &= \alpha^{m^3-1} \\ 1 &= \beta^{m^3-1} \\ 1 &= \gamma^{m^3-1}, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Er Transformationen ikke perspektivisk, vil den da være af  $3^a$ de Orden.

hvoraf ses, at  $p_1$  maa være et Primal, der er af Formen

$$p_1 = 3q + 1,$$

da

$$m^3 - 1 \equiv 0 \pmod{p_1^{a_1}}.$$

Endelig kan der endnu, hvad der ses umiddelbart, findes en Transformation af Ordenen 2, med samme Dobbelpunkter som  $A$ .

Hvis altsaa ikke alle Transformationer i en Gruppe skulle transformere samme rette Linie til sig selv eller Gruppen være cyklisk, maa saadanne Transformationer i Gruppen, hvis Dobbelpunkter kredsfor skydes ved en anden Transformation i Gruppen, være af en Orden  $n$ , hvor  $n$  kan indeholde Faktorerne 2 og 3 samt Primfaktorer af Formen  $3q + 1$ .

40) Vi skulle nu paa Grundlag af det foregaaende se, hvor store Dele af en Gruppe forskellige Undergrupper med tilhørende Samlinger danne.

Vi kalde stedse Antallet af Transformationer i Gruppen  $N$ , og udelade saadanne Transformationer af Betragtningen, der ere cykliske, eller hvis Transformationer alle transformere den samme rette Linie til sig selv.

Lad os først antage, at ingen Potenser af Transformationer med forskellige Dobbelpunkter ere identiske.

Vi antage først, at der til 3 givne Dobbelpunkter høre Transformationer, der alle ere af ulige Orden. Transformationerne kunne da alle anses for Potenser af een og samme Transformation  $A$ , hvis Orden vi antage er  $n$ . Er  $n$  forskjellig fra 3, vil  $A$  kun kunne transformeres til sig selv ved de Transformationer, der have samme Dobbelpunkt som  $A$ . Af saadanne gives der  $n$ , og  $A$  med tilhørende Samling udgjør da  $\frac{N}{n}$  Transformationer.

Nu kan det enten være Tilfældet, at der ikke er Transformationer i Gruppen, der ombytte noget af dens Dobbelpunkter. I saa Tilfælde ville de Samlinger, der tilhøre  $A$ 's Potenser, alle være forskellige, og Antallet af Transformationer i alle disse Samlinger tilsammen være

$$\frac{(n-1)}{n} N.$$

Dernæst kan det være Tilfældet, at en Transformation i Gruppen kan ombytte 2 af  $A$ 's Dobbelpunkter. Dette kan kun finde Sted, hvis  $A$ 's Multiplikatorer ere 1,  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$  og da kun for de Dobbelpunkter, der svare til  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$ . I dette Tilfælde ville Potenserne af  $A$  to og to komme til at høre til samme Samling, og  $A$  med tilhørende Samlinger (de Samlinger, der tilhøre  $A$ 's Potenser) vil udgjøre

$$\frac{(n-1)N}{2n}$$

Transformationer.

Endelig, hvis  $A$  er en Transformation af Ordenen  $p$  eller  $3p$ , hvor  $p$  er et Produkt af Primfaktorer af Formen  $3q + 1$ , kan det være Tilfældet, at Dobbelpunkterne for  $A$  kunne kredsforskydes ved andre Transformationer i Gruppen. I saa Tilfælde ville 3 Potenser af  $A$  høre til samme Samling, og  $A$  med Potenser og tilhørende Samlinger indeholder da

$$\frac{(p-1)N}{3p}$$

Transformationer.

Vi have da endelig tilbage at undersøge, hvor mange Transformationer  $A$  med Potenser og tilhørende Samlinger udgjør, naar  $A$  er af 3<sup>die</sup> Orden og ikke er en Potens af en anden Transformation.

Vi kunne da antage, at  $A$  er af Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z, \end{cases}$$

hvor  $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ . Det kommer nu an paa at afgjøre, hvor mange Transformationer, der gives i Gruppen, der lade  $A$  uforandret. Vi behøve kun at undersøge det Tilfælde, hvor  $A$ 's Dobbelpunkter kredsforskydes ved en anden Transformation  $B$  i Gruppen. En saadan Transformation maa være af 3<sup>die</sup> Orden og have Formen

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = py \\ \mu y' = qz \\ \mu z' = rx \end{cases}$$

eller en lignende Form fremkommet ved Kredsforskydning af Leddene paa højre Side. Vi kunne gjerne antage, at i  $B$   $p = q = r = 1$ . Lad nu en anden Transformation, der kredsforskyder  $A$ 's Dobbelpunkter være

$$B_1 \equiv \begin{cases} \mu x' = p_1 z \\ \mu y' = q_1 x \\ \mu z' = r_1 y, \end{cases}$$

saa er

$$BB_1 \equiv \begin{cases} \mu x' = q_1 x \\ \mu y' = r_1 y \\ \mu z' = p_1 z, \end{cases}$$

hvor  $BB_1$  er en Transformation, der har samme Dobbelpunkter som  $A$ , og altsaa maa være en Potens af  $A$ . Man har da

$$\begin{aligned} BB_1 &\equiv A^p \\ B_1 &\equiv A^p B^{-1}. \end{aligned}$$

Enhver Transformation, der lader  $A$  uforandret, faas da ved at multiplicere en Potens af  $B$  med en Potens af  $A$ , og det ses tillige, at enhver saadan Transformation transformerer  $A$  til sig selv. Der gives da 9 Transformationer, der lade  $A$  uforandret, og  $A$  med tilhørende Samling udgjør da  $\frac{N}{9}$  Transformationer. Er der ingen Transformation, der ombytter 2 af  $A$ 's Dobbelpunkter vil  $A$  med Potenser og tilhørende Samlinger udgjøre  $\frac{2N}{9}$  Transformationer, er der derimod saadanne, vil  $A$  og  $A^2$  høre til samme Samling, og  $A$  med Potenser og tilhørende Samlinger udgjøre  $\frac{N}{9}$  Transformationer.

41) Vi gaa nu over til at betragte Transformationer af lige Orden, der alle have samme Dobbelpunkter, idet vi stadigt gjøre samme Forudsætning som i 40).

Da maa enten alle Transformationer, der have samme Dobbelpunkter, være Potenser af samme Transformation, eller ogsaa maa de være Potenser af samme Transformation i Forbindelse med disse samme Transformationer multiplicerede med en Transformation af 2den Orden, der har sit Centrum i et af Dobbelpunkterne, sin Axe gaende gennem de to andre. Fandtes der andre Transformationer med de samme Dobbelpunkter, vilde der forekomme perspektiviske Transformationer af højere end 2den Orden, og vi vilde altsaa føres til saadanne Grupper, som vi her forbigaa.

I sidste Tilfælde bestaa altsaa Transformationerne af S sammensætninger af 2 Transformationer af Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{og} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = y \\ \mu z' = -z, \end{cases}$$

hvor  $A$  er en Transformation af lige Orden. Thi var  $A$  af ulige Orden, vilde baade  $A$  og  $B$  være Potenser af samme Transformation  $AB$ .  $A$  maa desuden være af Orden  $2n$ , hvor  $n$  er et ulige Tal. Var  $A$  af Ordenen  $2^p n$ , var  $A^{2^{p-2} \cdot n}$  af 4de Orden og havde da Multiplikatorerne  $1, i, -i$ , den maatte da hedde

$$A' \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm ix \\ \mu y' = y \\ \mu z' = \mp iz. \end{cases}$$

Thi havde  $x$  andre Multiplikatorer, vilde  $A'B$  være perspektivisk af 4de Orden. Men da er  $B$  2den Potens af  $A'$ , og der var altsaa ikke 2 Transformationer med de samme Dobbelpunkter, hvoraf den ene ikke var en Potens af den anden. Vi kunne altsaa forudsætte, at  $A$  er af 2nte Orden. S sammensætninger af  $A$  og  $B$  maa da give  $(4n-1)$  Transformationer, herunder ikke indbefattet den identiske Transformation.

Man faar nu ganske paa samme Maade, som naar Transformationens Orden var ulige, at eftersom der ikke er nogen Transformation, eller der er en Transformation, der

ombytter to Dobbelpunkter for en Transformation  $A$ , vil  $A$  med Potenser og tilhørende Samlinger udgjøre respektive  $\frac{q-1}{q}N$  eller  $\frac{q-1}{2q}N$  Transformationer, naar der er  $q$  Transformationer, der have samme Dobbelpunkter som  $A$ . Ombyttes  $A$ 's Dobbelpunkter, maa Multiplikatorerne være  $\pm 1, +a, \pm \bar{a}$ , idet  $a$  er en Rod af Enheden.

Lad os betragte det Tilfælde nøjere, hvor den første Multiplikator er  $-1$ . Man har da

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = -\bar{a}z, \end{cases}$$

medens Transformationen  $B$ , der ombytter  $A$ 's Dobbelpunkter, maa have Formen

$$B = \begin{cases} \mu x' = a'x \\ \mu y' = c_2 z \\ \mu z' = b_3 y. \end{cases}$$

Man har da

$$B^2 \equiv \begin{cases} \mu x' = a'^2 x \\ \mu y' = c_2 b_3 y \\ \mu z' = c_2 b_3 z, \end{cases}$$

som enten er identisk eller perspektivisk af 2den Orden; thi da Determinanten for  $B$  er 1, er  $a'c_2 b_3 = -1$ ,  $c_2 b_3 = -\bar{a}'$ . Er altsaa  $a' = +1$ , saa er  $B^2$  af Formen

$$B^2 \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -y \\ \mu z' = -z, \end{cases}$$

$B$  af 4de Orden. Vi kunne gjerne forudsætte  $B$  af 4de Orden; thi ellers var  $a' = -1$ ,  $AB$  af 4de Orden.

Er der nu en Transformation af 2den Orden med samme Dobbelpunkter som  $A$ , uden at være en Potens af  $A$ , eller er  $A$  af Ordenen  $2^p \cdot q$ ,  $p > 1$ , ses det, at  $B^2$  og en Potens af en Transformation med samme Dobbelpunkter som  $A$  ere identiske. I dette Tilfælde behøver  $A$  med tilhørende Samlinger ikke at indeholde det fundne Antal Transformationer, hvad der heller ikke gjælder om  $B$  med tilhørende Samlinger, idet vi da ere komne ind paa Betragtningen af Transformationer med forskellige Dobbelpunkter, der have samme Potens, hvad vi senere nøjere skulle behandle.

Er Transformationen  $A$  af 2den Orden og ikke nogen Potens af en anden Transformation i Gruppen, kan de foregaaende Regler ikke direkte anvendes. Men da vil den enten ikke kunne transformeres til sig selv ved nogen anden Transformation i Gruppen, i hvilket Tilfælde den med tilhørende Samling udgjør  $\frac{N}{2}$  Transformationer, eller ogsaa vil den transformeres til sig selv ved en Transformation i Gruppen, der har et Dobbelpunkt



i dens Centrum, 2 i dens Axe. Kaldes denne  $B$ , kan ikke  $B$  (eller nogen Potens af den) være af ulige Orden; thi, var  $B^m$  af ulige Orden vilde  $AB$  være af lige Orden og en Potens heraf være identisk med  $A$ . Ligesom før (pag. 159) se vi da, at  $B$  maa være af 2den Orden. Tillige ses det, (paa samme Maade som ved Transformationen af 3die Orden), at, hvis  $A$  ikke skal være en Transformation, hvis Centrum falder sammen med Dobbeltpunktet i en anden Transformation, der ikke er af 2den Orden, maa  $A$  alene transformeres til sig selv ved  $A$ ,  $B$  og  $AB$ , saa at  $A$  med Samling udgjør  $\frac{N}{4}$  Transformationer.

Da een Potens af en Transformation af lige Orden altid er en Transformation af 2den Orden, ses det, at hvis Gruppen indeholder en Transformation  $A$  af lige Orden,  $2n$ , og en Transformation  $B$ , der kredsforskyder  $A$ 's Dobbeltpunkter, maa den ogsaa indeholde perspektiviske Transformationer af 2den Orden med Centrum i et vilkaarligt af  $A$ 's Dobbeltpunkter. Der maa da være  $4n-1$  Transformationer, der have samme Dobbeltpunkter som  $A$ .  $A$  med tilhørende Samling vil komme til at indeholde  $\frac{N}{4n}$  Transformationer, og da de i Samlingen forekommende Transformationer ville have  $\frac{N}{12n}$  forskellige Sæt Dobbeltpunkter, idet 3 af de Transformationer, hvortil  $A$  transformeres, have samme Dobbeltpunkterne som  $A$ , vil  $A$  og de Transformationer, der have samme Dobbeltpunkter som  $A$  med tilhørende Samlinger udgjøre  $\frac{(4n-1)N}{12n}$  Transformationer.

42) Vi gaa nu over til at betragte Undergrupper, hvor Transformationer med forskellige Dobbeltpunkter have samme Potens, idet vi stadig kun tage Hensyn til saadanne Grupper, hvori ikke alle Transformationer transformere samme Linie til sig selv eller ikke ere cykliske.

Vi kunne nu først antage, at alle disse Transformationer, der have samme Potens, som altid maa være en Transformation af 2den Orden, transformere en ret Linie  $x = 0$  til sig selv ved en ikke-cyklisk Gruppe.

2 Transformationer i Gruppen (se (38)) ville da være

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = az \end{cases} \quad \text{og} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

Vi kunne ikke have nogen anden Transformation, der har sit Dobbeltpunkt i et af de Dobbeltpunkter paa  $x = 0$ , der tilhører en af de Transformationer, der transformere  $x = 0$  til sig selv, f. Ex. i et af  $A$ 's Dobbeltpunkter, end Potenser af  $A$ ; thi da vilde een af Dobbeltlinierne for  $A$  enten transformeres til sig selv ved en Gruppe af Transformationer, der havde et fælles Dobbeltpunkt i  $A$ 's Dobbeltpunkt  $x = 0, z = 0$ , uden at Dobbeltpunkterne i alle Transformationerne vare sammenfaldende med  $A$ 's Dobbeltpunkter, og saaledes, at den til  $x = 0, z = 0$  svarende Multiplikator af  $A$  var forskjellig fra  $\pm 1$ ,

(idet der til ethvert Dobbelpunkt i  $x = 0$  i det mindste svarer en Multiplikator forskjellig fra  $\pm 1$ ), hvad der er umuligt under den gjorte Forudsætning (se Begyndelsen af (42)), eller ogsaa vilde der være en Transformation, med samme Dobbelpunkter som  $A$ , der uden at være en Potens af  $A$  transformerede  $x = 0$  til sig selv.

Da der ikke kan komme nye Transformationer til for  $x = 0$ , da Gruppen for dennes Vedkommende er fuldstændig, og da den til  $y = 0$ ,  $z = 0$  svarende Multiplikator maa være  $+1$ , ses dette at være umuligt.

Kaldes nu, ligesom før, Antallet af Transformationer i hele Gruppen  $N$ , saa er enhver Transformation  $A$ , der transformerer  $x = 0$  ved en Transformation af  $n$ te Orden, af  $2n$ te Orden. En saadan transformeres da til sig selv ved  $2n$  Transformationer og udgjør med tilhørende Samling  $\frac{N}{2n}$  Transformationer. Der kan ikke eksistere en Transformation i Gruppen, der ombytter alle dens  $3$  Dobbelpunkter, da der saa vilde komme en ny Transformation med samme Dobbelpunkter som  $A$ . Den  $n$ te Potens af  $A$  er af  $2$ den Orden.

Det ses nu, at alle Potenser af  $A$ , med Undtagelse af den  $n$ te, med tilhørende Samlinger, ville udgjøre

$$\frac{(2n-2)N}{2n} \text{ eller } \frac{(2n-2)}{4n} N,$$

eftersom der er Transformationer, der ombytte  $A$ 's Dobbelpunkter, eller der ikke er saadanne, medens den  $n$ te Potens af  $A$ , der er af  $2$ den Orden, transformeres til sig selv ved alle Transformationer, der transformere  $x = 0$  til sig selv.

Er dette Antal  $2q$ , udgjør altsaa  $A^n$  med tilhørende Samling  $\frac{N}{2q}$  Transformationer. Tages nu Summen af Antallet af alle de Transformationer, hvorved  $x = 0$  transformeres til sig selv, faas

$$\left( \sum \frac{n-1}{n} + \sum \frac{n_1-1}{2n_1} \right) N + \frac{N}{2q} = \frac{2q-1}{2q} N,$$

idet  $N \sum \frac{n-1}{n}$  antyder Antallet af Transformationer, hvis Dobbelpunkter ikke ombyttes ved nogen Transformation i Gruppen,  $N \sum \frac{n_1-1}{2n_1}$  Antallet af de Transformationer, hvis Dobbelpunkter ombyttes, og Ligningen faas ifølge de bekjendte Sætninger om Transformationsgrupperne for den rette Linie.

Er Gruppen cyklisk for  $x = 0$ 's Vedkommende, kan den tænkes opstaaet ved S sammensætning af  $2$  Transformationer

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = \pm az \end{cases} \quad \text{og} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -z \\ \mu z' = y, \end{cases}$$

for underste Fortegns Vedkommende muligvis i Forbindelse med perspektiviske Transfor-

mationer af 2den Orden, der have deres Centrere henholdsvis i  $x = 0, y = 0$  og  $x = 0, z = 0$ . Vi ville først undersøge de Tilfælde, hvor vi for  $A$  bruge øverste Fortegn.

Lad os først antage, at  $A$  transformerer  $x = 0$  ved en Transformation af ulige Orden. Vi kunne da bruge akkurat de samme Betragtninger som i forrige Tilfælde.  $A$  maa altid være af lige Orden og i dette Tilfælde af  $2q$ de Orden, hvor  $q$  er et ulige Tal. Sættningen af  $A$  og  $B$  giver da  $4q - 1$  Transformationer,  $A$  og dens Potenser  $2q - 1$  Transformationer, medens der bliver  $2q$  Transformationer af 4de Orden ved at danne Produkterne  $A^m B$ . I Forbindelse med de tilhørende Samlinger ville disse Transformationer tilsammen udgjøre  $\frac{4q-1}{4q} N$  Transformationer.

Transformerer  $A$   $x = 0$  til sig selv ved en Transformation af lige Orden, maa  $A$ , idet vi kun her tage Hensyn til øverste Fortegn, være af Ordenen  $4q$ , hvor  $q$  er et helt Tal. Den cykliske Gruppe, hvorved  $x = 0$  transformeres til sig selv, kommer til at indeholde 3 forskellige Samlinger. Kalde vi nemlig den Transformation, hvorved  $A$  transformerer  $x = 0$  til sig selv,  $A'$ , den tilsvarende hvorved  $B$  transformerer  $x = 0$  til sig selv  $B'$  o. s. v., vil Gruppen for  $x = 0$  indeholde  $A'$  og dens Potenser, Samlingen bestaaende af  $B'$  multipliceret med lige Potenser af  $A'$  og Samlingen bestaaende af  $A'$  multipliceret med  $\mu$  lige Potenser, altsaa indeholdende henholdsvis Transformationerne  $A'^{2m} B'$  og  $A'^{2m+1} B'$ , hvor  $m$  er et vilkaarligt Tal. Disse udgjøre den fuldstændige Gruppe, hvorved  $x = 0$  transformeres til sig selv. De tilsvarende Transformationer for Planet  $A^{2m} B$  og  $A^{2m+1} B$  ere af 4de Orden, hver med 2 Dobbelpunkter paa  $x = 0$ , og skulde en Transformation i Gruppen transformere saadanne 2 Transformationer til hinanden, maatte den ogsaa transformere  $x = 0$  til sig selv. Men da existerede der for  $x = 0$  en Transformation, foruden de nævnte, hvad der ikke kan være Tilfældet, under Forudsætning af, at  $A'$  er Transformationen af højest Orden, hvorved  $x = 0$  transformeres til sig selv.

De Transformationer, hvorved  $A$  transformeres til sig selv, med tilhørende Samlinger ville da i dette Tilfælde udgjøre  $\frac{8q-1}{8q} N$  Transformationer.

Vi antage nu, at der skal bruges underste Fortegn; men at der ikke findes Transformationer af 2den Orden med Centrum i  $x = 0, y = 0$  eller  $x = 0, z = 0$ .  $A$  maa da være af Ordenen  $8q$ , hvor  $q$  er et helt Tal. Den kan nemlig ikke være af Ordenen  $2q$ , naar  $q$  er ulige, idet da ingen Potens af den vilde være en Transformation af 2den Orden med Centrum i  $y = 0, z = 0$ . Den kan heller ikke være af Ordenen  $4q$ , naar  $q$  er ulige.  $A^q$  vilde nemlig da være af 4de Orden, og da Koefficienten til  $x$  i første Ligning for  $A^q$  vilde være  $-1$ , maatte den have Multiplikatorerne  $-1, i, i$  og førte altsaa til de Grupper, hvis Undersøgelse vi her forbigaa.

Bruge vi de samme Betegnelser som før, vil der være i Gruppen for  $x = 0$  tre Samlinger,  $A'$  med Potenser, Transformationerne  $A'^{2m} B', A'^{2m+1} B'$ . De tilsvarende Trans-

formationer af Planet ere her henholdsvis af Ordenen 4 og 2, og det ses, at de paa  $x = 0$  liggende Dobbelpunkter for den ene ikke kan transformeres hen til Dobbelpunkterne for den anden, enten af samme Grund som før, eller fordi Gruppen vilde komme til at indeholde perspektiviske Transformationer af 4de Orden.

Derimod er der her intet i Veien for, at det 3die Dobbelpunkt for en Transformation  $A^{2m}B$  muligvis ved en Transformation i Gruppen kunde transformeres hen til Perspektivcentret for en Transformation  $A^{2m+1}B$ , saa at altsaa  $A^{2m+1}B$  og  $(A^{2m}B)^2$  hørte til samme Samling. Vi se imidlertid, at  $A$  med Potenser og tilhørende Samlinger samt  $A^{2m}B$  med tilhørende Samlinger maa udgjøre  $\frac{12q-1}{16q}N$  Transformationer.

Skal Gruppen indeholde Transformationer af 2den Orden med Centrum i  $x = 0$ ,  $y = 0$  og  $z = 0$ , kunne vi altid tænke os de Transformationer, der have samme Dobbelpunkter som  $A$ , fremkomne ved Sættning af 2 Transformationer

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = az \end{cases} \quad \text{og} \quad A_1 \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = y \\ \mu z' = -z, \end{cases}$$

hvor  $A$  er af lige Orden  $2q$ . Der findes da  $4q$  Transformationer, der have samme Dobbelpunkter som  $A$ .  $q$  maa være et ulige Tal, da der ellers vilde forekomme perspektiviske Transformationer af 4de Orden. Idet vi ligesom før antage, at Gruppen indeholder en Transformation

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = -z \\ \mu z' = y, \end{cases}$$

se vi, at den vil indeholde  $A$  med tilhørende Samlinger samt Transformationer af 4de Orden med tilhørende Samlinger af Formen  $A^m B$ ; endelig vil den endnu indeholde Transformationer af 2den Orden af Formen  $A^m A_1 B$ , men ligesom før er det muligt, at disse høre til de allerede før omtalte Samlinger. Er nu  $q > 3$ , vil  $A$  og Transformationerne  $A^m B$  med tilhørende Samlinger udgjøre  $\frac{6q-1}{8q}N$  Transformationer. Er  $q = 3$ , kan det være, at Gruppen indeholder en Transformation, der kredsforskyder  $A$ 's Dobbelpunkter, og  $A$  med tilhørende Samlinger vil da udgjøre  $\frac{11}{72}N$  Transformationer, medens Transformationerne  $A^m B$  med tilhørende Samlinger ville udgjøre  $\frac{1}{4}N$  Transformationer, saa at disse Samlinger tilsammen udgjøre  $\frac{29}{72}N$ .

Idet ifølge 40) en Transformation,  $T$ , med tilhørende Samlinger udgjør  $\frac{n-1}{n}N$ ,  $\frac{n-1}{2n}N$  eller  $\frac{n-1}{3n}N$  eller endelig mulig  $\frac{N}{9}$  Transformationer, naar ingen Potens af  $T$  er identisk med en Potens af en anden Transformation, der har forskellige Dobbelpunkter fra  $T$ , er det nu let at bestemme alle de Grupper, der kunne forekomme, som indeholde

Transformationer med forskellige Dobbelpunkter; men hvoraf en Potens er samme Transformation. Thi i alle de omtalte Tilfælde, hvor  $A$  var af Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = az \end{cases}$$

og der ikke forekom nogen perspektivisk Transformation med Centrum i  $x = 0, y = 0$ , saa vi, at Transformationerne  $A$  og  $B$  og Produkter af disse med tilhørende Samlinger maatte udgjøre

$$\frac{p-1}{p} N$$

Transformationer, hvor  $p$  mindst var 8. Er nu  $p$  større end 8 kan Gruppen ikke indeholde nogen Samling, foruden de nævnte, da saa Antallet af Transformationer i de forskellige Samlinger tilsammen var større end  $N$ , hvad der er umuligt. Vi maa da have

$$\frac{p-1}{p} N + 1 = N,$$

idet Gruppen endnu foruden de omtalte Samlinger indeholder den identiske Transformation. Vi have da

$$N = p,$$

og da dette netop er det Antal Transformationer, man faar ved at sammensætte  $A$  og  $B$ , bestaar Gruppen kun af disse Transformationer og Produkter af dem.

Var  $p = 8$ , kunde Gruppen muligvis endnu indeholde en Samling af Transformationer af 3<sup>die</sup> Orden, hvori enhver Transformations Dobbelpunkter baade kunde kredsfor skydes ved en anden Transformation i Gruppen, og hvor ogsaa to Dobbelpunkter kunne ombyttes ved en Transformation, der lod det tredie uforandret.

Gruppen vil komme til at bestaa af Transformationer af 4<sup>de</sup> Orden og deres Potenser, og af Transformationer af 3<sup>die</sup> Orden. Man skulde have

$$\frac{7}{8} N + \frac{1}{9} N + 1 = N$$

$$\underline{N = 72.}$$

Gruppen er, saaledes som det senere skal vises, endelig. Den vil til Undergruppe have en Gruppe paa 36 Transformationer, som senere nøjere skal undersøges, og om hvilken det skal vises, at den er Undergruppe.

Gruppen skal indeholde 8 Transformationer af 3<sup>die</sup> Orden, der danne en cyklisk Undergruppe.

Vi komme nu til de Tilfælde, hvor Gruppen skulde indeholde Transformationer

med forskellige Dobbelpunkter, men hvoraf en Potens var samme perspektiviske Transformation, og som indeholdt en Transformation

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = -az. \end{cases}$$

Hvis  $n$  ikke er 3, og  $A$  havde fælles Dobbelpunkter med  $4n$  Transformationer, saa vi, at det Antal Transformationer, der transformerer  $x = 0$  til sig selv, med tilhørende Samlinger udgjør mindst

$$\frac{6n-1}{8n} N,$$

hvor  $n$  mindst var 2. Det ses da, at Gruppen, foruden de omtalte Samlinger, maa indeholde een Samling til af Transformationer af 2den Orden, idet en saadan Samling paa  $\frac{1}{4} N$  Transformationer er den eneste mulige Samling, den endnu kan indeholde. Man har da

$$\frac{6n-1}{8n} N + \frac{1}{4} N + 1 = N \\ N = 8n,$$

hvoraf ses, at Gruppen alene indeholder Transformationer, der transformere samme rette Linie til sig selv.

Vi have da det ene Tilfælde tilbage,  $n = 3$ , og behøve kun at behandle det under den Forudsætning, at

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = az, \end{cases} \quad a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

og at Gruppen indeholder en Transformation, der kredsforskyder  $A$ 's Dobbelpunkter. Vi saa da, at  $A$  og de Transformationer af 4de Orden, der transformere  $x = 0$  til sig selv med tilhørende Samlinger udgjøre

$$\frac{29N}{72}$$

Transformationer. Tillige ses, at de Transformationer, man faar ved at sammensætte  $A$ ,  $B$  (se S. 164) og en Transformation af 3die Orden  $C$ , der kredsforskyder  $A$ 's Dobbelpunkter, udgjøre 71 Transformationer.

Det ses umiddelbart, at Gruppen ikke endnu kan indeholde 2 Transformationer med tilhørende Samlinger, for hvilke andre Transformationer i Gruppen kan ombytte to Dobbelpunkter, idet disse da, da Antallet af Transformationer i dem begge tilsammen ikke kan udgjøre flere end  $\frac{43}{72} N$  Transformationer, begge maatte være af 2den Orden eller den ene af 3die Orden, og det ogsaa ses, at dette er umuligt, da man skulde have

$$\frac{29}{72}N + \frac{36}{72}N + 1 = N,$$

som er en umulig Ligning eller  $N = 72$ , som ogsaa er umulig.

Man maa da have

$$\frac{29}{72}N + \frac{n-1}{2n}N + 2\frac{n_1-1}{3n_1}N + \frac{q}{9}N + 1 = N,$$

hvor dog et eller flere af Leddene kunne mangle. Det er saaledes tydeligt, idet vi antage  $n_1 \geq 7$ , (den mindste Værdi, forskjellig fra 3,  $n_1$  kan have), at, hvis Leddene med  $n$  og  $n_1$  begge skulle existere, maa man have  $n = 2$ , og altsaa

$$\frac{29}{72}N + \frac{1}{4}N + \frac{n_1-1}{3n_1}N + 1 = N$$

$$N = \frac{72n_1}{n_1 + 24},$$

som ses at være umulig, da Gruppen kom til at indeholde færre end 72 Transformationer. Vi maa altsaa enten udelade Leddet indeholdende  $n$  eller det, som indeholder  $n_1$ . Vi have da i første Tilfælde

$$\frac{29}{72}N + \frac{n-1}{2n}N + \frac{q}{9}N + 1 = N,$$

$$N = \frac{72n}{36-n}$$

idet  $q$  maa sættes lig 1.

Denne Formel kan muligvis bruges, naar  $n = 35$ , som vilde give  $N = 72 \cdot 35$ . Gruppen skulde da indeholde  $36 \cdot 34$  Transformationer af 35te Orden og Potenser af disse. Der maatte altsaa være 36 forskjellige Sæt Dobbelpunkter, hvortil hørte Transformationer af 35te Orden. Gruppen skulde kun indeholde  $\frac{N}{24} = 3 \cdot 35$  Transformationer af 2den Orden, og disse hørte alle til samme Samling. Men da ses Gruppen at være umulig. Thi der vilde være 35 Transformationer af 2den Orden, som ombyttede Dobbelpunkterne for enhver Transformation af 35te Orden, og som altsaa havde sit Centrum  $P$  paa en Dobbeltlinie  $D$  for en Transformation af 35te Orden.

Ethvert Centrum for en Transformation af 2den Orden er imidlertid Dobbelpunkt for en Transformation af 6te Orden, og en Linie  $D$  gaaende gennem  $P$  kunde altsaa transformeres hen til 6 Linier, alle gaaende gennem  $P$ . Da hver af disse Linier skulde indeholde 35 Centra for Transformationer af 2den Orden, er herved Gruppens Umulighed bevist.

Idet det er umuligt at gennemgaa alle Tilfælde udførligt, skal kun bemærkes, at lignende Maader vilde kunne bruges for at vise Umuligheden af lavere Værdier af  $n$ .

Manglede Leddet indeholdende  $n$  kunde man sætte

$$\frac{29}{72}N + \frac{n_1-1}{3n_1}N + \frac{n_2-1}{3n_2}N + 1 = N.$$

Man kunde her ikke sætte begge Størrelserne  $n_1$  og  $n_2$  større end 7. Vi kunne da sætte  $n_1 = 7$  og faa da

$$N = \frac{504 n_2}{168 - 11 n_2},$$

hvor det eneste mulige Tal skulde være  $n_2 = 12$ , der vilde give  $N = 168$ , som dog ses heller ikke at kunne bruges, da 72 ikke gaar op heri, hvad der maa være Tilfældet, da  $\frac{29}{72}N$  skal være et helt Tal.

Endelig kan man forsøge at sætte

$$\frac{29}{72}N + \frac{n_1 - 1}{3 n_1}N + \frac{q}{9}N + 1 = N$$

$$N = \frac{72 n_1}{19 n_1 - 8 q n_1 + 24},$$

som let ses ikke at kunne bruges.

Det fremgaar heraf, at hvis en Gruppe indeholder en Transformation  $A$ , og baade indeholder andre Transformationer, der kredsfor skyde Dobbelpunkterne i  $A$ , og saadanne, der ombytte to af  $A$ 's Dobbelpunkter, medens de lade det tredie uforandret, medens  $A$  er en Transformation af Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = -\alpha y, \end{cases} \quad \alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

er Gruppen cyklisk.

43) Vi ville nu endelig gaa over til at bestemme alle de Grupper, som, uden at være cykliske, eller uden at alle Transformationerne i Gruppen transformere samme rette Linie til sig selv, ikke indeholde Transformationer med forskellige Dobbelpunkter, hvoraf en Potens er samme perspektiviske Transformation af 2den Orden.

I en saadan Gruppe maa der ikke forekomme perspektiviske Transformationer af højere end 2den Orden.

Vi have allerede set, at hvis en saadan Gruppe indeholder en Transformation  $A$  af  $n$ te Orden, eller  $n$  Transformationer, der have de samme Dobbelpunkter, ville disse med tilhørende Samlinger udgjøre

$$\frac{n-1}{n}N, \quad \frac{n-1}{2n}N, \quad \frac{n-1}{3n}N$$

Transformationer, eftersom der ikke gives nogen anden Transformation i Gruppen, der ombytter Dobbelpunkterne for en Transformation i Samlingen, eller der gives en Transformation, der ombytter to Dobbelpunkter, men lader det tredie uforandret, eller der gives en Transformation, der kredsfor skyder alle 3 Dobbelpunkter.



Da  $n-1$  er primisk med  $n$ , og Antallet af Transformationer i en Samling skal være et helt Tal, maa altsaa  $\frac{N}{n}$  være et helt Tal, i de to sidst omtalte Tilfælde ses tillige  $\frac{N}{2n}$  eller  $\frac{N}{3n}$  at maatte være hele, dersom  $N$  er et Multiplum henholdsvis af 2 eller 3.

$N$  maa saaledes være et Tal, der indeholder det mindste fælles delelige Tal for Ordenen af de Transformationer, Gruppen indeholder, som Faktor.

Betegnes ved  $\Sigma \frac{n-1}{n} N$  Summen af Antallet af alle de Samlinger Transformationer, Gruppen indeholder, i hvilke ikke to Dobbelpunkter for en Transformation i Samlingen ombyttes ved nogen anden Transformation hørende til Gruppen, o. s. v., ses det, at det samlede Antal Transformationer i Gruppen er bestemt ved

$$N \left( \Sigma \frac{n-1}{n} + \Sigma \frac{n_1-1}{2n_1} + \Sigma \frac{n_2-1}{3n_2} + \frac{q}{9} \right) + 1 = N, \quad (79)$$

idet  $q$  er Antallet af Samlinger i Gruppen bestaaende af Transformationer af 3<sup>die</sup> Orden, hvis to Dobbelpunkter baade ombyttes ved en Transformation i Gruppen, og hvis Dobbelpunkter alle tre kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen.

Ligningen (79) kan ogsaa skrives

$$\frac{1}{N} = 1 - \Sigma \frac{n-1}{n} - \Sigma \frac{n_1-1}{2n_1} - \Sigma \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{q}{9}. \quad (80)$$

Da i højre Side af denne Ligning Nævneren i det højeste er mindste fælles delelige Tal for Ordenen af de Transformationer, der indgaa i Gruppen, eller dette Tal multipliceret med 2, 3 eller 6, idet man tænker sig alle Brøkerne paa højre Side gjorte eensbenævnte, og efter udført Regning forkortede saa meget som muligt, har man følgende Sætning:

Antallet af Transformationer i en endelig Gruppe er det mindste fælles delelige Tal for Ordenen af de i Gruppen indgaaende Transformationer, eller dette Tal multipliceret med 2, 3 eller 6. Det ses tillige, at Faktorerne 2, 3 eller 6 til det mindste fælles delelige Tal kun kan forekomme, forsaavidt Gruppen indeholder Transformationer, for hvilke kun 2 Dobbelpunkter ombyttes ved en Transformation i Gruppen, eller Transformationer for hvilke alle 3 Dobbelpunkter kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen eller Transformationer af begge disse Arter. (81)

Hører der til Gruppen kun Transformationer, hvori intet Dobbelpunkt ombyttes ved en anden Transformation eller højst 2 Dobbelpunkter ombyttes, faa vi de samme Tal frem for Antallet af Transformationer i Gruppen og Antallet af Transformationer i Samlingerne, som vi allerede have faaet ved de endelige Grupper for den rette Linie. Vi ville derfor kun anstille Undersøgelser, for saa vidt Gruppen indeholder Transformationer, i hvilke alle tre Dobbelpunkter kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen.

Her følger nogle Antydninger af, hvorledes man ofte kan afgjøre Gruppernes Mulighed, idet i det følgende Gruppernes Umulighed, hvor de enkelte Tal tilfredsstille (80), kun vil blive nævnt, eller i det højeste Beviset kun antydet.

Et vigtigt Middel haves i Sætning (81). Hvis Gruppen ikke er cyklisk, maa den i det mindste indeholde to Transformationer af  $n$ te Orden  $A$  og  $B$  med forskellige Dobbelpunkter, hvis den indeholder en saadan, idet i modsat Tilfælde alle Transformationer i Gruppen skulde lade  $A$ 's Dobbelpunkter uforandrede eller ombytte dem, saa at Gruppen mod Forudsætningen var cyklisk.

Har nu  $A$  og  $B$  forskellige Dobbelpunkter, ville

$$B, ABA^{-1}, A^2BA^{-2} \dots A^{n-1}BA^{-n+1}$$

være lutter forskellige Transformationer, og to af dem kunne kun have samme Dobbelpunkter, hvis  $A$  eller en af dens Potenser ombytter to eller alle tre Dobbelpunkter for  $B$ . Gruppen vil da i de nævnte Tilfælde mindst komme til at indeholde, (da den foruden de nævnte Transformationer indeholder  $A$ ),  $n+1$ ,  $\frac{n}{2}+1$  eller  $\frac{n}{3}+1$  Transformationer af  $n$ te Orden med forskellige Dobbelpunkter hørende til samme Samling, og Samlingen maa da mindst indeholde

$$(n-1)(n+1), (n-1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ eller } (n-1)\left(\frac{n}{3}+1\right)$$

Transformationer, og da Antallet af Transformationer i Samlingen skal være

$$\frac{n-1}{n}N, \frac{n-1}{2n}N \text{ eller } \frac{n-1}{3n},$$

maa  $N$  i de tre Tilfælde være lig eller større end

$$n(n+1), n(n+2) \text{ eller } n(n+3).$$

Det ses tillige, at de sidste Tilfælde kun kunne indtræde, naar  $n$  er delelig med 2 eller 3.

44) Det ses, at en Gruppe i det højeste kan indeholde en Samling af Transformationer, hvis Dobbelpunkter ikke ombyttes af nogen Transformation i Gruppen.

Ere disse Transformationer af 2den Orden, kan Gruppen endnu indeholde en Samling Transformationer, for hvilke to Dobbelpunkter ombyttes ved en anden Transformation i Gruppen<sup>1)</sup>.

Er denne anden Samling ogsaa af 2den Orden, d. v. s. ere dens Transformationer af 2den Orden, kunde Gruppen muligvis endnu indeholde enten 2 Samlinger Transformationer, af 3die Orden, hvis Dobbelpunkter baade kredsfor skydes og ombyttes to og to ved andre Transformationer i Gruppen, eller een Samling Transformationer i Gruppen, hvis Dobbelpunkter kan kredsfor skydes ved en anden Transformation i Gruppen. Man har da

<sup>1)</sup> Her og i det Følgende er Gjennemgangen af en Del Muligheder forbigaaet, der dog alle ses, ved lignende Fremgangsmaader som de brugte, ikke at høre til virkelige Grupper.

$$\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{2N}{9} + 1 = N$$

$$N = 36.$$

Gruppen ses imidlertid let at være umulig. Thi den skal indeholde 18 Transformationer af 2den Orden, der ikke ved nogen anden Transformation i Gruppen transformeres til sig selv. Men ere nu to af disse Transformationer  $A$  og  $B$ , kan man ikke have, at  $AB$  er af 2den Orden; thi da var  $AB \equiv BA$ ,  $BAB \equiv A$  imod Forudsætningen.  $AB$  maa da være en Transformation af 3die Orden og have et af sine Dobbelpunkter paa  $A$ 's Axe. Men da maa  $A$  og  $B$  ved Sættelse danne en cyklisk Gruppe, hvis Transformationer transformere Forbindelseslinien mellem deres Centrer til sig selv, og da denne ikke indeholder Transformationer af højere end 3die Orden, kan endnu kun een Transformation af 2den Orden have sin Axe gaaende gennem Skjæringspunktet for  $A$  og  $B$ 's Axer. Der vil da i det mindste være 8 Transformationer af 3die Orden, der have Dobbelpunkter paa forskellige Steder af  $A$ 's Axe; men Gruppen skal kun indeholde 4 Transformationer af 3die Orden med forskellige Dobbelpunkter, saa at dette er umuligt.

Vi ville derpaa undersøge, hvor vidt Gruppen kan indeholde en Transformation  $A$  af  $n$ te Orden, hvis Dobbelpunkter ikke ombyttes ved nogen Transformation i Gruppen, og een eller flere Samlinger, indeholdende Transformationer, hvis Dobbelpunkter kredsfor-skydes ved en anden Transformation i Gruppen.

Man skal have

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{n} - \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{q}{9} = \frac{3-(n-3)(n_2-1)}{3nn_2} - \frac{q}{9},$$

hvor  $q$  er Antallet af Samlinger af Transformationer af 3die Orden, hvis Dobbelpunkter baade kredsfor-skydes og ombyttes to og to.

Vi sætte først  $n = 2$ ,  $n_2 = 3$ . Vi have da, idet  $q = 2$ ,

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18},$$

$$N = 18.$$

Gruppen skal indeholde 8 Transformationer af 3die Orden, 9 af 2den Orden. Hvis Gruppen eksisterer, maa den være cyklisk. Lad os dernæst antage  $n_2 > 3$ .  $n_2$  maa da i det mindste være 7.

Man har da

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{2} - \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{1}{9} = \frac{n_2+6}{18n_2},$$

idet  $q > 1$  vilde gjøre Ligningen ubrugelig. Det ses imidlertid, at den fremkomne Ligning ogsaa er ubrugelig.

Er  $n > 2$  maa enten Leddet indeholdende  $n_2$  eller 9 bortfalde. Er  $q = 0$ ,  $n_2 > 3$ , maa  $n$  være 3; Gruppen ses at være umulig, ifølge Slutningen af 43.

Er  $n_2 = 3$ ,  $q = 0$  faa vi

$$\frac{1}{N} = \frac{9 - 2n}{9n}, \text{ hvoraf altsaa } n \leq 4.$$

Er  $n = 3$  faas

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{9}, \quad N = 9,$$

Gruppen er umulig.

$n = 4$  giver  $N = 36$ , det skal senere vises, at denne Gruppe ikke eksisterer.

Er Leddet indeholdende  $n_2$  faldet bort, faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{9 - nq}{9n}.$$

$n$  maa være af lige Orden, da der maa være Transformationer i Gruppen, som ombytte to Dobbelpunkter for Transformationen af 3<sup>die</sup> Orden. Vi maa da sætte enten  $n = 4$ ,  $q = 2$ ,  $N = 36$ , hvilket giver, som senere skal vises, en virkelig Gruppe, eller  $n = 8$ ,  $q = 1$ ,  $N = 72$ . . . . . (82)

Denne sidste Gruppe eksisterer ikke. Dens Existens skal undersøges samtidig med de to forriges.

Hermed ere vi færdige med de Grupper, hvis Transformationer ikke have Dobbelpunkter, der ombyttes ved nogen anden Transformation i Gruppen.

45) Vi ville nu behandle saadanne Grupper, der indeholde lutter Transformationer, hvis Dobbelpunkter kredsfor skydes ved andre Transformationer hørende til Gruppen.

Vi skulle da have

$$1 - \sum \frac{n-1}{3n} - \frac{q}{9} = \frac{1}{N}.$$

Vi kunne her lade  $q$  være 1 eller 0. Grupperne kunne i det højeste indeholde to Samlinger Transformationer, der ikke ere af 3<sup>die</sup> Orden.

Thi havde man 3 Samlinger, fik man

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{3n} - \frac{n_1-1}{3n_1} - \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{q}{9} = \frac{nn_1 + nn_2 + n_1n_2 - q}{3nn_1n_2}.$$

Er  $q = 0$  faar man

$$N = \frac{3nn_1n_2}{nn_1 + nn_2 + n_1n_2},$$

som altid er mindre end det højeste af Tallene  $n$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  og altsaa umulig (her ligegyldigt om et eller flere af Tallene er 3).

Er  $q = 1$  faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{-27 + 9(n + n_1 + n_2) - (n-3)(n_1-3)(n_2-3)}{9nn_1n_2},$$

som er umulig, da Tælleren er mindre end 0, med mindre  $n = n_1 = n_2 = 7$ , som er ubrugelig da  $\frac{1}{N} = \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{2}{63}$ , eller  $n = 12$ ,  $n_1 = n_2 = 7$ , som vilde give  $N = 84$ , der er ubrugelig, da 9 skal gaa op i  $N$ .

Vi kunne altsaa i det højeste have to af disse Tal forskellige fra 3, og kunne altsaa sætte

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{2}{9} - \frac{n_1-1}{3n_1} - \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{1}{9} = \frac{n_1+n_2}{3n_1n_2},$$

der ligesom før ses at være ubrugelig<sup>1)</sup>.

Man kunde endelig forsøge at danne Grupper, der kun indeholdt to Samlinger Transformationer, hvis Dobbelpunkter bleve kredsfor-skudte ved en anden Transformation i Gruppen, foruden muligvis endnu en Samling, bestaaende af Transformationer af 3die Orden, hvis Dobbelpunkter baade bleve kredsfor-skudte og ombyttede. Tilfældet vilde stille sig endnu ugunstigere end det foregaaende.

En endelig Gruppe kan da ikke bestaa af lutter Transformationer, hvis Dobbelpunkter kredsfor-skydes ved andre Transformationer i Gruppen.

46) Vi behøve da nu kun at undersøge Grupper, der dels indeholde Transformationer, hvis Dobbelpunkter kredsfor-skydes ved en anden Transformation i Gruppen, dels Transformationer, for hvilke Dobbelpunkterne ombyttes to og to.

Vi sætte da

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{2}{9} - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1-1}{3n_1} - \frac{q}{9}.$$

Vi skulle nu undersøge, hvor naar denne Ligning kan være tilfredsstillt.

Det er klart, at her kan i det højeste være 3 Samlinger af Transformationer, for hvilke kun to Dobbelpunkter ombyttes. Det ses endvidere, at af disse Samlinger maa de to indeholde Transformationer af 2den Orden, den tredje kan indeholde Transformationer af 2den, 3die eller 4de Orden.

Lad os antage, at Gruppen skal indeholde 3 Samlinger Transformationer af 2den Orden. Man skal da have

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{3}{4} - \frac{q}{9} = \frac{9-4q}{36},$$

<sup>1)</sup> Det ses let, at Gruppen ikke kan indeholde 4 Samlinger Transformationer, hvis Dobbelpunkter kredsfor-skydes ved en anden Transformation, med mindre disse Transformationer alle ere af 3die Orden, i hvilket Tilfælde Gruppen er cyklisk.

man maa da have  $q = 2$ ,  $N = 36$ . Det ses let, at Gruppen er umulig. Der skulde være 27 Transformationer af 2den Orden, 8 af 3die i Gruppen. Der er nemlig ikke nogen Transformation af 3die Orden  $B$ , som har Dobbeltpunkt fælles med Centrum for en Transformation af 2den Orden  $A$ . Enhver Transformation  $A$  maa derfor transformere  $B$  hen til en ny Transformation af 3die Orden. Lad os nu antage, at  $A$  ikke ombytter  $B$ 's Dobbeltpunkter, saa maa den transformere et af  $B$ 's Dobbeltpunkter  $P$  hen til et andet Dobbeltpunkt  $P_1$ , og Antallet af Transformationer af 2den Orden viser, at der i det mindste maa være endnu en Transformation  $C$  af 2den Orden, som transformerer  $P$  til  $P_1$ .  $AC$  har da Dobbeltpunkterne  $P$  og  $P_1$ , maa være af 2den Orden og ombytte to Dobbeltpunkter for  $B$ . Det ses da, at den Samling, hvortil  $B$  hører, kun indeholder 4 Transformationer med 6 Dobbeltpunkter. Men da maa der være mindst 6 Transformationer af 2den Orden, der transformere  $P$  til  $P_1$ , og altsaa mindst 5 saadanne, der have Axer gaende gennem  $P$  og  $P_1$ , hvad der er umuligt.

Indeholdt Gruppen 2 Samlinger Transformationer af 2den Orden, een af 3die Orden, maatte man have

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{q}{9}$$

$q = 1$ ,  $N = 18$ , som er umulig, da  $N$  skal være et Multiplum af 4.

Skulde Gruppen indeholde 2 Samlinger Transformationer af 2den Orden, een af 4de Orden, fik man

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{q}{9},$$

$q = 1$ ,  $N = 72$ . Gruppens Umulighed bevises som i næstförrige Tilfælde.

47) Vi antage nu, at der er to Samlinger i Gruppen, for hvilke kun to Dobbeltpunkter i Transformationerne ombyttes. Vi faa da

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1-1}{2n_1} - \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{q}{9} \quad *) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{3n_2} - \frac{q_1}{9}, \quad (83)$$

hvor  $\frac{q_1}{9} = \frac{q}{9} + \frac{1}{3}$ , saa at  $q \geq 3$ .

Lad os først sætte  $n = 2$ . Man faar da

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{3n_2} - \frac{q_1}{9} = \frac{9n_1n_2 + 18n_2 + 12n_1 - 4q_1n_1n_2}{36n_1n_2}.$$

Sætte vi  $q_1 = 3$  faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{24 - (n_1 - 6)(n_2 - 4)}{12n_1n_2}$$

\*)  $\frac{q}{9}N$  angiver her hele Antallet af Transformationer af 3die Orden, hvis Dobbeltpunkter kredsforskydes ved en Transformation i Gruppen.

$$n_1 > 6, \quad n_2 > 4,$$

da ellers  $N$  ligeledes blev mindre, end den efter 43) kan være.

Man maa tillige have

$$24 > (n_1 - 6)(n_2 - 4) \geq 12.$$

Man kan da sætte  $n_2$  lig med

$$7, \quad 12, \quad 13, \quad 19, \quad 21.$$

Er  $n_2 = 7$ , faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{14 - n_1}{28n_1},$$

hvor 3 maa gaa op i  $n_1$ , hvoraf ses, at Ligningen er umulig. Paa samme Maade ses det, at  $n_2 = 13$ ,  $n_2 = 19$  ere ubrugelige.

$n_2 = 12$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{9 - n_1}{18n_1};$$

man maa have  $n_1 = 8$ . Gruppen kan imidlertid ikke existere ifølge samme Ræsonnement som i 46).

$n_2 = 21$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{24 - (n_1 - 6)17}{12 \cdot 21 \cdot n_1};$$

man maatte have  $n_1 = 7$ ,  $N = 12 \cdot 21$ , som er umulig paa Grund af Slutningen af 43).

Sætter man i (83)  $q_1 = 4$ ,  $n = 2$ , faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{18n_2 + 12n_1 - 7n_1n_2}{36n_1n_2}.$$

Satte man her  $n_2 = 3$ , den mindste Værdi den kan have, fik man

$$\frac{1}{N} = \frac{6 - n_1}{12n_1}.$$

Da 9 skal gaa op i Nævneren, maa  $n_1$  være et Multiplum af 9, og Ligningen er ubrugelig.

Satte man  $n_1 = 2$ , fik man

$$\frac{1}{N} = \frac{n_2 + 6}{18n_2},$$

som umiddelbart ses at være ubrugelig, da Nævneren skal være et Multiplum af 4,  $n_2$  lige, og altsaa mindst lig 12. (Anvend ligesom før Slutningen af 43)).

$n_1 = 3$  vilde give

$$\frac{1}{N} = \frac{12 - n_2}{36n_2},$$

hvor  $n_2$  da maa være 3 eller 7, som begge ses at være ubrugelige. Vi kunne da ikke have  $n_1 = 3$ . Man kan sætte

$$\frac{1}{N} = \frac{6(6 - (n_1 - 3)(n_2 - 2)) - n_1 n_2}{36 n_1 n_2},$$

og da  $n_1$  og  $n_2$  skulle være større end 3, behøver man i det højeste at sætte  $n_2 = 7$ . Dette er da den eneste Værdi vi behøve at undersøge. Man har da

$$\frac{1}{N} = \frac{126 - 37 n_1}{36 \cdot 7 \cdot n_1},$$

som ses ikke at være tilfredsstillet for nogen Værdi af  $n_1$ . Vi se saaledes, at der ikke eksisterer Grupper, for hvilke en Samling henhører til en Transformation af 2den Orden.

Vi kunne da lade  $n$  og  $n_1$  mindst være 3.

Vi sætte nu  $n = 3$ . Man har da ifølge (83)

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{3n_2} - \frac{q_1}{9},$$

hvor man maa have  $q_1 \geq 3$ .

Vi sætte da, hvis  $q_1 = 3$ ,

$$\frac{1}{N} = \frac{6 - (n_1 - 3)(n_2 - 2)}{6 n_1 n_2}.$$

Det ses strax, at  $n_1 = 3$  er umulig.

Sætter man  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 7$  faas derimod en virkelig eksisterende Gruppe, for hvilken

$$\underline{N = 168.} \tag{84}$$

Denne skal senere behandles.

Sættes  $n_2 = 3$ , kan man sætte  $n_1 = 8, 6$  eller  $4$ , da  $n_1$  maa være et lige Tal. Det ses let, at intet af disse Tal kan bruges.  $n_1 = 8$  vilde give  $N = 144$ ; men ses let at være ubrugelig, da Gruppen skulde indeholde 9 Transformationer af 8de Orden, hvis Dobbelpunkter ombyttes ved en anden Transformation i Gruppen, og ogsaa kun 9 Transformationer af 2den Orden (smlgn. S. 167).

Er  $q_1 = 4$ ,  $n = 3$  faas af (83)

$$\frac{1}{N} = \frac{9n_2 + 6n_1 - 5n_1 n_2}{18 n_1 n_2},$$

en Ligning, som er umulig, da  $n_1$  og  $n_2$  begge ere lig eller større end 3, saa at Tælleren paa højre Side er 0 eller negativ.

Ere endelig  $n$  og  $n_1$  begge større end 3, saa er

$$\frac{n-1}{2n} + \frac{n_1-1}{2n_1} \geq \frac{3}{4},$$

Gruppen kan ikke endnu indeholde andre Samlinger end Samlinger af 3die Orden, hvis Transformationer have Dobbelpunkter, der kredsforskydes ved en anden Transformation i Gruppen.



Man kan sætte  $q = 1$ , eller  $q = 2$  og faar

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1-1}{2n_1} - \frac{q}{9} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n_1} - \frac{q}{9} = \frac{9(n+n_1) - 2qnn_1}{18nn_1}. \quad (85)$$

Lad os sætte  $q = 2$ , saa faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{9(n+n_1) - 4nn_1}{18nn_1}.$$

Disse Tal,  $n$  og  $n_1$ , kunne ikke begge være større end 4. Vi kunne da sætte  $n = 4$ . Man har da

$$\frac{1}{N} = \frac{36 - 7n_1}{72n_1}.$$

Er her  $n_1 = 4$  faar man  $N = 36$ , som er umulig, da  $N$  skal være et Multiplum af 8.

Er  $n_1 = 5$ , faar man derimod  $N = 360$ , en virkeligt eksisterende Gruppe, som senere skal behandles. . . . . (86)

Er  $q = 1$  har man

$$\frac{1}{N} = \frac{9(n+n_1) - 2nn_1}{18nn_1}.$$

Her maa man have det største af Tallene mindst lig 9, da  $N$  ellers efter 43) kommer til at indeholde for faa Transformationer. Man har da, hvis  $n = 9$ ,

$$\frac{1}{N} = \frac{9 - n_1}{18n_1},$$

hvor  $n_1$  skal være lige. Er  $n_1 < 8$  ses Gruppen at indeholde for faa Transformationer efter 43), og er  $n_1 = 8$  faas  $N = 144$ , der (ligesom S. 167) ses at være umulig.

Er  $n = 8$  faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{72 - 7n_1}{144n_1},$$

her ses  $n_1 = 10$  at være det eneste brugelige Tal. Dette vilde give  $N = 720$ .

Hvis Gruppen eksisterede, maatte den indeholde to Transformationer af 10<sup>de</sup> Orden  $A$  og  $B$ , saa at  $A^5$  ombytter to Dobbelpunkter for  $B^5$  og omvendt, da der eksisterer 36 Transformationer som  $A$  med forskellige Sæt Dobbelpunkter.  $A$  og  $B$  vilde da transformere samme Keglesnit til sig selv, og ses let ikke at kunne tilhøre en endelig Gruppe.

Er  $n = 7$  faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{63 - 5n_1}{126n_1},$$

hvor  $n_1$  skal være lige. Man maa da sætte  $n_1 = 12$ ,  $N = 18 \cdot 7 \cdot 4$ .

Umuligheden af Gruppen kan vises ligesom i foregaaende Tilfælde.

Lavere Værdier af  $n_1$  kan ikke bruges som Følge af 43).

Er  $n = 6$  faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{18 - n_1}{36n_1}.$$

Man kan her sætte  $n_1 = 17$  og faa da  $N = 36 \cdot 17$ . Umuligheden af Gruppen bevises ligesom i forrige Tilfælde.

Paa lignende Maade ses, at man heller ikke kan have  $n_1 = 16$ , medens Umuligheden af lavere Værdier for  $n_1$  følger af 43.

For  $n = 5$  faas

$$\frac{1}{N} = \frac{45 - n_1}{90 \cdot n_1},$$

hvor  $n_1$  skal være lige. Paa lignende Maade som i de forrige Tilfælde vises, at  $n_1 = 44$  er ubrugelig, og lavere Værdier kunne ikke bruges ifølge 43).

$n = 4$  vilde give

$$\frac{1}{N} = \frac{36 + n_1}{18 n n_1},$$

som umiddelbart ses at være ubrugelig.

47) Vi komme nu endelig til den sidste Mulighed, at Gruppen kan indeholde een Samling af Transformationer, for hvilke to Dobbelpunkter ombyttes, i Forbindelse med flere for hvilke der er cyklisk Ombytning af Dobbelpunkterne.

Vi have da

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1-1}{3n_1} - \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{q}{9}, \quad (87)$$

idet vi antage, at Gruppen indeholder  $\frac{q}{9} N$  Transformationer af 3<sup>die</sup> Orden med cyklisk Ombytning af Dobbelpunkterne.

Vi sætte først  $n = 2$ , og faa da

$$\frac{1}{N} = \frac{3}{4} - \frac{n_1-1}{3n_1} - \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{q}{9} = \frac{3n_1n_2 + 12(n_1+n_2) - 4qn_1n_2}{36n_1n_2}, \quad (88)$$

hvor man enten kan have  $q = 1$  eller  $q = 2$ .

Vi sætte først  $q = 1$ . Man har da

$$\frac{1}{N} = \frac{144 - (n_1 - 12)(n_2 - 12)}{36n_1n_2},$$

hvor man maa have

$$\begin{aligned} 144 - (n_1 - 12)(n_2 - 12) &< 36, \\ (n_1 - 12)(n_2 - 12) &> 108, \end{aligned}$$

da ellers Gruppen ifølge 43) kommer til at indeholde for faa Transformationer. Ligeledes maa man have

$$(n_1 - 12)(n_2 - 12) < 144.$$

En af Størrelserne,  $n_1$  eller  $n_2$ , maa altid være mindre end 24, og vi se, at ingen af dem kan være mindre end 12. Man kan da sætte

$$n_1 = \begin{cases} 13 \\ 19 \\ 21. \end{cases}$$

For  $n_1 = 13$  faar man

$$\frac{1}{N} = \frac{156 - n_2}{36 \cdot 13 \cdot n_2}.$$

Man ser umiddelbart, at  $n_2 > 120$ , og da ifølge 43)  $N > n_2(n_2 + 1)$ , kan man i det højeste forkorte Brøken paa højre Side med 3. Vi have da

$$156 > n_2 \geq 153,$$

og se da, at vi ikke kunne bruge noget af de mellem 156 og 153 liggende Tal, da de indeholde Primfaktorer af Formen  $3p + 2$ .

Vi sætte da  $n_1 = 19$  og faa

$$\frac{1}{N} = \frac{228 - 7n_2}{36 \cdot 19 \cdot n_2}.$$

Man skal her have  $228 > 7n_2$ ,  $33 > n_2$ , og da Tælleren sikkert skal være mindre end 36,  $7n_2 > 192$ ,  $n_2 > 27$ . Man behøver da kun at undersøge  $n_2 = 28$  og 31, som begge vise sig at være ubrugelige.

Vi sætte dernæst  $n_1 = 21$ . Man faar da

$$\frac{1}{N} = \frac{28 - n_2}{4 \cdot 21 \cdot n_2}.$$

Da 9 skal gaa op i  $N$ , maa 3 gaa op i  $n_2$ , og da  $n_2$  maa være større end 24, ses det, at ingen Værdi af  $n_2$  kan bruges.

Vi sætte dernæst  $q = 2$  i (88) og have da

$$\frac{1}{N} = \frac{12(n_1 + n_2) - 5n_1 n_2}{36n_1 n_2}.$$

De mindste Værdier  $n_1$  og  $n_2$  kunne have ere 3 og 7, og det ses, at naar de begge ere 7, er Tælleren paa højre Side negativ, hvad der da ogsaa maa finde Sted for højere Værdier af  $n_1$  og  $n_2$ .

Vi behøve da kun at prøve  $n_1 = 3$ , som giver

$$\frac{1}{N} = \frac{12 - n_2}{12 \cdot 3 \cdot n_2},$$

som ses ikke at give nogen brugelig Værdi for  $n_2$ .

Vi sætte dernæst i (87)  $n = 3$  og faa da

$$\frac{1}{N} = \frac{3n_1 + 3n_2 - qn_1 n_2}{9n_1 n_2},$$

hvor  $n_1$  eller  $n_2$  maa være lige, altsaa mindst lig 12.  $q$  maa da være 1. Vi faa

$$\frac{1}{N} = \frac{9 - (n_1 - 3)(n_2 - 3)}{9n_1 n_2},$$

som ses at være ubrugelig i alle Tilfælde.

Er  $n > 3$  maa i (87) enten  $q$  være 0, eller et af Leddene indeholdende  $n_1$  eller  $n_2$

mangle, idet disse Størrelser antages forskellige fra 3. Lad os antage  $q = 0$ , saa ere  $n_1$  og  $n_2$  mindst 7, og man maa da have

$$\frac{1}{N} < \frac{3}{7} - \frac{n-1}{2n} > 0,$$

altsaa  $n < 7$ .

Lad os prøve de forskellige Værdier,  $n$  kan have, 4, 5, 6, idet da i de 2 første Tilfælde en af Størrelserne  $n_1$  eller  $n_2$  maa være et Multiplum af 3.

$n = 4$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{5}{8} - \frac{n_1-1}{3n_1} - \frac{n_2-1}{3n_2},$$

hvor ikke baade  $n_1$  og  $n_2$  kunne være større end 16. Man har nemlig

$$\frac{1}{N} = \frac{8(n_1+n_2) - n_1n_2}{24n_1n_2} = \frac{64 - (n_1-8)(n_2-8)}{24n_1n_2},$$

og da 3 skal gaa op i en af dem, kan man sætte  $n_1 = 12$ , som giver

$$\frac{1}{N} = \frac{24 - n_2}{72 \cdot n_2}.$$

Den eneste brugelige Værdi her, er muligvis  $n_2 = 21$ , da de andre Værdier ses umiddelbart at maatte forkastes. Imidlertid ses denne ogsaa at være ubrugelig, da man faar  $N = 21 \cdot 24$ . Der skal i Gruppen være Transformationer af 6<sup>te</sup> Orden med 14 forskellige Sæt Dobbelpunkter, hvis Dobbelpunkter kunne kredsforskydes, men hvor ikke to Dobbelpunkter henhørende til samme Transformation kunne ombyttes. Men da der til Gruppen hører Transformationer af 4<sup>de</sup> Orden og 4 ikke gaar op i 14, maa dette netop ske, da en Transformation af 4<sup>de</sup> Orden ikke kan kredsforskyde Dobbelpunkterne.

$n = 5$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{3}{5} - \frac{n_1-1}{3n_1} - \frac{n_2-1}{3n_2} = \frac{5(n_1+n_2) - n_1n_2}{15n_1n_2},$$

som ses ikke at kunne bruges i noget Tilfælde.

$n = 6$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{7}{12} - \frac{n_1-1}{3n_1} - \frac{n_2-1}{3n_2} = \frac{4(n_1+n_2) - n_1n_2}{12n_1n_2},$$

som ses kun at give en mulig Værdi for  $N$ , naar  $n_1 = n_2 = 7$ , i hvilket Tilfælde  $N = 84$ . Gruppen vil kun indeholde 7 Transformationer af 2<sup>den</sup> Orden og Umuligheden bevises som flere Steder før (smlgn. S. 167).

Er  $n > 3$ ,  $q > 0$ , kan der i (87) kun forekomme et af Leddene indeholdende  $n_1$  eller  $n_2$ , og vi sætte

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1-1}{3n_1} - \frac{q}{9} = \frac{3nn_1 + 9n_1 + 6n - 2qnn_1}{18nn_1}, \quad (89)$$

hvor vi kun behøve at give  $q$  Værdierne 2 eller 3.

$q = 2$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{9n_1 + 6n - nn_1}{18nn_1} = \frac{54 - (n-9)(n_1-6)}{18nn_1}.$$

En af Størrelserne  $n$  og  $n_1$  maa være lige, og man maa have

$$36 < (n-9)(n_1-6) < 54,$$

den første Ulighed ifølge 43).

$n_1$  er mindst 7, og man skulde da prøve for  $n_1$  Værdierne mellem 7 og 59, nemlig

7, 12, 13, 19, 21, 28, 31, 37, 39, 43, 49, 52, 57.

Vi sætte da først  $n_1 = 7$ , som giver

$$\frac{1}{N} = \frac{63 - n}{18 \cdot 7 \cdot n},$$

hvor  $n$  skal være lige, og da man skal have

$$\begin{aligned} N &\geq n(n+1), \\ 126 &\geq (n+1)(63-n), \\ n^2 - 62n + 63 &\geq 0, \end{aligned}$$

ses, at  $n$  kun kan være 62. Gruppen ses at være umulig ligesom S. 167 o. fl. St.

$n_1 = 12$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{18 - n}{36n}.$$

Vi behøve her kun at prøve  $n = 17$  eller  $n = 16$ . Umuligheden vises som i forrige Tilfælde.

$n_1 = 13$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{54 - (n-9)7}{18 \cdot 13 \cdot n}.$$

$n$  skal være lige, man faar ingen brugelige Værdier.

$n_1 = 19$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{54 - 13(n-9)}{18nn_1},$$

hvor  $n$  ligeledes skal være lige. Man faar ingen brugelige Værdier af  $n$ .

$n_1 = 21$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{18 - (n-9)5}{6nn_1},$$

hvor  $n$  ogsaa skal være lige, i det højeste lig 12. For  $n = 12$  faas  $N = 24 \cdot 21$ .

Umuligheden af Gruppen bevises atter som S. 167.

$n_1 = 28$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{27 - (n-9)11}{18 \cdot 28 \cdot n}.$$

Det ses, at ingen Værdi af  $n$  kan bruges.

$n_1 = 37$  giver

$$\frac{1}{N} = \frac{54 - 31(n-9)}{18 \cdot 37 \cdot n}$$

ubrugelig. Paa samme Maade ses alle de følgende Værdier at være ubrugelige. Den eneste Værdi, der muligvis kan bruges er  $n_1 = 57$ ,  $n = 10$ , som giver  $N = 57 \cdot 60$ .

Gruppen er imidlertid umulig. Den skulde indeholde 20 forskellige Sæt Dobbelpunkter, hvortil hørte Transformationer af 57de Orden, og 19de Potens  $A$  af enhver saadan Transformation af 57de Orden vilde da være af 3die Orden og ombytte Dobbelpunkterne for enhver anden Transformation  $B$  af 57de Orden, der ikke hørte til de samme Dobbelpunkter. Men da vilde  $AB^m$  være af 3die Orden og Gruppen indeholde mindst 19 \cdot 56 saadanne Transformationer; medens den efter Tallene kun skulde indeholde 19 \cdot 40 Transformationer af 3die Orden, der ikke havde samme Dobbelpunkter som Transformationer af 57de Orden og 20 Transformationer, der havde saadanne Dobbelpunkter.

Vi sætte dernæst i (89)  $q = 3$  og faa da

$$\frac{1}{N} = \frac{3n_1 + 2n - nn_1}{6nn_1} = \frac{6 - (n-3)(n_1-2)}{6nn_1},$$

som ses at være umulig, hvis baade  $n$  og  $n_1$  ere større end 3.

Sættes  $n_1 = 3$  har man

$$\frac{1}{N} = \frac{9-n}{18n},$$

hvor  $n$  skal være et lige Tal, og da maa være 6 eller 8.

I første Tilfælde var  $N = 36$ , Gruppen skulde kun indeholde tre forskellige Sæt Dobbelpunkter, hvortil hørte Transformationer af 6te Orden, hvad der er umuligt.

I andet Tilfælde skulde Gruppen indeholde 144 Transformationer. Der skulde være kun 9 Sæt Dobbelpunkter, hvortil hørte Transformationer af 8de Orden, hvad der ogsaa ses at være umuligt.

48) Vi ville nu gaa over til virkeligt at bestemme alle de eksisterende Grupper, idet her dog stadigt kun tages Hensyn til saadanne Grupper, i hvilke ikke alle Transformationerne transformere samme rette Linie til sig selv.

Vi kunne antage en saadan Transformation bragt paa Formen

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y, \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{hvor } \alpha\beta\gamma = 1,$$

saa vil den transformere et Keglesnit til sig selv, hvis en af Multiplikatorerne er 1, og i saa Tilfælde vil der være uendelig mange Keglesnit, som blive transformerede til sig selv.

Skal nemlig Keglesnittet

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fxy = 0$$

transformeres til sig selv, maa man have

$$\begin{aligned} aa^2 &= \rho a, & b\bar{\beta}^2 &= \rho b, & c\bar{\gamma}^2 &= \rho c, \\ d\bar{a} &= \rho d, & e\bar{\beta} &= \rho e, & f\bar{\gamma} &= \rho f, \end{aligned}$$

hvor i det mindste to af Størrelserne  $a, b, c, d, e, f$ , maa være forskellige fra 0. Men hertil kræves enten, at  $A$  er perspektivisk, eller at en af Multiplikatorerne er 1. Vi antage nu,  $a = 1^1$ ) og at  $A$  ikke er perspektivisk. Man kan da lade  $a$  og  $d$  være vilkaarlige Størrelser, medens de øvrige ere 0.

Keglesnittet faar Ligningen

$$ax^2 + dyz = 0,$$

og ses at være et Keglesnit, der gaar gennem de to Dobbeltpunkter  $Q$  og  $Q_1$  og rører de to Dobbeltlinier  $q$  og  $q_1$  i disse Punkter.

For at den ene Multiplikator skal være 1, ses det at være nødvendigt og tilstrækkeligt, at Diagonalsummen er reel, og for at de andre Multiplikatorer skulle være Rødder af Enheden, at den ligger mellem Grænserne 3 og  $-1$ , idet det antages, at Transformationsdeterminantens Elementer ere konjugerede med deres Underdeterminanter.

Man ser nemlig, naar Diagonalsummen  $s$  er reel, at Multiplikatorerne ere bestemte ved Ligningen

$$\mu^3 - s\mu^2 + s\mu - 1 = 0$$

eller

$$(\mu - 1)(\mu^2 - (s - 1)\mu + 1) = 0,$$

hvoraf Rigtigheden af det fremsatte ses<sup>2)</sup>.

49) Er en Transformation af 2den Orden, kan det vises, at Elementerne i dens Diagonalrække maa være reelle Tal, og tillige, at dette er den tilstrækkelige Betingelse for, at den er af 2den Orden i Forbindelse med, at Diagonalsummen er  $-1$  og de øvrige Betingelser, Transformationerne maa opfylde for at høre til en endelig Gruppe. Skal nemlig  $A$  være af 2den Orden, maa man have

$$A \equiv A^{-1}.$$

Idet vi her kun opskrive Determinanterne, har man da

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \equiv a^p \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{vmatrix}, \quad a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

<sup>1)</sup> eller  $a^p$ , hvor  $a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ .

<sup>2)</sup> Man kunde her for  $s$  sætte  $s a^p$ , hvor  $a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ .

og altsaa

$$a_1 = \overline{a^p a_1}$$

eller

$$a^p a_1 = \overline{a^p a_1},$$

og, da  $a_1$  kun er bestemt paa en Faktor  $a^p$  nær, kunne vi sætte

$$a_1 = \overline{a_1},$$

som viser, at  $a_1$  er reel. Paa samme Maade faas  $b_2 = \overline{b_2}$ ,  $c_3 = \overline{c_3}$  reel at være nødvendige Betingelser.

Vi have nu

$$a_1 + b_2 + c_3 = -1$$

og ifølge S. 141, som Følge af, at  $a_1$ ,  $b_2$ ,  $c_3$  ere reelle,

$$b_1 a_2 = a_1 b_2 - c_3 = (a_1 + 1)(b_1 + 1),$$

da

$$-c_3 = a_1 + b_2 + 1.$$

Paa samme Maade faas

$$c_1 a_3 = (c_3 + 1)(a_1 + 1)$$

$$c_2 b_3 = (b_2 + 1)(c_3 + 1),$$

og altsaa

$$b_1 c_2 a_3 \cdot c_1 a_2 b_3 = (a_1 + 1)^2 (b_2 + 1)^2 (c_3 + 1)^2,$$

medens

$$b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 = 2(a_1 + 1)(b_2 + 1)(c_3 + 1). \quad (\text{Se S. 141})$$

Man maa da have  $R = 0$ , og selvfølgelig  $c_1 C_1 = a_3 A_3$  o. s. v., altsaa  $|c_1| = |a_3|$ , og da Produktet  $c_1 a_3$  er reelt positivt,

$$c_1 = \overline{a_3},$$

hvorved Sætningen bevises.

50) Vi skulle nu udvikle en Sætning om Afhængigheden mellem forskellige Diagonalsummer i Gruppen, der vil være af Vigtighed for det følgende.

Lad os antage, at Gruppen indeholder to Transformationer,  $A$  og  $B$ ,

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y, & \text{hvor } \alpha\beta\gamma = 1 \\ \mu z' = \gamma z \end{cases}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ \mu z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

og at vi danne Diagonalsummerne for  $B$ ,  $AB$ ,  $A^2 B$  ..., saa ere disse

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 + c_3 &= s \\ \alpha a_1 + \beta b_2 + \gamma c_3 &= s_1 \\ \alpha^2 a_1 + \beta^2 b_2 + \gamma^2 c_3 &= s_2 \\ \alpha^3 a_1 + \beta^3 b_2 + \gamma^3 c_3 &= s_3 \\ \dots & \\ \alpha^p a_1 + \beta^p b_2 + \gamma^p c_3 &= s^p, \end{aligned}$$



hvor  $s_1, s_2 \dots$  maa være mulige Diagonalsummer for Gruppen, d. v. s. kunne tilhøre saadanne Transformationer, der kunne forekomme i Gruppen.

En af dem,  $s$ , kan gives en Værdi, som vi vide maa forekomme blandt Diagonalsummerne til Gruppens Transformationer.

Elimineres  $a_1, b_2, c_3$  mellem de fire første Ligninger, faas

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & s \\ a & \beta & \gamma & s_1 \\ a^2 & \beta^2 & \gamma^2 & s_2 \\ a^3 & \beta^3 & \gamma^3 & s_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Betegnes nu Diagonalsummen for  $A$  ved  $d$ , kan denne Ligning efter Division med  $(a - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - a)$ , som ikke kan være 0, naar  $A$  ikke er perspektivisk, skrives

$$s - s_3 = s_1 \bar{d} - s_2 d,$$

og paa samme Maade faar man for 4 paa hinanden følgende Diagonalsummer

$$s^p - s^{p+3} = s^{p+1} \bar{d} - s^{p+2} d, \quad (90)$$

en Ligning, der er af den største Vigtighed for Bedømmelsen af de mulige Grupper.

Er  $B$  af 2den Orden, er  $s = -1$ , og ifølge foregaaende Paragraf,  $s^p = \overline{s^{n-p}}$ , naar  $A$  er af  $n$ te Orden.

51) Vi ville nu gennemgaa de forskjellige eksisterende endelige Grupper, idet vi inddele dem efter Ordenen af Transformationerne af højest Orden indgaaende i Grupperne og sige, at en Gruppe er af samme Orden som Transformationen af højest Orden indgaaende i den.

Vi begynde da med Grupperne af 3die Orden.

Grupperne skulle indeholde Transformationer af 2den og 3die Orden, og vi kunne antage, at en Gruppe indeholder Transformationerne

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \alpha y, \\ \mu z' = \bar{\alpha} z \end{cases} \quad \text{hvor } \alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = b_1 x + b_2 y + c_2 z, \\ \mu z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{cases}$$

hvor vi antage, at  $B$  er af 2den Orden og alle Størrelserne  $a_1, b_1, c_1 \dots$  reelle, idet det er let at se, at vi altid kunne bringe een Transformation af 2den Orden, hørende til Gruppen paa en saadan Form.

Vi maa da have

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 + c_3 &= -1 \\ a_1 + ab_2 + \bar{a}c_3 &= 0 \\ a_1 + \bar{a}b_2 + ac_3 &= 0, \end{aligned}$$

idet venstre Side af de to sidste Ligninger skal være konjugerede Størrelser, og ikke kunne være lig  $-\bar{a}^p$  og  $-\bar{a}^p$ , da der saa vilde forekomme Transformationer af 2den Orden, der ombyttede  $A$ 's Dobbelpunkter (smlgn. S. 107).

Heraf faas

$$\begin{aligned} a_1 &= b_2 = c_3 = -\frac{1}{3} \\ b_1 &= c_1 = c_2 = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

saa at man faar

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \mu y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \mu z' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z. \end{cases}$$

Alle Transformationer i Gruppen ville lade Keglesnittet

$$x^2 + 2yz = 0$$

uforandret, da  $A$  og  $B$  gjøre dette.

Gruppens Endelighed bevises let herved.

Vi se nemlig, at en lineær Transformation, der transformerer et Keglesnit til sig selv, altid vil transformere et Punkt  $P$  til et Punkt  $P_1$ , saaledes at det anharmoniske Forhold mellem  $QQ_1 PP_1$  bliver lig med en af Multiplikatorerne<sup>1)</sup>.

Vi se da, at vi kunne betragte de Grupper, i hvilke alle Transformationer transformerer samme Keglesnit til sig selv, som en ikke lineær Transformation af de Grupper, der lade en ret Linie uforandret.

Invertere vi nemlig om et vilkaarligt Punkt som Inversionscentrum, vil den rette Linie gaa over til en Cirkel, og da de anharmoniske Forhold mellem Punkterne af den rette Linie blive lig med de anharmoniske Forhold mellem de tilsvarende Punkter af Cirklen, vil der til enhver lineær Transformation af den rette Linie svare en lineær Transformation af Cirklen, og til en endelig Gruppe lineære Transformationer af den rette Linie svare en endelig Gruppe lineære Transformationer af Cirklen.

Men den Gruppe, som er endelig for Cirklen, er ogsaa endelig for hele Planet.

Thi en hvilkenksomhelst ret Linie vil ved alle Transformationer i Gruppen kun kunne transformeres til et endeligt Antal andre Linier, da dens Skjæringspunkter med Cirklen kun kunne transformeres til et endeligt Antal andre Punkter af Cirklen.

Men da et vilkaarligt Punkt af Planet kan opfattes som Skjæringspunkt mellem to rette Linier, maa ogsaa et vilkaarligt Punkt af Planet kun kunne transformeres til et endeligt Antal andre Punkter.

<sup>1)</sup> idet her bruges samme Betegnelser som S. 183.

Ved lineær Transformation kan man imidlertid faa en Cirkel transformeret til et vilkaarligt Keglesnit. Det ses saaledes, at man kun behøver at kjende alle endelige lineære Transformationsgrupper for den rette Linie, for at bestemme alle endelige Grupper for Planet, naar alle Transformationer i en saadan Gruppe skulle transformere samme Keglesnit til sig selv.

Den fundne Gruppe ses nu at svare til Tetraedergruppen for den rette Linie, og dens Endelighed kan bevises paa samme Maade.

Vi kalde den Tetraedergruppen for Planet.

52) Vi komme dernæst til Grupperne af 4de Orden. De skulle indeholde Transformationer af 2den, 3die og 4de Orden.

De mulige Diagonalsummer ere  $-a^p, 0, a^p$ .

Vi kunne altid, ligesom i forrige Tilfælde, antage, at Gruppen indeholder to Transformationer  $A$  og  $B$ , hvoraf  $A$  er af 4de Orden med Dobbelpunkter i Koordinatsystemets Begyndelsespunkter,  $B$  af 2den Orden med lutter reelle Koefficienter. Vi have da

$$a_1 + b_2 + c_3 = -1$$

og enten a)

$$a_1 + ib_2 - ic_3 = 0,$$

og altsaa

$$a_1 - ib_2 + ic_3 = 0,$$

og ifølge (90), da  $d = 1 (= 1 - i + i)$ ,

$$a_1 - b_2 - c_3 = 1,$$

eller b)

$$\begin{aligned} a_1 + ib_2 - ic_3 &= a^p \\ a_1 - b_2 - c_3 &= 0, \\ a_1 - ib_2 + ic_3 &= \bar{a}^p \end{aligned} \quad p = \begin{cases} 1 \\ 2, \end{cases}$$

hvor a) og b) hver svare til sin Gruppe. Den første til en Gruppe paa 24 Transformationer, der er en Transformation af Oktaedergruppen; den anden til den S. 172 (82) svarende Gruppe paa 36 Transformationer.

53) Vi behandle nu først a), idet vi bruge lignende Betegnelser som i 51).

Man faar

$$a_1 = 0, \quad b_2 = c_3 = -\frac{1}{2}, \quad b_1 = c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad c_2 = \frac{1}{2},$$

saa at man faar

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{\sqrt{2}}{2} y + \frac{\sqrt{2}}{2} z \\ \mu y' = \frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z \\ \mu z' = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} z. \end{cases}$$

Da  $A$  og  $B$  lade Keglesnittet

$$x^2 + 2yz = 0$$

uforandret, ville alle Transformationer i Gruppen gjøre det. Gruppen er en Transformation af Oktaedergruppen for den rette Linie. Vi ville kalde den Oktaedergruppen for Planet.

54) Vi gaa nu over til at betragte den Gruppe vi faa ved at antage, at Multiplikationen af  $B$  med Potenser af  $A$  giver Rækken af Diagonalsummer b). Man faar da, idet vi sætte  $p = 1$ ,

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}, \quad c_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{4}$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{8}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{8}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{3}{8}},$$

saa at altsaa

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{8}}y + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{8}}z \\ \mu y' = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{8}}x + \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}y + \sqrt{\frac{3}{8}}z \\ \mu z' = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{8}}x + \sqrt{\frac{3}{8}}y + \frac{-1 - \sqrt{3}}{4}z. \end{cases}$$

Vi skulle nu vise Gruppens Endelighed.

Man har, idet vi betegne, at en Transformation er identisk, ved at sætte den lig 1,

$$A^4 \equiv 1$$

$$(AB)^4 \equiv 1$$

$$(A^2B)^3 \equiv 1$$

$$B^2 \equiv 1.$$

Den anden og tredie Ligning kunne skrives

$$BAB A \equiv A^3 B A^3 B$$

og

$$BA^2 B \equiv A^2 B A^2.$$

Lad os nu antage, at vi have

$$BA^p B A^q B,$$

saa er denne Transformation, hvis  $p$  og  $q$  begge ere 1 eller 3, identisk med  $A^3 B A^3$  eller  $ABA$ , hvis  $p = q = 2$ , er den identisk med  $A^2$ . Hvis alene  $p$  eller  $q$  er 2, ses det, at  $BA^p B A^q B$  kan reduceres til kun at indeholde to Faktorer  $B$ . Hvis endelig  $p = 1$ ,  $q = 3$ , faar man

$$BAB A^3 B \equiv BABA \cdot A^2 B \equiv A^3 B A^3 B A^2 B \equiv A^3 B A B A^2,$$

som ogsaa kun indeholder to Faktorer  $B$ , og paa samme Maade reduceres  $BA^3BAB$ . Et Produkt af Transformationer, hvori der forekommer tre Faktorer  $B$ , kan da altid reduceres til kun at indeholde to Faktorer  $B$ . Herved ses Gruppens Endelighed at være bevist, idet den kun kan indeholde Transformationer sammensatte af  $A$  og  $B$ , der i det højeste indeholde to Faktorer  $B$ . Den almindeligste Transformation i Gruppen er da

$$A^p B A^q B A^r.$$

Skal den virkelig ikke kunne reduceres til at indeholde færre Faktorer, maa  $q$  ikke være 2, eller  $p = q$  eller  $q = r$ .

Det er da let at se, hvilke Former Transformationerne kunne antage. Vi kunne nemlig danne alle Transformationerne ved enten at multiplicere  $B$  eller  $ABAB$  paa begge Sider med Potenser af  $A$ .

Men  $ABAB$  er, idet vi kun opskrive Determinanten,

$$ABAB \equiv \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}, & \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}} \left( \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} \right), & -\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}} \left( \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} \right) \\ \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}} \left( \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} \right), & \frac{-1-\sqrt{3}}{4}, & -i\sqrt{\frac{3}{8}} \\ -\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}} \left( \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} \right), & +i\sqrt{\frac{3}{8}}, & \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}.$$

Det er heraf let at udløde, hvor mange Transformationer Gruppen indeholder. Det ses, at den indeholder ialt 36 Transformationer, hvoraf 18 ere af 4de Orden, 9 af 2den Orden og 8 af 3die Orden. Det ses tillige, at dette er den eneste eksisterende Gruppe indeholdende 36 Transformationer.

55) Vi skulle nu se om den S. 172 (82) omtalte Gruppe eksisterer.

Existerede den, maatte den i 54) fundne Gruppe være Undergruppe i den. Gruppen maatte nemlig indeholde en Transformation

$$A' \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = \pm \alpha y \\ \mu z' = \alpha z, \end{cases} \quad \alpha = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2},$$

og (90) viser, at Gruppen maatte indeholde som Undergruppe en Gruppe af den i 54) omtalte Art, idet Sættningen af  $A'^2$  og en Transformation af 2den Orden  $B$  hørende til Gruppen maatte give Oprindelsen til en saadan Gruppe, hvor  $B$  altsaa har samme Koefficienter som i 54).

Da Gruppen ikke skal indeholde flere end 72 Transformationer, maatte den, hvis den eksisterede, bestaa af den omtalte Undergruppe og dennes Transformationer multiplicerede

med  $A'$ . Men da maatte  $A'B$  være lig en Transformation  $CA'$  hørende til Gruppen, idet  $C$  er en Transformation i den omtalte Undergruppe, eller  $A'BA'^{-1}$  maatte høre til Undergruppen, hvad den ses ikke at gjøre. Skulde der være andre Grupper, der ikke indeholdt Transformationer af højere end 4de Orden, viser (90), at Gruppen i 54) maatte være Undergruppe i dem.

Vi skulle nu se om Gruppen, dannet i 54), kan være Undergruppe i en anden Gruppe, der da maatte være den S. 165 omtalte. Gruppen skulde da endnu indeholde en Transformation  $C$ , af 4de Orden, der ombyttede  $A$ 's Dobbeltpunkter, og hvis anden Potens var identisk med  $A^2$ . Man havde da

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = pz \\ \mu z' = qy. \end{cases}$$

Den nye Gruppe maa mindst indeholde 72 Transformationer, idet naar  $T_1, T_2 \dots$  ere de forskjellige Transformationer i Gruppen 54)  $CT_1, CT_2 \dots$  alle ere indbyrdes forskjellige og forskjellige fra  $T_1, T_2 \dots$ , da  $C$  ellers hørte til Gruppen.

Man maa altsaa have, hvis den nye Gruppe ikke skal indeholde flere end 72 Transformationer,  $CT_1 = T_p C$ , eller at  $CT_1 C^{-1}$  atter hører til 54).

Vi maa altsaa have, at

$$CBC^{-1}$$

atter hører til Gruppen, og omvendt ses, at hvis dette er Tilfældet vil Gruppen 54) være Undergruppe i den nye Gruppe, idet man, da

$$CA = A^{-1}C,$$

i et Produkt

$$A^2 C^q B \dots$$

altid kan bringe Faktorerne  $C$  hen paa den første Plads.

Man faar nu

$$CBC^{-1} \equiv \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}, & -\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}}q, & -\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}}p \\ \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}}p, & \frac{-1-\sqrt{3}}{4}, & -p^2\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}}q, & -q^2\sqrt{\frac{3}{8}}, & \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}$$

Sætter man her  $q = \frac{i\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ ,  $p = \frac{i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$ , ses denne at falde sammen med  $ABAB$ , og under Forudsætning af, at man vælger disse Værdier for  $p$  og  $q$ , er da Gruppens Endelighed bevist.

Man kunde naturligvis for en af Størrelserne  $p$  eller  $q$  have valgt en vilkaarlig anden primitiv 8de Rod af Enheden.

56) Vi ville nu gaa over til at behandle Grupperne af 5te Orden.

Grupperne af 5te Orden kunne enten indeholde

a) Transformationer af 2den, 3die og 5te Orden

eller

b) Transformationer af 2den, 3die, 4de og 5te Orden.

Vi behandle først det første Tilfælde, idet vi antage, at Gruppen indeholder to Transformationer,  $A$  af 5te Orden,  $B$  af 2den Orden,

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \bar{\beta} z, \end{cases} \quad \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

og

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = b_1 x + b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z, \end{cases}$$

hvor alle Koefficienterne antages reelle.

De mulige Diagonalsummer ere

$$-a^p, \quad 0, \quad a^q \left( \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right).$$

For at afgjøre, hvilke af disse der kan bruges, kan man anvende (90), idet man sætter  $d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ,  $s = -1$  og bemærker, at ingen af Størrelserne  $s_p$  kan være  $-a^p$ .

Vi have da

$$-1 - s_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} (s_1 - s_2),$$

hvor vi endda kunne sætte  $s_2 = s_3$ . Man har da enten  $s_2 = s_3 = 0$ ,  $s_1 = s_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , eller  $s_1 = s_4 = 0$ ,  $s_2 = s_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ . Det er ligegyldigt, hvilke Værdier vi gaa ud fra. Vi ville da gaa ud fra de sidste, som give

$$a_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad b_2 = c_3 = -\frac{\sqrt{5}+5}{10}, \quad b_1 = c_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},$$

altsaa

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{\sqrt{5}}{5} x + \frac{\sqrt{10}}{5} y + \frac{\sqrt{10}}{5} z \\ \mu y' = \frac{\sqrt{10}}{5} x - \frac{\sqrt{5}+5}{10} y + \frac{5-\sqrt{5}}{10} z \\ \mu z' = \frac{\sqrt{10}}{5} x + \frac{5-\sqrt{5}}{10} y - \frac{\sqrt{5}+5}{10} z. \end{cases}$$

Alle Transformationer i Gruppen transformere Keglesnittet

$$x^2 + 2yz = 0$$

til sig selv, og herved bevises da let Gruppens Endelighed, idet den er en Transformation af Ikosaedergruppen for den rette Linie. Vi ville kalde Gruppen Ikosaedergruppen for Planet.

57) Vi gaa nu over til at betragte Tilfældet b).

Vi antage, at Gruppen indeholder to Transformationer  $A$  og  $B$  ganske af samme Form som i 56).

De mulige Diagonalsummer ere her  $-a^p, 0, a^p, a^p d, a^p d_1$ , hvor  $a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$  og  $d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $d_1 = \frac{+1 - \sqrt{5}}{2}$ .

Uden at gennemgaa de enkelte Tilfælde, skal jeg her opstille Resultaterne af de mulige Tilfælde af Rækker af Diagonalsummer, idet i (90)  $d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Man har

$s =$	$-1$	$-1$	$-1$	$-1$
$s_1 =$	$0$	$d_1$	$a^p d$	$a^p$
$s_2 =$	$d$	$0$	$a^p$	$\bar{a}^p d_1$
$s_3 =$	$d$	$0$	$\bar{a}^p$	$a^p d_1$
$s_4 =$	$0$	$d_1$	$\bar{a}^p d$	$\bar{a}^p$

og, da det er nødvendigt at have alle mulige saadanne Rækker af Diagonalsummer, og der i Gruppen forekommer Transformationer, som, multiplicerede med Potenser af  $A$ , ikke give nogen Transformation af 2den. Orden, endnu

$s =$	$1$	$d$	$d_1$	, hvor $p = \begin{cases} 1 \\ 2. \end{cases}$
$s_1 =$	$a^p d_1$	$1$	$0$	
$s_2 =$	$\bar{a}^p d$	$0$	$1$	
$s_3 =$	$\bar{a}^p d$	$0$	$1$	
$s_4 =$	$a^p d_1$	$1$	$0$	

Det viser sig, at enhver Gruppe, dannet ved alle mulige Produkter af  $A$  og  $B$ , vil indeholde Transformationer, der, multiplicerede med Potenser af  $A$ , give alle de her forekommende Rækker.

Det er da ligegyldigt, fra hvilken Række vi gaa ud (forudsat, at vi ikke komme til en Undergruppe, i Stedet for den fuldstændige Gruppe, hvad der ses at være Tilfældet, naar vi gaa ud fra de første Rækker af reelle Diagonalsummer, der føre til Ikosaedergruppen), og vi ville da gaa ud fra den tredje Række, idet vi sætte  $p = 1$ .

Vi ville desuden betegne det, at en Transformation har en given Diagonalsum ved at sætte den lig Diagonalsummen, saa at altsaa



$$C = s$$

betyder, at  $C$  har Diagonalsummen  $s$ , ligesom  $B = C$  betyder, at Transformationerne  $B$  og  $C$  have samme Diagonalsum. Man har da

$$\begin{aligned} B &= -1 \\ AB &= ad \\ A^2B &= a \\ A^3B &= \bar{a} \\ A^4B &= \bar{a}d. \end{aligned}$$

Man kan da vise, at man i alle Tilfælde kan finde Diagonalsummerne, og altsaa bestemme en Transformations Orden, idet man benytter de fundne Rækker af Diagonalsummer, og at en Transformation af en Transformation i Gruppen ved en anden Transformation ikke forandrer den førstes Diagonalsum.

Man har saaledes

$$\begin{aligned} BA^2B &= d_1 \\ A^2BA^2B &= -\bar{a}, \quad (A^2B = a) \end{aligned}$$

og da  $A^2BA^2B$  er af 2<sup>den</sup> Orden, maa den, multipliceret med  $A^2$  og  $A^{-2}$ , give konjugerede Diagonalsummer, naar den selv er bragt paa en saadan Form, at dens Diagonalsum er  $-1$ , man har da, idet man benytter (90)

$$\begin{aligned} BA^2B &= d_1 \\ ABA^2B &= a \\ A^2BA^2B &= -\bar{a} \\ A^3BA^2B &= 1 \\ A^4BA^2B &= ad_1. \end{aligned}$$

Paa samme Maade faas, idet man stadig maa bestemme 3 af Værdierne i Rækken for at finde de andre ved (90),

$$\begin{aligned} BAB &= d \\ ABAB &= \bar{a}d_1 \\ A^2BAB &= ABA^2B = a \\ A^3BAB &= \bar{a}d_1 \\ A^4BAB &= d \end{aligned}$$

og

$$\begin{array}{ll} BA^3B = d_1 & BA^4B = d \\ ABA^3B = \bar{a}d_1 & ABA^4B = d \\ A^2BA^3B = 1 & A^2BA^4B = ad_1 \\ A^3BA^3B = -\bar{a} & A^3BA^4B = \bar{a} \\ A^4BA^3B = \bar{a} & A^4BA^4B = ad_1. \end{array}$$

Herved er der bestemt alle Diagonalsummerne for Produkter af Faktorer  $A$  og  $B$ , der indeholde indtil 4 Led.

Vi ville bestemme Diagonalsummerne for nogle Produkter, der indeholde 6 Faktorer.

Man har

$$\begin{aligned} ABABA^3B &= BABABA^3 = \bar{a} \cdot A^4BA^4BA^2 \\ &= \bar{a}ABA^4B = \bar{a}d, \end{aligned}$$

idet

$$(AB)^5 = 3\bar{a},$$

altsaa

$$BABAB \equiv \bar{a}A^4BA^4BA^4.$$

Endvidere

$$A^3BABA^3B = ABA^3BA^3B = \bar{a}A^3BA^2 = -\bar{a};$$

thi

$$A^3BA^3B \equiv aBA^2BA^2.$$

Men herved bestemmes da

$$A^2BABA^3B = 0$$

$$A^4BABA^3B = 0.$$

Man har da Rækken

$$BABA^3B = \bar{a}d$$

$$ABABA^3B = \bar{a}d$$

$$A^2BABA^3B = 0$$

$$A^3BABA^3B = -\bar{a}$$

$$A^4BABA^3B = 0.$$

Paa samme Maade faas

$$BABA^4B = -1$$

$$ABABA^4B = d_1$$

$$A^2BABA^4B = 0$$

$$A^3BABA^4B = 0$$

$$A^4BABA^4B = d_1.$$

Exempler paa de to sidste Rækker Diagonalsummer give  $BABA^2B$  og  $BABA^2BA^4B$  multiplicerede med Potenser af  $A$ .

Det er da vist, at der i Gruppen forekommer alle mulige Rækker af Diagonalsummer.

Vi ville nu vise, at ingen Transformation i Gruppen kan indeholde et uendeligt Antal Faktorer

$$A^pBA^qBA^rB \dots$$

For det første kunne vi antage, at ikke to paa hinanden følgende Exponenter  $q$  og  $r$  ere lige store, thi Transformationen vil da kunne omskrives til at indeholde en eller to Faktorer  $B$  mindre, da man har for  $k = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$

$$BA^kBA^k \equiv A^{5-k}BA^{5-k}BA^{5-k}$$

og for  $k = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$$BA^kBA^kB \equiv A^{5-k}BA^{5-k},$$

idet Tegnet  $\equiv$  bruges for at betegne, at to Transformationer ere identiske.

Dernæst kunne vi, uden at forøge  $B$ 'ernes Antal, antage, at Exponenten 3 ikke forekommer for en Faktor  $A$  staaende mellem to  $B$ 'er. Thi vi have

$$BA^3B \equiv A^2BA^2BA^2.$$

Lad os nu antage, at der forekommer i Transformationen

$$\dots BA^kBA^3BA^lB \dots,$$

saa er dette Produkt lig

$$BA^{k+2}BA^2BA^{l+2}B.$$

Ere nu baade  $k$  og  $l$  forskellige fra 1, ville baade  $k+2$  og  $l+2$  være forskellige fra 3, og vi have saaledes bortskaffet en Faktor  $A^3$ , uden at forøge  $B$ 'ernes Antal. Er  $k=1$ , saa maa i den foregaaende Faktor,  $A^i$ ,  $i$  være forskellig fra 1, og ved atter at bruge samme Relation faas

$$\dots A^{i+2}BA^2BA^4BA^{i+2}B \dots,$$

hvor  $A^3$  nu er bortskaffet, hvis  $l$  er forskellig fra 1, er  $l=1$  maa i den efterfølgende Faktor,  $A^m$ ,  $m$  være forskellig fra 1, og idet vi bruge den samme Reduktion

$$\dots A^{i+2}BA^2BABA^2BA^{m+2} \dots,$$

hvor vi nu have bortskaffet en Faktor  $A^3$  uden at forøge  $B$ 'ernes Antal.

Vi kunne da antage, at i en Transformation

$$\dots A^pBA^qBA^rBA^sB$$

ingen af Størrelserne  $q, r, s$  er 3, og at ikke to paa hinanden følgende Exponenter ere lige store.

Skulde nu Transformationen kunne indeholde et vilkaarligt stort Antal Faktorer, uden at reduceres, ses det, at den maa indeholde alle tre Potenser  $A, A^2, A^4$ , idet den ellers kom til at være

$$\dots A^kBA^lBA^kBA^lB \dots$$

og Faktoren  $A^kBA^lB$ , da  $(A^kBA^lB)^m$  er identisk, naar  $m$  i det højeste er 5, kun kan forekomme to Gange, uden at Produktet kan reduceres.

Skal altsaa Produktet være inreduktibelt, maa der forekomme Faktorer, naar der er et tilstrækkeligt stort Antal saadanne, hvor tre paa hinanden følgende Potenser af  $A$  have forskellige Exponenter. Der maa da forekomme enten

- 1)  $BA^4BA^2BAB$
- 2)  $BA^4BABA^2B$
- 3)  $BABA^2BA^4B$
- 4)  $BABA^4BA^2B$
- 5)  $BA^2BABA^4B$
- 6)  $BA^2BA^4BAB$ .

Erstattes  $BA^2B$  ved  $A^3BA^3BA^3$  ses 2) og 5) umiddelbart at kunne reduceres, idet den kan bringes til at indeholde en Faktor  $B$  mindre.

Skal i 1) en Faktor  $BA^l$  gaa forud, maa  $l$  være 1; thi havde man

$$BA^2BA^4BA^2BAB$$

og erstattede det andet  $BA^2B$  med  $A^3BA^3BA^3$ , fik man

$$\dots BA^2BA^2BA^3BA^4B \dots,$$

som er reductibel.

Vi maa altsaa have Rækkefølgen

$$\dots BAB A^4BA^2BAB \dots,$$

som kan omskrives til

$$\dots BAB A^2BA^3BA^4B \dots$$

Nu ses imidlertid, at den foregaaende Faktor for de anførte ikke kan være  $BA$ , ikke heller  $BA^4$ ; thi da kunde man skrive

$$\dots BA^4BAB A^2BA^3BA^4B \equiv BA^4BA^4BA^3BAB A^4B,$$

som er reductibel; men den kan heller ikke være  $A^2$ ; thi da havde man

$$\dots BA^2BAB A^2BA^3BA^4B \dots$$

og ved at erstatte det første  $BA^2B$  ved  $A^3BA^3BA^3$ ,  $BA^3B$  ved  $A^2BA^2BA^2$  fik man

$$A^3BA^3BA^4BA^4BA^2BAB,$$

som kan reduceres.

Der kan altsaa foran

$$\dots BAB A^4BA^2BAB$$

ikke gaa nogen Faktor  $B$ , uden at den kan reduceres til at indeholde færre Faktorer  $B$ .

Hvis vi derpaa se paa 3)

$$BAB A^2BA^4B,$$

se vi ganske paa samme Maade, at efter  $BA^4B$  kan kun følge  $AB$ , og at enhver yderligere Tilføjelse af en Faktor  $A^4B$  vil bevirke, at Antallet af Faktorer kan reduceres.

Betragte vi derpaa

$$\dots BAB A^4BA^2B \dots,$$

saa kan her ikke foran den første Faktor komme  $BA^2$ ; thi da havde man

$$BA^2BAB A^4BA^2B \equiv A^3BA^3BA^4BA^4BA^2B,$$

som er reductibel. Men der kan heller ikke komme  $BA^4$ ; thi da har man

$$BA^4BAB A^4BA^2B \equiv BA^4BAB A^2BA^3BA^3 \equiv BA^4BA^4BA^3BAB A^3,$$

som ligeledes er reductibel. Der kan da ikke gaa nogen Faktor  $B$  forud for det omtalte Produkt, uden at vi kunne reducere Produktet til at indeholde færre Faktorer.

Paa samme Maade vises, at der ikke kan gaa nogen Faktor  $B$  efter

$$BA^2BA^4BAB$$

uden at Produktet er reductibelt.

Men herved ses da, at Gruppen er endelig, siden enhver af de Faktorer, der nødvendigvis maa forekomme i Produktet, hvis det ikke skal bestaa af en Gjentakelse af de samme Faktorer, ville bevirke dets Reduktion til færre Faktorer, hvis de forekomme mere end en Gang

Vi skulle nu udvikle nogle Relationer, der tjene til at reducere Antallet af Faktorer i et Produkt af Transformationer i Gruppen til det mindst mulige, for derpaa at give et Skema over de Transformationer, der høre til Gruppen, dannede paa den simpleste Maade.

Ifølge det foregaaende har man

$$BABA^2 = a.$$

Man har da

$$BABA^2BABA^2 = -\bar{a},$$

og altsaa

$$BABA^2BABA^2 \equiv A^3BA^4BA^3BA^4B \equiv A^3BABA^2BAB$$

$$BABA^2BAB \equiv A^3BABA^2BABA^3,$$

eller ved Gjentakelse af Operationen

$$C \equiv BABA^2BAB \equiv A^k BABA^2 BABA^k, \quad (91)$$

hvor  $k$  er et vilkaarligt Tal.

$C$  maa da transformere  $A^k$  til  $A^{-k}$  og altsaa være en Transformation af Formen

$$\mu x' = -x$$

$$\mu y' = az$$

$$\mu z' = \bar{a}y,$$

hvor  $a\bar{a} = 1$ .

Af (91) udledes ved at sætte  $k = 3$ ,

$$\left. \begin{aligned} BABA^2BAB &\equiv A^3BABA^2BABA^3 \\ BA^2BABA^2B &\equiv A^4BA^3BABA^2BA \\ &\equiv ABA^4BA^2BA^4BA. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Heraf faas endvidere

$$BABA^2BA^4B \equiv A^3BABA^4BA^2BA^4 \quad (93)$$

og

$$BA^4BA^2BAB \equiv A^4BA^2BA^4BABA^3. \quad (94)$$

Vi faa da følgende Skema over Transformationerne, idet  $k$  og  $l$  ere Tal, der kunne tillægges Værdierne 1 til 5, og idet der for hver Klasse Transformationer af en hvis Sættelse anføres dels Totalantallet, dels Antallet af Transformationer af hver Orden, og de Værdier af  $k$  og  $l$  for hvilke disse faas.

Transformationens Sammensætning.	Antal af Transformationer				
	2den Orden.	3die Orden.	4de Orden.	5te Orden.	Sum.
1 $A^k$				4	4
2 $A^k B A^l$	$5, k+l \equiv 0^1)$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$	25
3 $A^k B A B A^l$			$5, k+l \equiv 2$	$20, k+l \equiv \begin{cases} 0 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$	25
4 $A^k B A^2 B A^l$	$5, k+l \equiv 2$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$	25
5 $A^k B A^4 B A^l$			$5, k+l \equiv 3$	$20, k+l \equiv \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 4 \end{cases}$	25
6 $A^k B A B A^2 B A^l$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$	$5, k+l \equiv 1$	25
7 $A^k B A B A^2 B A B$	5				5
8 $A^k B A B A^2 B A^4 B A^l$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$	$5, k+l \equiv 0$	25
9 $A^k B A B A^4 B A^l$	$5, k+l \equiv 0$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$	25
10 $A^k B A B A^4 B A B A^l$	$5, k+l \equiv 2$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$	25
11 $A^k B A^2 B A B A^l$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$	$5, k+l \equiv 1$	25
12 $A^k B A^2 B A B A^2 B A^l$	$5, k+l \equiv 1$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$	25
13 $A^k B A^2 B A^4 B A^l$	$5, k+l \equiv 2$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$	25
14 $A^k B A^2 B A^4 B A B A^l$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$	$5, k+l \equiv 2$	25
15 $A^k B A^4 B A B A^l$	$5, k+l \equiv 0$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$	25
16 $A^k B A^4 B A^2 B A^l$	$5, k+l \equiv 2$	$10, k+l \equiv \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$		$10, k+l \equiv \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$	25
	45	80	90	144	359

Gruppen indeholder, som den skal, 360 Transformationer, og det ses, at Ikosaedergruppen indgaar som Undergruppe i den. (Se Rækken af Diagonalsummer S. 194.)

<sup>1)</sup> Ved  $k+l \equiv 0$  er underforstaaet mod 5, og lignende Underforstaaelser er gjort ved alle de følgende Kongruenser.

58) Vi have endnu kun tilbage at betragte en Gruppe af 7<sup>de</sup> Orden (se S. 176), som skal indeholde Transformationer af 7<sup>de</sup> Orden, 4<sup>de</sup> Orden, 3<sup>die</sup> Orden, 2<sup>den</sup> Orden. Vi kunne da antage, at Gruppen indeholder to Transformationer,

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = a^2 x \\ \mu z' = a^4 x, \end{cases}$$

hvor  $a$  er en vilkaarlig 7<sup>de</sup> imaginær Rod af Enheden, og en Transformation  $B$  af 2<sup>den</sup> Orden, med reelle Koefficienter, og at

$$\begin{aligned} d &= a + a^2 + a^4 \\ \bar{d} &= \bar{a} + \bar{a}^2 + \bar{a}^4 \\ d + \bar{d} &= -1, \quad d\bar{d} = 2, \end{aligned}$$

saa ville vi ved at multiplicere  $B$  med Potenser af  $A$  faa følgende mulige Rækker af Diagonalsummer ifølge (90)

$s$	$-1$	$-1$	$-1$
$s_1$	$\bar{d}$	$0$	$1$
$s_2$	$1$	$\bar{d}$	$0$
$s_3$	$0$	$1$	$d$
$s_4$	$0$	$1$	$\bar{d}$
$s_5$	$1$	$d$	$0$
$s_6$	$d$	$0$	$1$

Det vil vise sig, at der vil forekomme i Gruppen Transformationer af 2<sup>den</sup> Orden, der ved Multiplikation med Potenser af  $A$  ville give alle tre Rækker af Diagonalsummer. Vi gaa da ud fra den anden Række, og antage altsaa, at  $B$  ved Multiplikation med  $A$  giver denne Række Diagonalsummer.

Man har da

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 + c_3 &= -1 \\ a_1 a + b_2 a^2 + c_3 a^4 &= 0 \\ a_1 \bar{a} + b_2 \bar{a}^2 + c_3 \bar{a}^4 &= 0 \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{- \begin{vmatrix} a^2 & a^4 \\ \bar{a}^2 & \bar{a}^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^4 \\ \bar{a} & \bar{a}^2 & \bar{a}^4 \end{vmatrix}} = \frac{-(a + \bar{a})}{(a-1)(\bar{a}-1)(\bar{a}+a+1)} = p \quad \left. \vphantom{\frac{-(a + \bar{a})}{(a-1)(\bar{a}-1)(\bar{a}+a+1)}} \right\} (95)$$

$$\left. \begin{aligned}
 b_2 &= \frac{- \begin{vmatrix} \alpha^4 & \alpha \\ \bar{\alpha}^4 & \bar{\alpha} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^4 \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^4 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + 1}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\bar{\alpha} + \alpha + 1)} = q \\
 c_3 &= \frac{- \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^4 \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}^4 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\bar{\alpha} + \alpha + 1)} = r.
 \end{aligned} \right\} (95)$$

Man kan her lægge Mærke til, hvad der finder Anvendelse i det følgende, at  $a_1, b_2, c_3$  kredsforskydes, naar for  $a$  sættes  $\alpha^2$  (eller  $\bar{\alpha}^2$ ).

Vi ville nu vise, at

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1. \quad (96)$$

Man har nemlig

$$(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\alpha + \bar{\alpha} + 1) = (2 - \alpha - \bar{\alpha})(\alpha + \bar{\alpha} + 1) = \alpha + \bar{\alpha} - \alpha^2 - \bar{\alpha}^2,$$

og altsaa

$$\begin{aligned}
 p^2 + q^2 + r^2 &= \frac{(\alpha + \bar{\alpha})^2 + (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + 1)^2 + 1}{(\alpha + \bar{\alpha} - \alpha^2 - \bar{\alpha}^2)^2} \\
 &= \frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + 2 + \alpha^4 + \bar{\alpha}^4 + 2 + 2\alpha^2 + 2\bar{\alpha}^2 + 1 + 1}{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + 2 + \alpha^4 + \bar{\alpha}^4 + 2 - 2\alpha^3 - 2\bar{\alpha}^3 - 2\alpha - 2\bar{\alpha}} \\
 &= \frac{\alpha^4 + \bar{\alpha}^4 + 3\alpha^2 + 3\bar{\alpha}^2 + 6}{-\alpha^4 - \bar{\alpha}^4 + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 - 2\alpha - 2\bar{\alpha} + 4} = 1,
 \end{aligned}$$

idet Tælleren og Nævneren reduceres ved Ligningen

$$\alpha^3 + \bar{\alpha}^3 + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + \alpha + \bar{\alpha} + 1 = 0.$$

Da man desuden har

$$p + q + r = -1,$$

faas

$$pq + pr + rq = 0. \quad (97)$$

Endvidere har man

$$r^2 + r = \frac{1 - \bar{\alpha} - \alpha + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2}{(\alpha + \bar{\alpha} - \alpha^2 - \bar{\alpha}^2)^2}$$

$$pq = \frac{-(\alpha + \bar{\alpha})(1 + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2)}{(\alpha + \bar{\alpha} - \alpha^2 - \bar{\alpha}^2)^2} = \frac{1 - \alpha - \bar{\alpha} + \alpha^2 + \bar{\alpha}^2}{(\alpha + \bar{\alpha} - \alpha^2 - \bar{\alpha}^2)^2} = r^2 + r.$$

Vi faa da, ved at kredsforskyde  $a, \alpha^2, \alpha^4$ ,

$$p^2 + p = rq$$

$$q^2 + q = rp$$

$$r^2 + r = pq.$$

(98)



Men man faar da, idet vi bruge de sædvanlige Betegnelser for Koefficienterne i  $B$ ,

$$\begin{aligned} b_1^2 &= pq - r = r^2 \\ c_1^2 &= pr - q = q^2 \\ c_2^2 &= rq - p = p^2, \end{aligned}$$

og det ses da, at vi kunne sætte  $b_1 = r$ ,  $c_1 = q$ ,  $c_2 = p$ , saa at

$$B \equiv \begin{vmatrix} p & r & q \\ r & q & p \\ q & p & r \end{vmatrix}.$$

Det ses, at  $B$  bliver ændret paa samme Maade, hvad enten man kredsforskyder Søjler eller Rækker.

Det skal nu vises, at den Gruppe, vi faa ved at danne alle Multipla af Potenser af  $A$  og  $B$ , er endelig.

Det skal vises, at Gruppen kun indeholder  $B$ , og de Transformationer  $B'$  og  $B''$ , som faas ved at kredsforskyde  $p$ ,  $q$ ,  $r$  i  $B$ , samt Transformationer af Formen  $A^m B A^n$ , og lignende Sættninger hvor  $B$  ombyttes med  $B'$  og  $B''$ , samt endelig alle Transformationer af 3die Orden af Formen

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = a^p y \\ \mu y' = a^{2p} z \\ \mu z' = a^{3p} x \end{cases}$$

og

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = a^p z \\ \mu y' = a^{2p} x \\ \mu z' = a^{3p} y. \end{cases}$$

Vi ville nu begynde med at danne Transformationerne  $A^3 B A^3 B$ . Vi faa

$$A^3 B A^3 B \equiv \begin{vmatrix} a^3 p & a^3 r & a^3 q \\ a^6 r & a^6 q & a^6 p \\ a^5 q & a^5 p & a^5 r \end{vmatrix}^2 \equiv$$

$$\begin{vmatrix} a^6 p^2 + a^2 r^2 + a q^2 & a^6 p r + a^2 q r + a p q & a^6 p q + a^2 p r + a q r \\ a^2 p r + a^5 q r + a^4 p q & a^2 r^2 + a^5 q^2 + a^4 p^2 & a^2 r q + a^5 p q + a^4 p r \\ a p q + a^4 p r + a^3 q r & a q r + a^4 p q + a^3 p r & a q^2 + a^4 p^2 + a^3 r^2 \end{vmatrix}.$$

Betegnes Elementerne i denne Determinant med markerede Bogstaver, har man

$$\begin{aligned} a'_1 &= a^6 p^2 + a^2 r^2 + a q^2 = a^3 p (a^3 p + a^6 q + a^5 r) \\ &\quad - a^2 r - a q \\ &= a^3 p - a^2 r - a q, \end{aligned}$$

da  $A^3 B$  har Diagonalsummen 1.

Indsættes nu Værdierne for  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , faas

$$a'_1 = q,$$

og, da de andre Diagonalled faas paa samme Maade ved Ombytning af  $a$  med  $a^2$  og  $a^4$ , ere disse  $r$  og  $p$ .

Vi have dernæst

$$\begin{aligned} a^6 pr + a^2 qr + apq &= a^3 p(a^3 r + a^6 p + a^5 q) \\ &\quad + a^2 p \\ &= a^2 p, \end{aligned}$$

da Koefficienten til  $a^3 p$  er Diagonalsummen for  $A^6 B$ .

Paa samme Maade faas

$$\begin{aligned} a^2 pr + a^5 qr + a^4 pq &= a^6 p(a^3 r + a^6 p + a^5 q) \\ &\quad + a^5 p \\ &= a^5 p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^6 pq + a^2 pr + aqr &= a^3 r(a^3 r + a^6 p + a^5 q) \\ &\quad + a^6 r \\ &= a^6 r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} apq + a^4 pr + a^3 qr &= a^5 r(a^3 r + a^6 p + a^5 q) \\ &\quad + ar \\ &= ar, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 rq + a^5 pq + a^4 pr &= a^6 q(a^3 r + a^6 p + a^5 q) \\ &\quad + a^4 q \\ &= a^4 q \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} arq + a^4 pq + a^3 pr &= a^5 q(a^3 r + a^6 p + a^5 q) \\ &\quad + a^3 q \\ &= a^3 q, \end{aligned}$$

saa at Transformationen bliver

$$C \equiv A^3 B A^3 B \equiv \begin{vmatrix} q & a^2 p & \bar{a}r \\ \bar{a}^2 p & r & \bar{a}^3 q \\ ar & a^3 q & p \end{vmatrix}$$

og altsaa

$$B' \equiv A^2 C A^{-2} \equiv \begin{vmatrix} q & p & r \\ p & r & q \\ r & q & p \end{vmatrix}.$$

Altsaa indeholder Gruppen den Transformation, som faas ved at kredsforskyde  $p$ ,  $q$ ,  $r$  i  $B$ , og denne Operation kan naturligvis gjentages.

Det er herved indlysende, at vi faa den samme Gruppe, hvilken af Rækkerne i Skemaet S. 198 vi benytte til Dannelsen af  $B$ .

Da  $A^3 B A^3 B$  hører til de S. 201 nævnte Transformationer, hører  $B A^3 B$  og de tilsvarende  $B' A^6 B'$ ,  $B'' A^5 B''$  ogsaa dertil, og ligeledes  $B A^4 B$ ,  $B' A B'$ ,  $B'' A^2 B''$ , da de sidste tre Transformationer ere de omvendte af de tre første.

Men det kan nu vises, at  $BA^pB$  ogsaa hører til de omtalte Transformationer, naar  $p$  er vilkaarlig. Det er klart, at den gjør det for  $p = 3$ , men den vil ogsaa gjøre det for enhver anden Værdi f. Ex.  $p = 6$ . Thi kredsfor skydes Søjlerne i det bageste  $B$ , Rækkerne i det første, 1 Gang, vil der komme til at staa  $B'A^6B'$ , som hører til de omtalte Transformationer; men denne Kredsfor skydning vil kun have til Følge, at Rækkerne og Søjlerne i den resulterende Transformation  $BA^6B$  kredsfor skydes, ved atter at kredsfor skyde Rækkerne og Søjlerne i  $B'A^6B'$  en Gang i modsat Retning, vil man da have  $BA^6B$ ; men en Kredsfor skydning af Rækker og Søjler i en af de omtalte Transformationer vil atter give en Transformation af samme Form.

Men ganske paa samme Maade ses det, at en Transformation af Formen  $BA^pB'$  atter hører til de omtalte Transformationer; thi man kan for skyde Søjlerne i  $B'$ , saa at  $B'$  gaar over til at blive  $B$ ; dette vil kun foranledige en Kredsfor skydning af Søjlerne i  $BA^pB'$ , som altsaa ses at høre til de omtalte Transformationer.

Det ses da, at mere sammensatte Produkter af  $A, B, B', B''$  ogsaa vil føre tilbage til de nævnte Transformationsformer, undtagen hvis der skulde forekomme Sammensætninger af  $B \cdot B'$ .

Lad os da se, hvad dette giver. Man har

$$BB' \equiv \begin{vmatrix} p & r & q \\ r & q & p \\ q & p & r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q & p & r \\ p & r & q \\ r & q & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

saa at disse Sammensætninger føre til Transformationerne

$$\begin{aligned} \mu x' &= y & \mu x' &= z \\ \mu y' &= z & \text{eller} & \mu y' = x \\ \mu z' &= x & \mu z' &= y, \end{aligned}$$

og almindeligere ved at sammensætte disse med Potenser af  $A$

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = a^p y \\ \mu y' = a^{2p} z, \\ \mu z' = a^{4p} x \end{cases}, \quad D' \equiv \begin{cases} \mu x' = a^p z \\ \mu y' = a^{2p} x \\ \mu z' = a^{4p} y. \end{cases}$$

Det ses, at Sammensætninger af Transformationer af Formerne  $D$  med de allerede forhen nævnte, atter høre til Transformationer af de samme Former, idet man ved at multiplicere med  $D^p$  kun faar Søjler eller Rækker kredsfor skydte. Gruppens Endelighed er hermed bevist.

Da alle Transformationerne ere indesluttede i følgende Former

$$A^p, A^m B A^n, A^m B' A^n, A^m B'' A^n, D A^n, D' A^n,$$

hvor  $p, m, n$  kunne tillægges alle Værdier fra 0 til 6, faas, idet den identiske Transformation medregnes, Antallet af Transformationer hørende til Gruppen at være

$$7 + 3 \cdot 49 + 14 = 168,$$

saaledes som det skulde være.

Disse Transformationer kunne klassificeres paa følgende Maade.  
48 ere af 7de Orden, nemlig

$$\left. \begin{array}{l} A^n \text{ for alle Værdier af } p \\ A^m B A^n \text{ for } m + n \equiv 2 \\ \quad \quad \quad m + n \equiv 5 \\ A^m B' A^n \text{ for } m + n \equiv 3 \\ \quad \quad \quad m + n \equiv 4 \\ A^m B'' A^n \text{ for } m + n \equiv 1 \\ \quad \quad \quad m + n \equiv 6 \end{array} \right\} \text{(mod 7).}$$

42 ere af 4de Orden, nemlig

$$\left. \begin{array}{l} A^m B A^n \text{ for } m + n \equiv 3 \\ \quad \quad \quad m + n \equiv 4 \\ A^m B' A^n \text{ for } m + n \equiv 1 \\ \quad \quad \quad m + n \equiv 6 \\ A^m B'' A^n \text{ for } m + n \equiv 2 \\ \quad \quad \quad m + n \equiv 5 \end{array} \right\} \text{(mod 7).}$$

56 ere af 3die Orden, nemlig

$$\left. \begin{array}{l} D A^n \\ D' A^n \end{array} \right\} \text{ for alle Værdier af } n. \\ \left. \begin{array}{l} A^m B A^n \text{ for } m + n \equiv 1 \\ \quad \quad \quad m + n \equiv 6 \\ A^m B' A^n \text{ for } m + n \equiv 2 \\ \quad \quad \quad m + n \equiv 5 \\ A^m B'' A^n \text{ for } m + n \equiv 3 \\ \quad \quad \quad m + n \equiv 4 \end{array} \right\} \text{(mod 7).}$$

Endelig ere 21 af 2den Orden

$$\left. \begin{array}{l} A^m B A^n \\ A^m B' A^n \\ A^m B'' A^n \end{array} \right\} \text{ for } m + n \equiv 0 \text{ (mod 7).}$$

Transformationerne af 7de Orden høre til 8 forskellige Sæt Dobbelpunkter, Transformationerne af 3die Orden til 28 Sæt Dobbelpunkter, Transformationerne af 4de Orden til 21 forskellige Sæt Dobbelpunkter, medens Transformationerne af 2den Orden alle ere Potenser af Transformationerne af 4de Orden.

---



Les plans sur lesquels la transformation n'exerce aucune action sont appelés des plans doubles. Si toutes les racines de l'équation (2) sont inégales, il y aura  $n + 1$  plans doubles.

Connaissant les coordonnées d'un point double, celles d'un plan double s'obtiendront en remplaçant  $a_1, b_1 \dots$  par  $A_1, B_1 \dots$  et  $\mu$  par  $\frac{1}{\mu}$ . On voit donc qu'à chaque point double répond un plan double.

4) Chaque plan double renferme tous les points doubles qui ne répondent pas au plan, et réciproquement tous les plans doubles qui ne répondent pas à un point double passent par ce point.

5) Si (2) n'a pas de racines égales, les équations (1) pourront se mettre sous la forme:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 P'_1 &= \alpha P_1, \\ \mu_1 P'_2 &= \beta P_2, \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \mu_1 P'_{n+1} &= \lambda P_{n+1}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

où  $\alpha, \beta \dots \lambda$  sont des constantes et  $P_1, P_2 \dots P_{n+1}$  les premiers membres des équations des plans doubles. On appelle  $\alpha, \beta \dots \lambda$  les multiplicateurs de la transformation, et peut toujours supposer  $\alpha \cdot \beta \dots \lambda = 1$ . Ces multiplicateurs ne sont déterminés qu'à un facteur près, qui peut être une racine d'ordre  $(n + 1)$  de l'unité.

6) Déterminons les multiplicateurs d'une transformation donnée sous la forme (1). En résolvant les équations (12) par rapport à  $\mu_1 x', \mu_1 y' \dots \mu_1 v'$ , on doit arriver aux équations (1) et l'on voit que  $\mu$  et  $\mu_1$  ne peuvent différer que par un facteur constant, ce qui permet de poser  $\mu_1 = k\mu$ ,  $k$  étant une constante.

Le point double qui répond à  $P_{n+1} = 0$  est déterminé par  $P_1 = P_2 \dots P_n = 0$ . En posant  $x' = x, y' = y, \dots v' = v$ , on voit que  $\lambda$  est la valeur de  $\mu_1$  qui répond à ce point double, et que la valeur correspondante de  $\mu$  est une racine de (2). On a donc  $\lambda = k\mu$ ,  $\mu$  étant une racine de (2). Le dernier terme de (2) est  $\pm 1$ , ce qui donne  $\alpha \cdot \beta \dots \lambda \cdot k^{n+1} = 1$ , d'où  $k^{n+1} = 1$ . Les multiplicateurs n'étant déterminés qu'à un facteur près, qui est une racine d'ordre  $(n + 1)$  de l'unité, on peut poser  $k = 1$ .

Les multiplicateurs de (1) sont donc les racines de (2), si cette équation n'a pas de racines égales.

7) Si une transformation devient identique en étant élevée à une puissance  $m$ , on dit qu'elle est d'ordre  $m$ , au cas qu'elle ne devienne pas identique lorsqu'on l'élève à une puissance moindre que  $m$ .

Si (2) n'a pas de racines égales, la transformation est d'ordre  $m$  lorsque  $m$  et  $n + 1$  sont premiers entre eux, et les multiplicateurs, des racines primitives d'ordre  $m$  de l'unité.

Si  $m$  et  $n + 1$  ne sont pas premiers entre eux, nous nous bornerons à examiner le cas où  $m = p^q$ ,  $p$  étant un nombre premier, tandis que  $n + 1$  renferme le facteur  $p^s$ . Dans ce cas, les multiplicateurs, lorsque la transformation est de l'ordre  $p^q$ , doivent être de la forme  $\chi \alpha, \chi \beta \dots \chi \lambda$ ,  $\chi$  étant une racine d'ordre  $p^{q+s}$  de l'unité et  $\alpha, \beta, \gamma \dots \lambda$  des racines d'ordre  $p^q$  de l'unité.

8) Si (2) a des racines égales, en cherchant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une puissance de la transformation (1) soit la transformation identique, on arrive au résultat suivant:

Les racines de (2) doivent être des racines de l'unité, et si l'une d'elles est du degré  $p$  de multiplicité, les plans doubles qui répondent à cette racine doivent former une suite infinie du degré  $p - 1$  de multiplicité.

On appelle toujours les racines de (2) les multiplicateurs de la transformation.

Tout plan double qui répond à un multiplicateur renfermera toujours tous les points doubles qui ne répondent pas à ce multiplicateur, et réciproquement tout point double qui répond à un multiplicateur sera situé dans tout plan double qui ne répond pas à ce multiplicateur.

### II. Combinaisons des transformations.

10) Nous chercherons à déterminer la forme des transformations appartenant à des groupes qui ne renferment que des transformations dont les multiplicateurs ont le module 1, et qui peuvent être mises sous la forme (12).

Nous supposons que le groupe contient les transformations  $A$  et  $B$ , que les multiplicateurs de  $A$  sont tous différents, et qu'on a pris pour plans fondamentaux du système des coordonnées les plans doubles de  $A$ .

Les transformations  $A$  et  $B$  sont alors représentées par les équations:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \dots \\ \mu v' = \lambda v \end{cases} \text{ et } B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \dots l_1 v \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \dots l_2 v \\ \dots \\ \mu v' = a_{n+1} x + b_{n+1} y \dots l_{n+1} v. \end{cases}$$

Les multiplicateurs de  $B$  sont déterminés par l'équation:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \mu & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 - \mu & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \dots & l_{n+1} - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme:

$$\left. \begin{aligned} \mu^{n+1} - (a_1 + b_2 \dots l_{n+1})\mu^n + ((a_1 b_2) + (a_1 c_3) \dots)\mu^{n-1} \\ \mp (A_1 + B_2 \dots L_{n+1})\mu \pm 1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$(a_1 b_2)$  étant égal à  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$  et  $A_1, B_2 \dots$  étant les sous-déterminants de  $a_1, b_2 \dots$

Comme  $|\mu| = 1$  ( $|\mu| =$  le module de  $\mu$ ), et que l'équation (24) doit être satisfaite si l'on y remplace  $\mu$  par  $\frac{1}{\mu}$ , puisque  $\bar{\mu} = \frac{1}{\mu}$ , et  $a_1, b_2 \dots l_{n+1}$  par leurs valeurs conjuguées, on doit avoir:

$$\left. \begin{aligned} a_1 + b_2 \dots l_{n+1} &= \overline{A_1 + B_2 \dots L_{n+1}} \\ (a_1 b_2) + (a_1 c_3) \dots &= \overline{(A_1 B_2) + (A_1 C_3)}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ces équations doivent aussi être satisfaites par les coefficients de  $A^m B$ , et on a alors :

$$\left. \begin{aligned} a^m a_1 + \beta^m b_2 \dots \lambda^m l_{n+1} &= \alpha^m \overline{A_1} + \beta^m \overline{B_2} \dots \lambda^m \overline{I_{n+1}} \\ \Sigma \alpha^m \beta^m (a_1 b_2) &= \Sigma \alpha^m \beta^m (\overline{A_1 B_2}). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Tous les multiplicateurs de  $A$  étant différents, le degré  $p$  de  $A$  doit être plus grand que  $n + 1$ , et les équations (26) devant être satisfaites par toutes les valeurs de  $m$ , on aura :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \overline{A_1} \\ b_2 &= \overline{B_2} \\ \dots &\dots \dots \\ l_{n+1} &= \overline{I_{n+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

11) Si  $B$  et  $C$  sont des transformations arbitraires du groupe, on obtient en appliquant les équations (27) au premier coefficient de  $CA^m B$ ,  $a_1, \beta_1 \dots \lambda_1$  étant les coefficients de  $C$  et  $m$  arbitraire :

$$\left. \begin{aligned} a_1 a_1 &= \overline{A_1 A_1} \\ \beta_1 a_2 &= \overline{B_1 A_2} \\ \dots &\dots \dots \\ \lambda_1 a_{n+1} &= \overline{A_1 A_{n+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

De là on déduit, en identifiant  $C$  avec  $B$  ou avec la transformation inverse de  $B$  :

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 &= \overline{A_1^2} \\ b_1 a_2 &= \overline{B_1 A_2} \\ c_1 a_3 &= \overline{C_1 A_3} \\ \dots &\dots \dots \\ l_1 a_{n+1} &= \overline{L_1 A_{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (29) \quad \text{et} \quad \left. \begin{aligned} a_1 A_1 &= \overline{a_1 A_1} \\ a_2 A_2 &= \overline{a_2 A_2} \\ \dots &\dots \dots \\ a_{n+1} A_{n+1} &= \overline{a_{n+1} A_{n+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Les équations (29) et autres analogues qu'on obtient en égalant les autres éléments du terme principal du déterminant de  $CA^m B$  aux conjugués de leurs sous-déterminants, expriment que le produit de deux éléments du déterminant d'une transformation qui sont symétriques par rapport au terme principal, est le conjugué du produit de leurs sous-déterminants. Les équations (30) et leurs analogues expriment que le produit de chaque élément par son sous-déterminant est une quantité réelle.

12) Soit  $A, B, C \dots$  les transformations d'un groupe et  $F$  une transformation arbitraire; le groupe et ses transformations seront transformés par  $F$  si l'on opère toutes les transformations :

$$FAF^{-1}, FBF^{-1}, FCF^{-1} \dots$$

Une transformation  $FAF^{-1}$  a les mêmes multiplicateurs que  $A$ , et ses points doubles sont les points en lesquels  $F$  transforme les points doubles de  $A$ .

13) Pour qu'une transformation  $A$  ne soit pas transformée par  $F$ , il faut que  $F$  ait les mêmes points doubles que  $A$  ou produise un déplacement circulaire des points doubles de  $A$ . Dans le dernier cas, les points doubles de  $A$  doivent se composer de groupes de  $r + 1$  points  $P_1, P_2 \dots P_{r+1}$ , dont les multiplicateurs respectifs sont  $m, ma, ma^2, \dots, ma^r$ , où  $a^{r+1} = 1$ , et  $F$  doit transformer  $P_1$  en  $P_2, P_2$  en  $P_3 \dots P_{r+1}$  en  $P_1$ .

14) Si un ou plusieurs éléments des déterminants d'une transformation sont nuls pour toutes les transformations du groupe, la discussion d'un groupe contenant des transformations de  $n$  variables peut toujours être ramenée à celle de groupes qui en contiennent



un moins grand nombre. C'est pourquoi on supposera toujours dans ce qui suit que cela n'a pas lieu. Il résulte de (28) qu'on peut toujours supposer qu'un élément et son sous-déterminant sont nuls en même temps.

15) Nous transformerons maintenant un groupe (contenant les transformations ci-dessus mentionnées  $A$  et  $B$ ) par une transformation:

$$F \equiv \begin{cases} \mu x' = px \\ \mu y' = qy \\ \dots \dots \dots \\ \mu v' = tv, \end{cases}$$

où  $p, q \dots t$  sont des constantes arbitraires différentes de zéro.

La transformation  $A$  reste par suite telle qu'elle est, tandis que  $B$  devient:

$$\begin{aligned} \mu x' &= a_1 x + \frac{p b_1 y}{q} + \frac{p c_1 z}{r} \dots \frac{p l_1 v}{t} \\ \mu y' &= \frac{q a_2 x}{p} + b_2 y + \frac{q c_2 z}{r} \dots \frac{q l_2 v}{t} \\ \dots \dots \dots \\ \mu v' &= \frac{t a_{n+1} x}{p} + \frac{t b_{n+1} y}{q} \dots l_{n+1} v. \end{aligned}$$

$A_2$  est alors remplacé par  $\frac{p A_2}{q}$ . On peut donc déterminer  $p, q, r \dots$  de manière que

$$\left| \frac{q}{p} a_2 \right| = \left| \frac{p}{q} A_2 \right| \quad \left| \frac{r}{p} a_3 \right| = \left| \frac{p}{r} A_3 \right| \dots$$

et, par suite, que tous les éléments dans la première colonne du déterminant transformé aient le même module que leurs sous-déterminants.

Comme il est indifférent, dans les recherches qui suivent, qu'on considère le groupe primitif ou le groupe transformé, nous supposons toujours que:

$$|a_1| = |A_1|, |a_2| = |A_2| \dots |a_{n+1}| = |A_{n+1}|.$$

Il résulte alors de (30) que:

$$a_1 = \overline{A_1}, a_2 = \pm \overline{A_2}, a_3 = \pm \overline{A_3} \dots a_{n+1} = \pm \overline{A_{n+1}} \tag{33}$$

et de (28) que:

$$a_1 = \overline{\Lambda_1}, a_2 = \pm \overline{\Lambda_2}, a_3 = \pm \overline{\Lambda_3} \dots a_{n+1} = \pm \overline{\Lambda_{n+1}} \tag{34}$$

les signes se correspondant dans (33) et (34).

La dérivation des équations (33) et (34) exige qu'aucune des quantités  $a_1, a_2 \dots a_{n+1}$  ne soit nulle; mais si l'une d'elles,  $a_p$ , est nulle, il doit y avoir une transformation pour laquelle l'élément correspondant à  $a_p$  ne l'est pas, et cet élément peut alors être employé de la même manière que  $a_p$ .

$C$  étant une transformation arbitraire du groupe, nous pouvons maintenant former  $C^{-1}A^m B$ . L'élément qui, dans le déterminant de  $C^{-1}A^m B$ , répond à  $a_2$  est alors:

$$\alpha^m B_1 a_1 + \beta^m B_2 a_2 \dots \lambda^m B_{n+1} a_{n+1}$$

et son sous-déterminant:

$$\overline{\alpha^m} \beta_1 A_1 + \overline{\beta^m} \beta_2 A_2 \dots \overline{\lambda^m} \beta_{n+1} A_{n+1}.$$

De là on tire suivant (34):

$$B_1 a_1 = \pm \overline{\beta_1} A_1, B_2 a_2 = \pm \overline{\beta_2} A_2 \dots B_{n+1} a_{n+1} = \pm \overline{\beta_{n+1}} A_{n+1}, \tag{35}$$

où l'on prend le signe supérieur ou inférieur suivant que  $a_2 = \pm A_2$ . Les équations (35) et celles qu'on obtient en considérant les éléments qui correspondent à  $a_3, a_4 \dots a_{n+1}$  dans  $C^{-1}A^mB$ , montrent que chaque élément du déterminant de  $C$  est le conjugué de son sous-déterminant avec le signe + ou -. On voit aussi que tous les éléments du déterminant de  $C$ , dans une colonne, sont les conjugués de leurs sous-déterminants, tous avec le même signe que dans la première colonne, ou avec un signe contraire. Il résulte en outre de (29) que deux éléments symétriques par rapport au terme principal sont les conjugués de leurs sous-déterminants avec le même signe.

16) Si l'on pose :

$$f = x\bar{x} + \varepsilon_1 y\bar{y} + \varepsilon_2 z\bar{z} \dots \varepsilon_n v\bar{v}$$

et remplace  $x, y, z \dots v$  par  $\mu x', \mu y', \mu z' \dots \mu v'$ , ces quantités étant déterminées par (1) et les coefficients de (1) remplissant les conditions du § 15, on voit que  $f$  ne varie pas lorsque  $\varepsilon_p = \pm 1$ , suivant que  $a_p = \pm \bar{A}_p$ .

Réciproquement, si une transformation  $A$  est telle que  $\mu x', \mu y' \dots \mu v'$  substitués dans  $f$  à  $x, y \dots v$ , ne font pas varier  $f$ , les coefficients de  $A$  rempliront les conditions du § 15, le déterminant de  $A$  étant 1.

### III. Groupes finis des transformations de la ligne droite.

17) Supposons qu'un groupe fini renferme les deux transformations :

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \end{cases} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y. \end{cases}$$

$a_2$  et  $b_1$  devront être nuls en même temps, car si  $a_2$  seul l'était,  $BAB^{-1}A^{-1}$  ne pourrait appartenir à un groupe fini.

Nous avons, d'après le § 15,  $a_1 = \bar{b}_2$ ,  $a_2 = \pm b_1$ ; mais on ne peut avoir  $a_2 = \bar{b}_1$ , car  $ABA^{-1}B^{-1}$  serait alors une transformation qui ne peut pas figurer dans un groupe fini.

18) Nous allons maintenant déterminer les groupes finis possibles, notamment leur ordre et le nombre de transformations qu'ils contiennent.

Supposons qu'un groupe renferme une transformation  $A$  et transformons  $A$  par toutes les transformations du groupe, ce qui revient à former toutes les transformations  $C \equiv BAB^{-1}$ ,  $B$  étant une transformation arbitraire du groupe. Nous obtiendrons ainsi  $N$  transformations  $C$  ( $y$  compris la transformation identique), qui cependant ne seront pas toutes différentes.

Toutes les transformations différentes qui ont été formées en transformant  $A$  par toutes les transformations d'un groupe, constituent ce que nous appellerons la série de  $A$ .

C'est sur le nombre des transformations d'une pareille série que portera notre recherche. S'il y a dans le groupe un certain nombre  $p$  de transformations qui ne font pas varier  $A$ , il y en aura tout autant qui ne feront pas varier toute autre transformation de la série de  $A$ . Toutes les transformations qui ont les mêmes points doubles que  $A$  sont des puissances d'une seule et même transformation, et, sans restreindre la généralité des considérations qui suivent, nous pouvons supposer que cette transformation est  $A$ . Si  $A$  est d'ordre  $n$ ,  $n$  étant plus grand que 2,  $A$  et ses puissances sont les seules trans-

formations qui ne fassent pas varier  $A$ . En désignant par  $S$  le nombre des transformations de la série de  $A$ , on aura donc  $nS = N$  d'où  $S = \frac{N}{n}$ . Toutes les transformations d'une même série ont les mêmes multiplicateurs, et par suite deux transformations d'une même série ne peuvent avoir de points doubles communs, à moins que l'une d'elles ne soit la transformation inverse de l'autre.

Si une transformation  $A$  et son inverse appartiennent à la même série, il doit y avoir dans le groupe une transformation qui permute les points doubles de  $A$ . Chaque série de  $A^p$  renferme donc aussi  $\frac{N}{n}$  transformations, à moins que  $A$  et  $A^{-1}$  n'appartiennent à la même série et que  $A^p$  ne soit du deuxième ordre, et, dans ce cas, la série de  $A^p$  se compose de  $\frac{N}{2n}$  transformations. Appelons les séries appartenant à toutes les transformations qui ont les mêmes points doubles, les séries de ces points doubles, ou celles d'une des transformations qui ont ces points doubles; les séries de  $A$  comprendront alors  $\frac{(n-1)N}{n}$  ou  $\frac{(n-1)N}{2n}$  transformations, suivant que le groupe ne contient pas ou contient une transformation qui permute les points doubles de  $A$ .

Il reste à trouver combien de transformations renferme une transformation du deuxième ordre avec sa série, lorsque  $A$  n'est pas une puissance d'une autre transformation.

S'il n'y a aucune transformation qui permute les points doubles de  $A$ ,  $A$  et sa série contiennent  $\frac{N}{2}$  transformations.

Y a-t-il une transformation  $B$  qui permute les points doubles de  $A$ ,  $A$  et  $BAB^{-1}$  sont identiques.  $B$  doit aussi être du deuxième ordre, car de:

$$A \equiv BAB^{-1}$$

il suit que:

$$B \equiv ABA^{-1}.$$

Il est maintenant facile de voir que si une transformation  $C$ , autre que  $B$ , permute les points doubles de  $A$ , elle doit être identique à  $AB$ , car autrement  $CB$  serait une transformation ayant les mêmes points doubles que  $A$ , sans cependant lui être identique. Il y a donc dans le groupe 4 transformations qui ne font pas varier  $A$ , à savoir la transformation identique,  $A$ ,  $B$  et  $AB$ .  $A$ , avec sa série, contient  $\frac{N}{4}$  transformations.

19) Comme le groupe, outre les séries qu'il contient, renferme encore la transformation identique, nous aurons la proposition suivante:

Si un groupe se compose des transformations:

$$\begin{aligned} &A_1, A_2 \dots \text{ de l'ordre } n_1, n_2 \dots \text{ et} \\ &B_1, B_2 \dots \text{ de l'ordre } m_1, m_2 \dots \end{aligned}$$

avec leurs séries respectives, et qu'il n'y ait aucune transformation d'un ordre plus élevé que  $n_1, n_2 \dots m_1, m_2 \dots$  avec les mêmes points doubles que  $A_1, A_2 \dots B_1, B_2 \dots$ , on aura:

$$N \left( \frac{n_1-1}{n_1} + \frac{n_2-1}{n_2} \dots \frac{m_1-1}{2m_1} + \frac{m_2-1}{2m_2} \dots \right) + 1 = N,$$

où  $N$  désigne le nombre des transformations du groupe, étant donné qu'il n'y a aucune transformation qui permute les points doubles de  $A_1, A_2 \dots$ , tandis qu'il y en a une qui permute ceux de  $B_1, B_2 \dots$ .

Comme  $n_1$  est au moins égal à 2,  $\frac{n_1 - 1}{n_1} \geq \frac{1}{2}$ .

Il ne peut donc y avoir au plus dans le groupe qu'une transformation avec ses séries dont les points doubles ne soient pas permutés par quelque transformation du groupe.

S'il y a une pareille transformation dans le groupe, on voit qu'il ne peut au plus renfermer qu'une transformation avec ses séries dont les points doubles soient permutés par quelque transformation du groupe.

Si le groupe ne comprend qu'une transformation dont les points doubles ne sont pas permutés et les séries qui appartiennent à cette transformation, on doit avoir :

$$N = n_1$$

le groupe ne contient qu'une transformation et ses puissances.

Si le groupe renferme les transformations  $A_1$  et  $B_1$ , on aura :

$$N \left( \frac{n_1 - 1}{n_1} + \frac{m_1 - 1}{2m_1} \right) + 1 = N,$$

$$N = \frac{2m_1 n_1}{n_1 + 2m_1 - m_1 n_1}.$$

Le dénominateur devant être positif, il en résulte que :

$$n_1 + 2m_1 - m_1 n_1 > 0 \quad \text{et} \quad (m_1 - 1)(n_1 - 2) < 2,$$

ce qui exige ou que  $n_1 = 2$  et  $m_1$  soit arbitraire, ou que  $n_1 = 3$  et  $m_1 = 2$ .

Ces deux cas correspondent à des groupes finis, mais le premier seulement lorsque  $m$  est impair. Dans le premier cas, on a  $N = 2m$  et un groupe cyclique, dans le second  $N = 12$  et un groupe tétraédrique.

Si le groupe ne renferme que des transformations dont les points doubles sont permutés par une autre transformation, le groupe ne peut au plus renfermer que 3 transformations avec leurs séries respectives. On a alors :

$$\frac{N}{2} \left( \frac{m_1 - 1}{m_1} + \frac{m_2 - 1}{m_2} + \frac{m_3 - 1}{m_3} \right) + 1 = N.$$

Aucun des termes ne peut manquer, puisque le groupe comprendrait alors un nombre de transformations moins grand que l'ordre le plus élevé de celles dont il se compose. Une au moins des quantités  $m$  doit être égale à 2, car autrement on aurait :

$$\frac{N}{2} \left( \frac{m_1 - 1}{m_1} + \frac{m_2 - 1}{m_2} + \frac{m_3 - 1}{m_3} \right) \geq N.$$

Nous poserons donc  $m_1 = 2$ , ce qui donne :

$$N = \frac{4m_2 m_3}{2m_2 + 2m_3 - m_2 m_3}.$$

On doit alors avoir :

$$(m_2 - 2)(m_3 - 2) < 4.$$

Nous aurons ainsi le cas suivants :

$$\begin{aligned} m_2 &= 2, & m_3 & \text{arbitraire,} \\ m_2 &= 3, & m_3 &= 3, \\ m_2 &= 3, & m_3 &= 4, \\ m_2 &= 3, & m_3 &= 5. \end{aligned}$$

De ces cas, le deuxième est impossible, car le groupe devrait contenir deux transformations  $B$  et  $C$  du 3<sup>e</sup> ordre avec des points doubles différents. On peut maintenant faire voir que toute transformation  $A$  du 2<sup>e</sup> ordre qui permute les points doubles de  $B$  doit aussi permuer ceux de  $A$ . Mais le groupe, contrairement à l'hypothèse, devrait alors renfermer au moins 5 transformations du 2<sup>e</sup> ordre  $A$ ,  $BA$ ,  $B^2A$ ,  $CA$  et  $C^2A$ .

Aux autres cas, par contre, correspondent des groupes réels, au premier pourtant, seulement lorsque  $m_3$  est pair. Le groupe est alors cyclique.

A  $m_2 = 3$ ,  $m_3 = 4$ , correspond le groupe octaédrique, pour lequel  $N = 24$ .

A  $m_2 = 3$  et  $m_3 = 5$ , correspond le groupe icosaédrique, pour lequel  $N = 60$ .

20) Nous déterminerons encore algébriquement dans les paragraphes suivants les groupes possibles.

Lorsque deux transformations appartiennent à un groupe fini, le rapport anharmonique entre leurs points doubles est réel.

21) En supposant toujours que le groupe contient les deux transformations :

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y \end{cases} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \end{cases}$$

nous pouvons, d'après le § 20, supposer que le groupe est transformé de manière que  $A$  et  $B$  aient des points doubles réels.  $a_2$  et  $b_1$  sont alors des quantités purement imaginaires.

Nous formerons maintenant  $AB^2A$ , qui est supposé être de l'ordre  $n$ . Si  $n$  est pair,  $(AB^2A)^{\frac{n}{2}}$  sera une transformation du 2<sup>e</sup> ordre.

Si  $n$  n'est pas pair, on peut former :

$$(AB^2A)^{\frac{n-1}{2}} AB \cdot BA (AB^2A)^{\frac{n-1}{2}},$$

qui est une transformation identique. Ses deux parties, que sépare le signe de la multiplication, sont telles que l'une se déduit de l'autre en permutant  $A$  et  $B$ .

On voit donc que :

$$C \equiv (AB^2A)^{\frac{n-1}{2}} AB \quad \text{et} \quad C_1 \equiv (A^{-1}B^{-2}A^{-1})^{\frac{n-1}{2}} A^{-1}B^{-1}$$

sont des transformations identiques. Mais comme  $A$  et  $B$  ont des points doubles réels,  $C$  et  $C_1$  ont des multiplicateurs communs et des points doubles dont les coordonnées sont des quantités conjuguées ou des quantités réelles. Si les coordonnées des points doubles de  $C$  sont réelles,  $C$  ne variera pas lorsque ses multiplicateurs seront permutés avec leurs quantités conjuguées, ce qui seulement est possible si  $C$  est du 2<sup>e</sup> ordre.

Si les coordonnées des points doubles sont des quantités conjuguées complexes, les points doubles de  $C$  et de  $C_1$  doivent être harmoniques. Le groupe renferme alors deux transformations dont les points doubles sont harmoniques, et nous pouvons supposer que  $A$  et  $B$  sont deux pareilles transformations,  $A$  et  $B$  appartenant aux formes ci-dessus mentionnées.  $a_1$  et  $b_2$  doivent être des quantités réelles lorsque les points doubles de  $A$

et de  $B$  sont harmoniques. Nous pouvons alors transformer le groupe de manière que  $a_2$  et  $b_1$  deviennent aussi réels. On voit donc que les points doubles de :

$$AB^m AB^{-m} A$$

sont les conjugués harmoniques de ceux de  $B$ , et si le premier coefficient de  $A$  n'est pas nul, on peut toujours déterminer  $m$  de manière que le premier coefficient de  $AB^m AB^{-m} A$  soit numériquement moindre que le coefficient correspondant de  $A$  sans cependant être nul. Le groupe ne peut être fini à moins de contenir des transformations du 2<sup>e</sup> ordre.

22) Un groupe fini devant toujours renfermer une transformation du 2<sup>e</sup> ordre, nous pouvons supposer que  $A$  est une transformation de cet ordre et se présente sous la forme :

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iay \end{cases},$$

où  $a$  et  $b$  sont réels. On peut aussi supposer que le premier coefficient, dans toutes les transformations du 2<sup>e</sup> ordre du groupe, est nul ou qu'il ne l'est pas. Examinons d'abord le dernier cas en choisissant  $A$  de manière que  $a > 0$ , et que sa valeur numérique soit la plus petite qu'il puisse avoir dans une transformation du 2<sup>e</sup> ordre appartenant au groupe.

Nous formerons maintenant  $AB^m AB^{-m} A$ , qui est aussi une transformation du 2<sup>e</sup> ordre ( $A$  transformée par  $AB^m$ ). Le premier coefficient de cette transformation est :

$$ia(-a^2 - b^2(\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m}) + b^2)$$

et on doit alors avoir :

$$|a| \leq |a(-a^2 - b^2(\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m}) + b^2)|,$$

à moins que :

$$-a^2 - b^2(\alpha^{2m} + \bar{\alpha}^{2m} - 1) = 0.$$

On a  $a^2 + b^2 = 1$  et, en posant  $a = \cos u + i \sin u$ , on aura ou :

$$-1 + 4b^2 \sin^2 mu = 0 \tag{49}$$

ou :

$$|-1 + 4b^2 \sin^2 mu| \geq 1, \tag{50}$$

équations qui doivent être satisfaites par toutes les valeurs de  $m$ .

Comme  $|b| < 1$  et que  $m$  peut toujours être choisi de manière que  $|\sin mu| > 0$ , on tire de (50) :

$$|\sin mu| > \sqrt{\frac{1}{2}},$$

ou de (49) :

$$|\sin mu| > \frac{1}{2}.$$

Si  $B$  est une transformation d'ordre  $n$ ,  $\sin \frac{\pi}{n}$  sera la plus petite valeur numérique de  $\sin mu$ . On doit donc toujours avoir :

$$\sin \frac{\pi}{n} > \frac{1}{2}, \quad n < 6.$$

Un groupe fini, si  $|a| > 0$ , peut donc au plus renfermer des transformations du 5<sup>e</sup> ordre.

Si toutes les transformations du 2<sup>e</sup> ordre appartenant au groupe sont de la forme :

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ay \\ \mu y' = -ax \end{cases}$$

les points doubles de  $A$  et de  $B$  seront harmoniques, et l'on voit facilement que le groupe

sera un groupe cyclique qui ne renferme pas d'autres transformations que celles de la forme  $B^p$  et  $B^q A$ .

23) Aperçu des groupes possibles.

- A) Toutes les transformations sont des puissances de la même transformation.  
 B) Le groupe renferme des transformations avec des points doubles différents.
- 1) Groupes cycliques. Ils se composent des puissances d'une transformation  $A$  d'ordre  $n$  et de  $n$  transformations du 2<sup>e</sup> ordre qui permutent les points doubles de  $A$ .
  - 2) Groupes qui renferment plusieurs transformations d'un ordre plus élevé que le 2<sup>e</sup>, avec des points doubles différents.
    - a) Groupes tétraédriques, qui se composent d'une transformation du 3<sup>e</sup> ordre avec des séries de 8 transformations, et d'une transformation du 2<sup>e</sup> ordre avec une série de 3 transformations.  $N = 12$ .
    - b) Groupes octaédriques, qui renferment une transformation du 4<sup>e</sup> ordre avec des séries de 9 transformations, une du 3<sup>e</sup> ordre avec des séries de 8 transformations, et une du 2<sup>e</sup> ordre avec une série de 6 transformations.  $N = 24$ .
    - c) Groupes icosaédriques, qui comprennent une transformation du 5<sup>e</sup> ordre avec des séries de 24 transformations, une du 3<sup>e</sup> ordre avec des séries de 20 transformations, et une du 2<sup>e</sup> ordre avec une série de 15 transformations.  $N = 60$ .
- 24) Formation des groupes cycliques.  
 25) Groupe tétraédrique. Il contient une transformation du 2<sup>e</sup> ordre:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iay \end{cases}$$

et une transformation:

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \bar{a}y \end{cases} \quad a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

$BA$  aussi bien que  $B^2A$  doit être du 3<sup>e</sup> ordre, puisque  $A$  ne permute pas les points doubles de  $B$ . On a par suite:

$$a = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad b = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Au groupe appartiennent toutes les transformations de la forme:

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{i\alpha^p \sqrt{3}}{3} x + \frac{i\alpha^q \sqrt{6}}{3} y \\ \mu y' = \frac{i\bar{\alpha}^p \sqrt{6}}{3} x - \frac{i\bar{\alpha}^q \sqrt{3}}{3} y. \end{cases}$$

On voit que le groupe est fini puisque le produit des transformations des formes que nous considérons ici présente une de ces formes.

26) Groupe octaédrique. Il est déterminé par les deux transformations:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = iax + iby \\ \mu y' = ibx - iay \end{cases}$$

et:

$$B = \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \bar{a}y, \end{cases} \quad \text{où } a = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}.$$

$BA$  et  $B^3A$  doivent être du 3<sup>e</sup> ordre et  $B^2A$  du 4<sup>e</sup>. On trouve  $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Le groupe renferme, outre  $B$ , toutes les transformations de la forme:

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{a^p i \sqrt{2}}{2} x + \frac{a^q i \sqrt{2}}{2} y \\ \mu y' = \frac{\bar{a}^q i \sqrt{2}}{2} x - \frac{\bar{a}^p i \sqrt{2}}{2} y, \end{cases}$$

où  $p + q$  est un nombre pair et:

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = a^r y \\ \mu y' = -\bar{a}^r x. \end{cases}$$

Le groupe est fini, car les produits des transformations des formes dont il s'agit ici donnent des transformations qui ont les mêmes formes.

27) Groupe icosaédrique. Nous supposons toujours que le groupe renferme les deux transformations:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = i a x + i b y \\ \mu y' = i b x - i a y \end{cases}$$

et:

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = a x \\ \mu y' = \bar{a} y, \end{cases} \quad a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Nous pouvons avoir ici  $BA$  du 5<sup>e</sup> ordre et  $B^2A$  du 3<sup>e</sup> ou l'inverse. On aura alors, en prenant  $a$  négatif, ou:

$$a = \frac{-\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10}$$

ou:

$$a = \frac{-\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10} \quad \text{et} \quad b = \pm \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10}.$$

En prenant les premières valeurs de  $a$  et de  $b$ , nous pouvons montrer que le groupe, outre  $B$  et ses puissances, renferme toutes les transformations de la forme:

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{-i\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10} a^p x - \frac{i\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10} a^q y \\ \mu y' = \frac{-i\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10} \bar{a}^q y + \frac{i\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10} \bar{a}^p y, \end{cases}$$

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = \frac{-i\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10} a^p x + \frac{i\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10} a^q y \\ \mu y' = \frac{i\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10} \bar{a}^q y + \frac{i\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10} \bar{a}^p y \end{cases}$$

et:

$$E \equiv \begin{cases} \mu x = a^p y \\ \mu y = -\bar{a}^p x. \end{cases}$$

On voit, comme dans les deux cas précédents, que le groupe est fini, la multiplication de deux transformations des formes ci-dessus donnant une transformation qui a une de ces formes.



IV. Groupes finis des transformations du plan (ou Groupes finis des transformations de 2 variables).

28) Les transformations du plan ont en général 3 points doubles et 3 lignes doubles. Il peut cependant arriver que deux des multiplicateurs sont égaux. Dans ce cas, les transformations sont dites perspectives. Toutes les lignes qui passent par un de leurs points doubles sont des lignes doubles, et tous les points de la ligne double qui ne passe pas par ce point double sont des points doubles. Le point et la ligne en question sont appelés le centre perspectif et l'axe perspectif de la transformation. Le produit de deux transformations perspectives donne une transformation qui a un point double à l'intersection des axes perspectifs, et une ligne double dans la ligne qui joint les centres perspectifs.

Nous montrerons d'abord qu'il n'existe pas de groupes qui se composent exclusivement de transformations perspectives, à moins que toutes les transformations du groupe n'aient trois points doubles communs.

Etant donné deux transformations perspectives  $A$  et  $B$  où la ligne des centres est  $x=0$  et l'intersection des axes  $x=0$ ,  $y=0$ , et où le centre perspectif de  $A$  est  $x=0$ ,  $y=0$ , elles seront représentées par les équations:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = a^2 z \end{cases} \quad \text{et} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

où  $B$  a encore un multiplicateur égal à  $a_1$ . Mais  $AB$  ne peut pas alors être une transformation perspective, à moins que  $A$  et  $B$  n'aient trois points doubles communs. Par conséquent, si toutes les transformations du groupe n'ont pas trois points doubles communs, le groupe doit renfermer des transformations qui ne sont pas perspectives, et nous pouvons lui appliquer les propositions développées dans les chapitres I et II.

29) Cherchons maintenant si un groupe fini peut renfermer des transformations de la forme:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{et} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

ou:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{et} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x \\ \mu y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

ou, en d'autres termes, si un élément d'un déterminant d'une transformation peut être nul sans que le sous-déterminant correspondant le soit.

Il nous suffira de considérer le premier cas,  $B$  transformant les coordonnées d'une ligne droite à l'aide d'une transformation de la forme  $B'$ .

On trouve qu'un groupe fini ne peut contenir des transformations de la forme  $A$  et  $B$ , car il devrait alors aussi renfermer une transformation de la forme:

$$\begin{aligned} \mu x' &= x + qy + rz \\ \mu y' &= y \\ \mu z' &= z. \end{aligned}$$

30) Nous supposons toujours dans ce qui suit que le groupe renferme une transformation qui n'est pas perspective, et dont les points doubles coïncident avec les points fondamentaux du système des coordonnées.

De même nous nous bornerons, dans ce qui suit, à désigner les transformations par leurs déterminants.

Nous savons, d'après les §§ 14 et 29, que, dans chaque transformation :

$$B \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (69)$$

chaque élément est le conjugué de son sous-déterminant avec le signe + ou —.

Les multiplicateurs sont déterminés par l'équation :

$$\mu^3 - (a_1 + b_2 + c_3)\mu^2 + (A_1 + B_2 + C_3)\mu - 1 = 0 \quad (70)$$

et comme :

$$a_1 + b_2 + c_3 = \bar{A}_1 + \bar{B}_2 + \bar{C}_3,$$

cette équation montre que les multiplicateurs de  $B$  sont déterminés par  $a_1 + b_2 + c_3$ , qu'on appelle la somme principale de la transformation. Les points doubles de celle-ci sont déterminés par les équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_3 + \mu^{\frac{1}{2}}c_1} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_3 + \mu^{\frac{1}{2}}c_2} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_3 - (a_1 + b_2)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_1 - (b_2 + c_3)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_1 + \mu^{\frac{1}{2}}a_2} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_1 + \mu^{\frac{1}{2}}a_3} \\ \frac{x}{\mu^{-\frac{1}{2}}A_2 + \mu^{\frac{1}{2}}b_1} &= \frac{y}{\mu^{-\frac{1}{2}}B_2 - (a_1 + c_3)\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{\mu^{-\frac{1}{2}}C_2 + \mu^{\frac{1}{2}}b_3} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

où  $\mu$  est une racine de (70). Ces 3 groupes d'équations deviennent identiques en  $y$  remplaçant  $\mu$  par sa valeur, mais nous les emploierons tous les trois dans ce qui suit.

31) Nous montrerons maintenant que, dans un groupe fini, les éléments de chaque transformation sont les conjugués de leurs sous-déterminants.

Suivant le § 14, tous les éléments d'une ligne doivent être les conjugués de leurs sous-déterminants avec le même signe que les éléments correspondants d'une autre ligne, ou ils doivent avoir tous un signe contraire. Les éléments du terme principal sont tous les conjugués de leurs sous-déterminants avec le signe +, et deux éléments symétriques par rapport au terme principal sont les conjugués de leurs sous-déterminants avec le même signe. S'il y a maintenant dans  $B$  ( $B$  ayant le même signification que dans 30)) un élément qui est le conjugué de son sous-déterminant avec le signe —, il doit y avoir des lignes où se trouvent deux éléments semblables.

Nous pouvons supposer que la ligne supérieure en est une, et on a alors :

$$|a_1|^2 - |b_1|^2 - |c_1|^2 = 1$$

et par conséquent :

$$|a_1| > 1.$$

Soit  $A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases}$  une transformation du groupe et formons  $A^m B A^{-m} B^{-1}$ ,

le premier élément en sera  $|a_1|^2 - \alpha^m \bar{\beta}^m |b_1|^2 - \alpha^m \bar{\gamma}^m |c_1|^2$ .

Si nous posons maintenant:

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos t + i \sin t \\ \beta &= \cos u + i \sin u \\ \gamma &= \cos v + i \sin v \end{aligned}$$

la partie réelle du premier élément sera:

$$a = |a_1|^2 - \cos m(t-u) |b_1|^2 - \cos m(t-v) |c_1|^2.$$

On peut toujours choisir  $m$  de façon que  $a$  soit plus grand que  $|a_1|^2$  et, par conséquent, que la partie réelle de  $a_1$ , d'où il suit que le groupe ne peut être fini.

32) Recherche des conditions que doivent remplir les éléments de  $B$ .

Ces conditions, à savoir que  $a_1, b_2, c_3$  doivent être les conjugués de leurs sous-déterminants, sont indépendantes les unes des autres. Mais nous montrerons que, en donnant  $a_1, b_2, c_3$ , on détermine déjà par là si les autres éléments peuvent être ou non les conjugués de leurs sous-déterminants.

L'équation (70) donne:

$$\mu^{\frac{3}{2}} - (a_1 + b_2) \mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{-\frac{1}{2}} b_3 = \mu^{-\frac{3}{2}} - (A_1 + B_2) \mu^{-\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{1}{2}} c_3$$

et comme les quantités de chaque côté du signe  $=$  sont conjuguées, elles sont toutes deux réelles. Les dénominateurs à trois termes des équations (71) sont donc réels. Si, dans les deux premières lignes de (71), on multiplie l'un par l'autre le premier et le dernier rapport, il vient:

$$(\mu^{-\frac{1}{2}} A_3 + \mu^{\frac{1}{2}} c_1) (\mu^{-\frac{1}{2}} C_1 + \mu^{\frac{1}{2}} a_3) = \text{une quantité réelle.} \quad (73)$$

On a en outre:

$$b_2 = \left| \begin{array}{cc} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \bar{a}_1 & \bar{c}_1 \\ \bar{a}_3 & \bar{c}_3 \end{array} \right|$$

et comme  $\bar{a}_1 \bar{c}_3 = A_1 C_3$ , on aura aussi:

$$A_3 C_1 = \bar{a}_3 \bar{c}_1 \quad (74)$$

et les équations analogues.

De (73) on déduit alors:

$$c_1 C_1 + a_3 A_3 = \text{une quantité réelle.}$$

Mais il résulte de (74) que:

$$c_1 C_1 a_3 A_3 = \text{une quantité réelle positive,}$$

et, les éléments du terme principal étant les conjugués de leurs sous-déterminants, il s'ensuit par conséquent que  $c_1 C_1$  et  $a_3 A_3$  sont des quantités réelles ou imaginaires conjuguées. Si  $c_1 C_1$  est réel, cette condition, jointe aux précédentes et à celle que  $|a_1|, |b_2|, |c_3|$  sont tous plus petits que 1, est suffisante pour qu'on puisse donner à la transformation la forme mentionnée au § 31. Il est en effet facile d'en conclure que le produit de chaque élément par son sous-déterminant est une quantité réelle. Si quelques-uns de ces produits étaient négatifs, les trois quantités  $|a_1|, |b_2|, |c_3|$  ne pourraient pas toutes être plus petites que 1.

On peut du reste calculer facilement  $c_1 C_1$  et trouve:

$$c_1 C_1 = \frac{1 - |a_1|^2 + |b_2|^2 - |c_3|^2 \pm R}{2},$$

où

$$R = \sqrt{1 + \Sigma |a_1|^4 + 4(a_1 b_2 c_3 + \bar{a}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_3) - 2(\Sigma |a_1|^2 + \Sigma |a_1|^2 b_2^2)}.$$

33) Passant maintenant à la composition des transformations qui ont les mêmes points doubles, nous pourrions nous borner à considérer le cas de deux transformations  $A$  et  $B$  de l'ordre  $p^{a_1}$  et  $p^{a_2}$ ,  $p$  étant un nombre premier, et arrivons alors au résultat suivant: si les transformations avec les mêmes points doubles ne sont pas toutes des puissances d'une seule et même transformation, on peut, lorsque  $a_2 \leq a_1$ , supposer  $B$  choisie de façon qu'elle ne soit pas égale à une puissance de  $A$ , ou à une puissance de  $A$  multipliée par une transformation d'un ordre inférieur à  $p^{a_2}$ ; le produit des puissances de  $A$  et de  $B$  donnera alors  $p^{a_1+a_2}$  transformations, parmi lesquelles se trouveront toutes les transformations de l'ordre  $p^{a_2}$  avec les points doubles donnés. En général, on voit donc que si des transformations ayant les mêmes points doubles ne sont pas toutes des puissances de la même transformation, elles peuvent être formées en multipliant deux transformations et leurs puissances.

34) En supposant toujours que les groupes ne se composent pas uniquement de transformations avec des points doubles communs, nous examinerons à présent ceux qui renferment des transformations perspectives d'un ordre plus élevé que le 2<sup>e</sup>.

Supposons d'abord que le groupe renferme des transformations perspectives du 6<sup>e</sup> ordre ou au-dessus. S'il en contient deux avec des centres différents, ces transformations et le groupe formé par leur combinaison laisseront la ligne des centres comme elle est. Le groupe étant du 6<sup>e</sup> ordre ou au-dessus par rapport à cette ligne, il devra être cyclique relativement à la même ligne, et l'axe de l'une des transformations passera par le centre de l'autre. Il est alors facile de voir, en supposant que les points doubles de l'une des transformations du groupe coïncident avec les points fondamentaux du système des coordonnées, que le groupe ne peut avoir que des transformations de la forme:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} \\ \mu x' = ax & \mu x' = ax & \mu x' = py \\ \mu y' = \beta y & \mu y' = bz & \mu y' = qz \\ \mu z' = \gamma z & \mu z' = cy & \mu z' = rx \end{array} \right\} \quad (76)$$

ou les transformations qu'on obtient en permutant  $x, y, z$ . Nous appelons ces groupes des groupes cycliques du plan.

35) Si le groupe renferme des transformations perspectives du 5<sup>e</sup> ordre, il doit être cyclique ou aussi contenir 2 transformations  $B$  et  $C$  de la même espèce, avec des centres différents et d'une nature telle que le groupe formé par  $B$  et  $C$  ne transforme pas la ligne des centres et soit icosaédrique par rapport à cette ligne.

$A$  et  $B$  peuvent s'écrire sous la forme:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = a^2 y \\ \mu z' = \bar{a}z \end{cases} \quad \text{et} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = b_2 x + c_2 y \\ \mu z' = b_3 x + c_3 y \end{cases}$$

et le groupe renfermera alors une transformation qui permute les points doubles de  $A$  et, par conséquent, aussi:

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}x \\ \mu y' = \bar{a}y \\ \mu z' = a^2 z \end{cases} \quad \text{et} \quad AD \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^2 x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = az. \end{cases}$$

La transformation qui permute les points doubles de  $A$  doit avoir la forme :

$$E \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a}^p x \\ \mu y' = c_2 z \\ \mu z' = b_3 y \end{cases} \text{ pour } c_2 b_3 = -a^p.$$

$E^{10}AD$  est donc une transformation perspective du 10<sup>e</sup> ordre. Suivant le § 34, toutes les transformations du groupe doivent laisser la même ligne droite comme elle est.

36) Supposons maintenant que le groupe renferme des transformations perspectives du 4<sup>e</sup> ordre. Comme auparavant, on voit que le groupe doit être ou cyclique, ou renfermer deux transformations perspectives du 4<sup>e</sup> ordre, et telles que le groupe formé par leur combinaison transforme la ligne des centres par un groupe octaédrique. Les transformations  $A$  et  $B$  ayant la même forme que dans 35), le groupe doit renfermer une transformation :

$$\begin{aligned} \mu x' &= \frac{1}{\mu} x \\ \mu y' &= iy \\ \mu z' &= iz \end{aligned}$$

et on en conclut que, dans un groupe fini, l'intersection des axes de deux transformations perspectives du 4<sup>e</sup> ordre et la ligne qui en joint les centres, seront toujours respectivement le centre et l'axe d'une nouvelle transformation perspective du 4<sup>e</sup> ordre.

Le groupe octaédrique de la ligne droite ne contient que 3 transformations du 4<sup>e</sup> ordre avec des points doubles différents. On voit donc que l'axe d'une transformation perspective du 4<sup>e</sup> ordre appartenant à une groupe fini, ne peut au plus être coupé qu'en 6 points différents par les axes des autres transformations analogues du groupe. Mais on peut montrer que si les transformations du groupe ne laissent pas toute la ligne droite sans changement (ou si le groupe n'est pas cyclique), chacun des axes ci-dessus mentionnés sera coupé au moins en 7 points par les autres axes. Par conséquent, toutes les transformations du groupe doivent laisser une ligne droite comme elle est.

37) Nous arrivons maintenant aux groupes qui renferment des transformations perspectives du 3<sup>e</sup> ordre. Prenons un groupe contenant deux de ces transformations mises sous la forme :

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a} x \\ \mu y' = a^2 y \\ \mu z' = \bar{a} z \end{cases} \text{ et } B \equiv \begin{cases} \mu x' = \bar{a} x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

où  $a$  est une racine 9<sup>e</sup> de l'unité, et considérons le cas où la ligne des centres,  $x = 0$ , n'est pas transformée par un groupe tétraédrique,  $AB$  doit alors aussi être une transformation perspective du 3<sup>e</sup> ordre, car autrement  $AB$  serait du 2<sup>e</sup> ordre pour  $x = 0$  et  $(AB)^2$  une transformation perspective du 6<sup>e</sup> ordre.  $A^2B$  sera donc du 2<sup>e</sup> ordre par rapport à  $x = 0$  et  $(A^2B)^2$  une transformation perspective du 2<sup>e</sup> ordre avec  $x = 0$  pour axe.

L'intersection des axes de deux transformations perspectives du 3<sup>e</sup> ordre et la ligne qui en joint les centres, sont donc respectivement le centre et l'axe d'une autre transformation perspective du 3<sup>e</sup> ordre, en tant que le centre de l'une des deux premières transformations ne se trouve pas sur l'axe de l'autre.

On peut aussi montrer que l'intersection des axes de deux transformations perspectives respectivement du 2<sup>e</sup> et du 3<sup>e</sup> ordre, dont le centre de l'une n'est pas situé sur l'axe de

l'autre, doit être le centre d'une transformation perspective du 3<sup>e</sup> ordre dont l'axe est la ligne des centres des deux premières, et que cette ligne n'est pas transformée par les transformations d'un groupe cyclique.

Mais on peut montrer qu'il n'y a que des groupes dont les transformations ne transforment pas une ligne droite. Car autrement, par tous les centres des transformations perspectives du 3<sup>e</sup> ordre, situés sur  $x = 0$ , et par les points en lesquels ces centres peuvent être transformés, devraient passer deux lignes qui sont des transformations de  $x = 0$ . Si le groupe renfermait  $N$  transformations, le nombre de celles qui ne transforment pas  $x = 0$  serait, avec les transformations de leurs séries, représenté par  $\frac{53}{72}N$ , et si le groupe était possible, on aurait  $N = 216$ , et le nombre des autres transformations du groupe devrait être  $\frac{7}{27}N$ , ce qui, on le voit, est impossible.

38) Cherchons maintenant si des groupes dont les transformations ne transforment pas toutes la même ligne droite, et qui ne sont pas cycliques, peuvent renfermer deux transformations  $A$  et  $B$  avec des points doubles différents, et telles qu'elles aient une puissance commune, qui alors devra être une transformation perspective du 2<sup>e</sup> ordre.

$A$  et  $B$  peuvent se mettre sous la forme :

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = a_1 x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

Comme conséquence de ce que nous savons des groupes de la ligne droite, et vu que les groupes ne doivent pas renfermer des transformations perspectives d'un ordre plus élevé que le deuxième,  $\alpha$  et  $a_1$  doivent l'un et l'autre être égaux à  $\pm 1$ . Au cas que les transformations d'un groupe non cyclique ne transforment pas  $x = 0$ , il faut que  $\alpha$  et  $a_1$  correspondent à  $+1$ , soit parce que, sans cela, le groupe devrait renfermer des transformations perspectives d'un ordre plus élevé que le deuxième, soit parce que, si un groupe octaédrique ne fait pas varier  $x = 0$ , le nombre des transformations qui ne font pas varier  $x = 0$  serait, avec les transformations de leurs séries, représenté au moins par  $\frac{35}{48}N$ ; or on voit que  $N$  doit être égal à 48, et que toutes les transformations du groupe doivent ne pas transformer  $x = 0$ .

39) En partant toujours de l'hypothèse que le groupe n'est pas cyclique, et que ses transformations ne laissent pas toutes la même droite comme elle est, nous allons chercher dans quelles circonstances une transformation  $A$ , avec les multiplicateurs  $\alpha, \beta, \gamma$ , peut être transformée par une autre transformation  $B$  du groupe en une transformation ayant les mêmes points doubles que  $A$ .

Il peut se présenter les cas suivants :

1) Les points doubles de  $A$  ne sont pas déplacés par la transformation dont il s'agit.  $A$  et  $B$  doivent avoir des points doubles communs. Elles peuvent être l'une et l'autre des puissances de la même transformation, ou des puissances de la même transformation multipliée par une transformation perspective du 2<sup>e</sup> ordre ayant les mêmes points doubles que  $A$  et  $B$ .

2)  $B$  peut permuter deux des points doubles de  $A$ . Les multiplicateurs de  $A$  doivent être  $\pm 1, \alpha, \pm \bar{\alpha}$ .

3)  $B$  peut déplacer circulairement les points doubles de  $A$ .  $B^3$  doit alors avoir pour points doubles ceux de  $A$ , et par suite être une transformation identique.  $B$  est du 3<sup>e</sup> ordre.

Supposons qu'on ait:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = ax \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases}$$

en déplaçant circulairement les points doubles de  $A$ , il vient:

$$A' \equiv \begin{cases} \mu x' = \beta x \\ \mu y' = \gamma y \\ \mu z' = az \end{cases}$$

On voit facilement qu'il nous suffira de discuter le cas où  $A$  et  $A'$  appartiennent au même groupe fini, et où  $A$  est de l'ordre  $p^a$ ,  $p$  étant un nombre premier;  $A'$  doit alors être une puissance de  $A$  ou une puissance de  $A$  multipliée par une transformation du 2<sup>e</sup> ordre.

Laissant de côté le cas de  $p = 2$ , nous devons avoir:

$$\begin{aligned} a &= \beta^m f \\ \beta &= \gamma^m f \\ \gamma &= a^m f \end{aligned} \quad \text{où } f = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

et, comme  $a \cdot \beta \cdot \gamma = 1$ ,

$$1 = a^{m^3-1} f^{m^2+m+1}.$$

En faisant  $p = 3$ , nous voyons que cette dernière équation ne peut être satisfaite que si  $a = 1$ , car elle est impossible pour  $a = 2$  et, par conséquent, pour de plus grandes valeurs de  $a$ . Si  $p$  n'est pas égal à 3, on aura  $1 = a^{m^3-1}$ , ce qui fait voir que  $p$  doit être un nombre premier de la forme  $3q + 1$ .

Une transformation dont les points doubles sont déplacés circulairement par une autre transformation d'un groupe fini doit être d'un ordre  $n$ ,  $n$  pouvant renfermer les facteurs 2, 3 et des facteurs premiers de la forme  $3q + 1$ . Si  $A$  est de l'ordre  $2n$ , et qu'aucune transformation d'un ordre plus élevé n'ait les mêmes points doubles que  $A$ , il y aura en tout  $4n$  transformations avec les points doubles de  $A$ .

40) Voyons maintenant combien de transformations renferment divers sous-groupes avec leurs séries.

Soit toujours  $N$  le nombre des transformations d'un groupe. S'il n'est rien dit de contraire, on suppose toujours qu'une transformation  $A$  est d'un ordre aussi élevé ou plus élevé que toute autre transformation ayant les mêmes points doubles que  $A$ . Supposons d'abord que le groupe ne renferme pas de transformations avec des points doubles différents et une puissance commune, et que l'ordre  $n$  de  $A$  soit impair. De même que dans le § 18, on trouve que  $A$ , avec ses séries, renferme respectivement  $\frac{n-1}{n}N$ ,  $\frac{n-1}{2n}N$  et  $\frac{n-1}{3n}N$  transformations, suivant qu'il n'y a pas de transformation qui permute les points doubles de  $A$ , ou qu'il y en a une qui en permute deux, ou enfin qu'il y en a une qui les déplace circulairement.

Si  $n = 3$ , les points doubles peuvent à la fois être déplacés circulairement et permutés deux à deux. Dans ce cas,  $A$  avec ses séries renferme  $\frac{N}{9}$  transformations, et doit avoir les multiplicateurs  $1, \alpha, \bar{\alpha}$ , si deux de ses points doubles sont permutés.

41) Supposons maintenant  $A$  d'ordre pair. S'il y a des transformations ayant les mêmes points doubles que  $A$  et qui ne sont pas des puissances de  $A$ , elles doivent être une puissance de  $A$  multipliée par une transformation du 2<sup>e</sup> ordre, car autrement le groupe renfermerait des transformations perspectives d'un ordre plus élevé que le 2<sup>e</sup>. Nous pouvons, dans ce cas, supposer que toutes les transformations avec les mêmes points doubles que  $A$  sont formées par le produit des puissances de :

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{par} \quad A' \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = y \\ \mu z' = -z \end{cases}$$

et que  $A$  est de l'ordre  $2n$ , où  $n$  est impair, puisque autrement le groupe renfermerait des transformations perspectives d'un ordre plus élevé que le 2<sup>e</sup>.

Si  $A$  est une transformation d'ordre pair dont les points doubles sont permutés par une transformation  $B$ , examinons le cas où  $A$  est de la forme :

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = -x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = -az. \end{cases}$$

La transformation qui permute les points doubles de  $A$  peut alors avoir la forme :

$$B \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = az \\ \mu z' = \mp ay. \end{cases}$$

Nous prendrons pour  $B$  le signe supérieur, car sinon  $AB$  serait une transformation ayant les mêmes propriétés que  $B$  et son premier multiplicateur  $+1$ . On voit alors (ce que je n'ai pas fait observer dans le texte danois), qu'une transformation de la forme  $A$  dont les points doubles sont permutés par une autre transformation du groupe, ne peut se trouver que dans des groupes qui ont des transformations avec des points doubles différents, mais avec une puissance commune,  $B^2$  ayant les mêmes points doubles que  $A$ .

On peut du reste procéder comme dans le § 40, en prenant pour l'ordre de  $A$  le nombre des transformations qui ont les mêmes points doubles que  $A$ .

42) Nous passerons maintenant à l'examen du nombre des transformations dans des séries appartenant à des sous-groupes dont les transformations ont une puissance commune, et dont aucune ne transforme une ligne droite  $x = 0$ .

Deux transformations d'un pareil sous-groupe seront de la forme :

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \pm x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = \pm az \end{cases} \quad \text{et} \quad B \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = b_2 y + c_2 z \\ \mu z' = b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$



Si le sous-groupe, en ce qui concerne  $x = 0$ , n'est pas cyclique, il faut prendre le signe supérieur, et le nombre des transformations qui ne transforment pas  $x = 0$  sera, avec leurs séries, de  $\frac{2q-1}{2q}N$ ,  $q$  étant au moins égal à 12.

Si le sous-groupe est cyclique,  $A$  de l'ordre  $2q$  et qu'on prenne le signe supérieur, ce nombre sera de  $\frac{4q-1}{4q}N$ .

Si le sous-groupe est cyclique et si l'on prend le signe inférieur de  $A$ , mais qu'il n'existe aucune transformation du 2<sup>e</sup> ordre qui ait les mêmes points doubles que  $A$  sans être une puissance de  $A$ ,  $A$  doit être de l'ordre  $8q$ , car si  $n$ , étant l'ordre de  $A$ , n'était divisible que par 2 ou par 4, ou aucune puissance de  $A$  ne serait du 2<sup>e</sup> ordre avec  $x = 0$  pour axe perspectif, ou une puissance de  $A$  serait une transformation perspective du 4<sup>e</sup> ordre.  $A^{2m+1}B$  et  $(A^{2m}B)^2$  peuvent appartenir à la même série. Le nombre des transformations qui ne transforment pas  $x = 0$  est, avec leur séries, d'au moins  $\frac{12q-1}{16q}N$ .

Les mêmes considérations s'appliquent au cas d'une transformation du 2<sup>e</sup> ordre qui a les mêmes points doubles que  $A$  sans être une puissance de  $A$ ;  $A$  doit alors être de l'ordre  $2q$ ,  $q$  étant impair, et il y a en tout  $4q$  transformations avec les mêmes points doubles que  $A$ . Le nombre des transformations qui, avec leurs séries, ne transforment pas  $x = 0$  est au moins égal à  $\frac{6q-1}{8q}N$ . Ce chiffre cesse d'être exact si  $q = 3$ , et une autre transformation déplace circulairement les points doubles de  $A$ . Dans ce cas,  $A$ ,  $A^{2m}B$  et leurs séries forment  $\frac{29}{72}N$  transformations.

Nous voyons ainsi que, dans tous les cas où l'on prend pour  $A$  le signe supérieur, le nombre des transformations qui ne transforment pas  $x = 0$  sera, avec leurs séries, de  $\frac{p-1}{p}N$ ,  $p$  étant au moins égal à 8. Si  $p > 8$ , le groupe ne peut renfermer que les transformations ci-dessus avec leurs séries, et aucune d'elles ne transforme la droite  $x = 0$ .

Si  $p = 8$ , le groupe peut encore renfermer une transformation du 3<sup>e</sup> ordre dont les points doubles sont à la fois déplacés circulairement et permutés deux à deux. On a alors :

$$\frac{7}{8}N + \frac{1}{9}N + 1 = N \quad \text{et} \quad N = 72$$

et le groupe existe réellement. Il renfermera comme sous-groupe un groupe pour lequel  $N = 36$ .

Lorsqu'on prend pour  $A$  le signe inférieur, nous avons vu que le nombre des transformations qui, avec leurs séries, ne transforment pas  $x = 0$  est au moins de  $\frac{6q-1}{8q}N$  si  $q$  est autre que 3, et de  $\frac{29}{72}N$  si  $q = 3$ . Des considérations analogues à celles que nous exposerons plus loin montrent que, dans les deux cas, il n'y a que des groupes dont aucune transformation ne transforme la même droite, ou des groupes cycliques.

43) Voyons maintenant d'une manière générale quels sont les groupes qui ne renferment pas de transformations ayant des points doubles différents, mais une puissance commune. Appelant  $N\Sigma^{\frac{n-1}{n}}$  le nombre des transformations dont les points doubles ne sont permutés par aucune autre transformation du groupe,  $N\Sigma^{\frac{n_1-1}{2n_1}}$  le nombre des transformations dont deux points doubles sont permutés,  $N\Sigma^{\frac{n_2-1}{3n_2}}$  le nombre des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement, et enfin  $\frac{qN}{9}$  le nombre des transformations dont les points doubles sont à la fois permutés et déplacés circulairement, on aura:

$$N\left(\Sigma^{\frac{n-1}{n}} + \Sigma^{\frac{n_1-1}{2n_1}} + \Sigma^{\frac{n_2-1}{3n_2}} + \frac{q}{9}\right) + 1 = N \quad (79)$$

ou :

$$\frac{1}{N} = 1 - \Sigma^{\frac{n-1}{n}} - \Sigma^{\frac{n_1-1}{2n_1}} - \Sigma^{\frac{n_2-1}{3n_2}} - \frac{q}{9} \quad (80)$$

équation qui donne la proposition suivante:

Le nombre des transformations d'un groupe fini est égal au plus petit multiple commun des ordres des transformations du groupe, ou à ce nombre multiplié par 2, 3 ou 6. On voit en même temps que ces facteurs ne peuvent intervenir que si le groupe renferme des transformations dont deux points doubles seulement sont permutés par une autre transformation du groupe, ou des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement, ou enfin des transformations de ces deux espèces à la fois. (81)

Nous pouvons nous borner à examiner les groupes qui renferment des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement, ceux où cela n'a pas lieu devant renfermer le même nombre de transformations de divers ordres que les groupes de la ligne droite. La proposition ci-dessus fournit un très bon moyen pour juger de la possibilité des groupes.

Si le groupe n'est pas cyclique, il doit au moins renfermer deux transformations  $A$  et  $B$  du même ordre  $n$  avec des points doubles différents. Cette dernière condition étant remplie,

$$B, ABA^{-1} \dots A^{n-1}BA^{-n+1}$$

seront en général des transformations toutes différentes, et deux ou trois d'entre elles seulement pourront avoir les mêmes points doubles, si  $A$  ou une puissance de  $A$  permute ou déplace circulairement les points doubles de  $B$ . En pareil cas, ces transformations auront deux par deux ou trois par trois des points doubles communs.

La groupe renfermera alors au moins  $n+1$ ,  $\frac{n}{2}+1$ ,  $\frac{n}{3}+1$  transformations avec des points doubles différents appartenant à la même série, c'est-à-dire, outre celles ci-dessus mentionnées,  $A$ , qui, avec ses séries, se compose au moins de

$$(n-1)(n+1), \quad (n-1)\left(\frac{n}{2}+1\right), \quad (n-1)\left(\frac{n}{3}+1\right)$$

transformations.

Le nombre de transformations dans la même série devant être de  $\frac{n-1}{n}N$ ,  $\frac{n-1}{2n}N$ ,  $\frac{n-1}{3n}N$ ,  $N$  doit être égal à ou plus grand que :

$$n(n+1), \quad n(n+2), \quad n(n+3).$$

44) Groupes renfermant des transformations dont les points doubles ne sont pas permutés par une autre transformation du groupe.

Le seul cas possible est celui où le groupe, outre les transformations ci-dessus, renferme des transformations du 3<sup>e</sup> ordre dont les points doubles sont déplacés circulairement. On doit alors avoir :

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{n} - \frac{q}{9},$$

équation qui est satisfaite par :

$$n = 4 \text{ et } q = 2, \quad \text{ou } n = 8 \text{ et } q = 1.$$

On verra qu'il existe réellement un groupe, pour lequel  $N = 36$ , qui renferme des transformations du 4<sup>e</sup> ordre dont les points doubles ne sont pas permutés, et en outre deux séries de transformations du 3<sup>e</sup> ordre dont les points doubles sont à la fois permutés et déplacés circulairement.

45) Groupes ne renfermant que des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement par d'autres transformations du groupe.

On trouve que ces groupes ne sont possibles qu'à condition d'être cycliques.

46) Groupes renfermant trois séries différentes de transformations dont les points doubles sont permutés par d'autres transformations, et en outre des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement.

Il n'existe aucun groupe fini de cette espèce.

47) Groupes renfermant deux transformations avec leurs séries dont deux points doubles sont permutés par d'autres transformations du groupe.

On a l'équation :

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1-1}{2n_1} - \frac{n_2-1}{3n_2} - \frac{q}{9}, \quad (83)$$

laquelle est satisfaite par  $n = 3$ ,  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 7$  et  $q = 0$ , qui appartiennent à un groupe existant réellement et pour lequel  $N = 168$ . (84)

L'équation est également satisfaite, le terme en  $n_2$  manquant, par  $n = 4$ ,  $n_1 = 5$  et  $q = 2$ ;  $N = 360$ . (86)

47 bis) Enfin le groupe pourrait renfermer une transformation avec ses séries dont les points doubles sont permutés, et des transformations dont les points doubles sont déplacés circulairement.

Il n'existe pas de pareils groupes.

Nous donnerons quelques exemples comme preuves de l'impossibilité des groupes, lorsque les nombres des transformations dans les séries appartenant au groupe satisfont à l'équation (80), sans cependant que le groupe existe.

L'équation : 
$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n_1-1}{2n_1} - \frac{q}{9}$$

est satisfaite par  $n = 8$ ,  $n_1 = 10$ ,  $q = 1$ ,  $N = 720$ . Le groupe devrait renfermer 36 transformations du 10<sup>e</sup> ordre avec des points doubles différents. On voit alors qu'il

devrait exister deux pareilles transformations  $A$  et  $B$ , telles que  $A^5$  et  $B^5$ , qui sont du 2<sup>e</sup> ordre, permutassent les points doubles de  $B$  et de  $A$ . Ni  $A$  ni  $B$  ne transformeront alors la même section conique, et le groupe ne peut être fini, car, comme il est facile de voir, les groupes dont aucune des transformations ne transforme la même section conique, sont des transformations des groupes de la ligne droite.

La même équation est satisfaite par  $n = 3$ ,  $n_1 = 8$ ,  $q = 2$ ,  $N = 144$ .

Le groupe doit renfermer seulement 9 transformations du 8<sup>e</sup> ordre avec des points doubles différents, et par conséquent seulement 9 transformations du 2<sup>e</sup> ordre. Mais une transformation  $A$  du 8<sup>e</sup> ordre aura alors ses points doubles permutés par  $B^4$ ,  $B$  étant également une transformation du 8<sup>e</sup> ordre, et, dans ce cas,  $A^8 B^4$  sera aussi une transformation du 2<sup>e</sup> ordre, de sorte qu'il y aura 8 transformations de cet ordre dont les centres seront situés sur une des lignes doubles  $D$  de  $A$ . Mais comme  $B$  a un point double  $P$  situé sur  $D$ ,  $D$  pourra être transformé en 4 lignes différentes passant par  $P$ , et le groupe, contrairement à l'hypothèse, devrait alors renfermer plus de 9 transformations du 2<sup>e</sup> ordre.

On peut assez souvent employer le raisonnement suivant. La seule transformation qui puisse avoir des points doubles coïncidant avec des points doubles d'autres transformations qui n'ont aucun point double commun, est une transformation du 2<sup>e</sup> ordre. L'axe de cette transformation du 2<sup>e</sup> ordre passe alors par les points doubles communs ci-dessus mentionnés. Si maintenant l'on désigne par  $P$  et  $Q$  deux points doubles de deux transformations qui n'en ont aucun de commun, et qu'il puisse être prouvé que trois transformations  $A$ ,  $B$ ,  $C$  du 2<sup>e</sup> ordre permutent  $P$  et  $Q$ ,  $AB$  et  $AC$  doivent être deux transformations du 2<sup>e</sup> ordre dont les axes coïncident. Mais deux pareilles transformations ne peuvent appartenir à un groupe fini.

On prouvera de la même manière l'impossibilité d'un groupe pour lequel  $N = 36$ , qui renferme trois séries de transformations du 2<sup>e</sup> ordre, deux séries de transformations du 3<sup>e</sup> ordre, et où les ordres des transformations appartenant aux différentes séries satisfont à l'équation:

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{n-1}{2n} - \frac{n-1}{2n_1} - \frac{n_2-1}{2n_2} - \frac{q}{9}$$

où  $n = n_1 = n_2 = q = 2$ .

48) Pour qu'une transformation ne transforme pas une section conique, il faut que la somme principale<sup>1)</sup> soit nulle. On voit que l'équation:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = ay \\ \mu z' = az \end{cases}$$

ne transforme pas la section conique:

$$ax^2 + byz = 0,$$

et qu'une pareille section conique est tangente aux lignes doubles  $y = 0$ ,  $x = 0$ , et passe par les points doubles  $(x = 0, y = 0)$ ,  $(x = 0, z = 0)$ .

<sup>1)</sup> C'est-à-dire la somme des éléments du terme principal.

Il est facile de voir que la condition ci-dessus, qui ici s'est montrée suffisante, est également nécessaire. Il faut cependant se rappeler que la somme principale n'est déterminée qu'à un facteur près, qui est une racine cubique arbitraire de l'unité, de sorte que les transformations dont la somme principale est une quantité réelle multipliée par une racine cubique de l'unité, ne transforment pas non plus une section conique; mais la transformation est alors identique à une transformation avec un terme principal réel.

49) Dans toute transformation du 2<sup>e</sup> ordre, les éléments du terme principal doivent être réels. Réciproquement, cette condition, avec les suivantes, à savoir que chaque élément est le conjugué de son sous-déterminant, et que la somme principale doit être égale à  $-1$ , est suffisante pour que la transformation soit du 2<sup>e</sup> ordre.

50) Si un groupe renferme les transformations:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \beta y \\ \mu z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{et} \quad B \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

et qu'on désigne respectivement par  $d$  et  $s_p$  les sommes principales de  $A$  et de  $A^p B$ , on aura:

$$\alpha^p a_1 + \beta^p b_2 + \gamma^p c_3 = s_p.$$

En supposant que  $A$  n'est pas une transformation perspective, et en éliminant  $a_1, b_2, c_3$  entre les 4 équations qui donnent les valeurs de  $s_p, s_{p+1}, s_{p+2}, s_{p+3}$ , il vient:

$$s_p - s_{p+3} = \bar{d} s_{p+1} - d s_{p+2}. \quad (90)$$

Si  $B$  est du 2<sup>e</sup> ordre, on doit, suivant le § 49, avoir  $s_p = s_{n-p}$ .

51) Formons maintenant les groupes qui existent réellement et commençons par ceux du 3<sup>e</sup> ordre, en rappelant qu'un groupe est du même ordre que l'ordre le plus élevé de ses transformations. Nous laisserons de côté les groupes cycliques et ceux dont aucune des transformations ne transforme la même ligne droite.

Nous supposons que le groupe du 3<sup>e</sup> ordre renferme deux transformations, dont une,  $A$ , du 3<sup>e</sup> ordre et l'autre,  $B$ , du 2<sup>e</sup> ordre, et que tous les coefficients de  $B$  sont réels. On a alors:

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = \alpha y \\ \mu z' = \bar{\alpha} z \end{cases} \quad B \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

On doit donc avoir:

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 + c_3 &= -1 \\ a_1 + \alpha b_2 + \bar{\alpha} c_3 &= 0 \\ a_1 + \bar{\alpha} b_2 + \alpha c_3 &= 0 \end{aligned}$$

et par suite:

$$\begin{aligned} a_1 = b_2 = c_3 &= -\frac{1}{3} \\ b = c_1 = c_2 &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Aucune des transformations du groupe ne transforme la section conique:

$$x^2 + 2yz = 0.$$

Une ligne droite pouvant par inversion et projection être transformée en une section conique arbitraire, on voit qu'à chaque transformation linéaire qui ne transforme pas une ligne droite, correspond une transformation qui ne transforme pas une section conique. A chaque groupe fini de la ligne droite correspond un groupe du plan, dont les transformations ne transforment pas une section conique et ne peuvent qu'en transformer chaque point en un nombre fini de points. Mais le groupe doit alors aussi être fini pour le plan.

Le groupe que nous venons de déterminer correspond au groupe tétraédrique, et s'appelle le groupe tétraédrique du plan.

52) Passons maintenant aux groupes du 4<sup>e</sup> ordre. En supposant que le groupe renferme deux transformations  $A$  et  $B$  de la même forme que dans le § 51, avec la seule différence que  $A$  est du 4<sup>e</sup> ordre, nous aurons pour  $B$ ,  $AB$ ,  $A^2B$ ,  $A^3B$  une colonne de sommes principales qui sera ou:

$$\begin{array}{l} \text{a) } a_1 + b_2 + c_3 = -1 \\ a_1 + ib_2 - ic_3 = 0 \\ a_1 - b_2 - c_3 = 1 \\ a_1 - ib_2 + ic_3 = 0 \end{array} \quad \text{ou:} \quad \begin{array}{l} \text{b) } a_1 + b_2 + c_3 = -1 \\ a_1 + ib_2 - ic_3 = \alpha^p \\ a_1 - b_2 - c_3 = 0 \\ a_1 - ib_2 + ic_3 = \bar{\alpha}^p. \end{array}$$

où  $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ .

53) Dans le cas de a), on a:

$$a_1 = 0, \quad b_2 = c_3 = -\frac{1}{2}, \quad b_1 = c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Ni  $A$  ni  $B$  ne transforment  $x^2 + 2yz = 0$ . Le groupe formé par  $A$  et  $B$  est une transformation du groupe octaédrique, et s'appelle le groupe octaédrique du plan.

54) Dans le cas de b), on a:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2}, & b_2 &= \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}, & c_3 &= \frac{-1 - \sqrt{3}}{4} \\ b_1 &= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{8}}, & c_1 &= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{8}}, & c_2 &= \sqrt{\frac{3}{8}}. \end{aligned}$$

En désignant par  $C \equiv 1$  que  $C$  est une transformation identique, on aura:

$$A^4 \equiv 1, \quad (AB)^4 \equiv 1, \quad (A^2B)^3 \equiv 1, \quad B^2 \equiv 1 \quad (a).$$

Supposons qu'on a formé la transformation:

$$BA^pBA^qB,$$

ce produit peut, dans tous les cas, être réduit à renfermer un facteur  $B$  plus petit. Si  $p$  ou  $q$  est égal à 2, on peut poser:

$$BA^2B \equiv A^2BA^2$$

et l'on a:

$$BA^2BA^qB \equiv A^2BA^{q+2}B.$$

Si  $p$  et  $q$  sont l'un et l'autre égaux à 1 ou à 3, la seconde équation (a) donnera:

$$BA^pBA^qB \equiv A^{4-p}BA^{4-p}.$$

Si  $p = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$  et  $q = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$ , on aura:

$$BA^pBA^qB \equiv A^qBA^qBA^{2q}B \equiv A^qBA^{q+2}BA^2.$$

On voit par là que tout produit de transformations qui renferme plus de deux facteurs  $B$  peut être réduit à renfermer au plus deux facteurs. Toutes les transformations du groupe sont comprises dans les formes  $A^m$ ,  $A^p B A^q$ ,  $A^p (A B A B) A^q$ , où  $A B A B$  a la forme:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}, & \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}} \left( \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} \right), & -\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}} \left( \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} \right) \\ \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{8}} \left( \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} \right), & \frac{-1-\sqrt{3}}{4}, & -i\sqrt{\frac{3}{8}} \\ -\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{8}} \left( \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} \right), & i\sqrt{\frac{3}{8}}, & \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}$$

Ce groupe est celui qui est mentionné au § 44; il renferme 36 transformations.

55) L'équation (90) montre que le groupe du paragraphe précédent doit être un sous-groupe du groupe du 8<sup>e</sup> ordre mentionné au § 44, en tant que ce dernier existe, et il est facile de voir par là qu'il n'est pas fini.

Par contre, le groupe du § 54 est un sous-groupe du groupe dont il est question au § 42, car en ajoutant aux transformations ci-dessus mentionnées du groupe du § 54 une transformation  $C$  de la forme:

$$C \equiv \begin{cases} \mu x' = x \\ \mu y' = pz \quad \text{où } pq = -1 \\ \mu z' = qy \end{cases}$$

on aura alors  $CA \equiv A^{-1}C$  et, si l'on pose  $p = \frac{i\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$  et  $q = \frac{i\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$ , il viendra  $CBC^{-1} \equiv ABAB$ .

On peut toujours, dans un produit  $A^p C^q B \dots$  faire passer  $C$  à la première place, et on voit alors que, si le groupe du § 54 renferme les transformations  $T_1, T_2 \dots$ , celui dont il s'agit ici renfermera les transformations  $T_1, T_2 \dots CT_1, CT_2 \dots$ , en tout 72 transformations.

56) Nous arrivons maintenant aux groupes du 5<sup>e</sup> ordre. Ils peuvent renfermer:

- des transformations du 2<sup>e</sup>, du 3<sup>e</sup> et du 5<sup>e</sup> ordre, ou
- des transformations du 2<sup>e</sup>, du 3<sup>e</sup>, du 4<sup>e</sup> et du 5<sup>e</sup> ordre.

Dans le premier cas, en supposant toujours que les groupes renferment deux transformations  $A$  et  $B$ ,  $A$  du 5<sup>e</sup> et  $B$  du 2<sup>e</sup> ordre, on peut avoir, suivant (90),  $s$  étant égal à  $-1$  et  $d$  à  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , ou:

$$s_1 = s_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad s_2 = s_3 = 0$$

ou: 
$$s_1 = s_4 = 0, \quad s_2 = s_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On obtiendra le même groupe, soit qu'on prenne la première ou la seconde colonne des sommes principales. En prenant la seconde, on trouve:

$$a_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad b_2 = c_3 = -\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \quad b_1 = c_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad c_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

De ce que ni  $A$  ni  $B$  ne transforment  $x^2 + 2yz = 0$ , il résulte que le groupe est fini; c'est le groupe icosaédrique du plan.

57) Dans le cas de b), l'équation (90) montre qu'on peut avoir les colonnes suivantes de sommes principales:

$s$	$=$	$-1$	$-1$	$-1$	$-1$
$s_1$	$=$	$0$	$d_1$	$a^p d$	$a^p$
$s_2$	$=$	$d$	$0$	$a^p$	$\overline{a^p} d_1$
$s_3$	$=$	$d$	$0$	$\overline{a^p}$	$a^p d_1$
$s_4$	$=$	$0$	$d_1$	$\overline{a^p} d$	$\overline{a^p}$

et:

$s$	$=$	$1$	$d$	$d_1$
$s_1$	$=$	$a^p d_1$	$1$	$0$
$s_2$	$=$	$\overline{a^p} d$	$0$	$1$
$s_3$	$=$	$\overline{a^p} d$	$0$	$1$
$s_4$	$=$	$a^p d_1$	$1$	$0$

où  $p = 1$  ou  $2$ ,  $a = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ,  $d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $d_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

Peu importe quelles sont les colonnes d'où l'on part, supposé qu'on n'arrive pas à un sous-groupe, ce qui est le cas avec les deux premières. Nous partons donc de la 3<sup>e</sup> en posant  $p = 1$ . Il est maintenant facile de montrer qu'on peut trouver toutes les sommes principales possibles des transformations du groupe, en appliquant la proposition que la transformée d'une transformation ne fait pas varier la somme principale.

$C = s$  signifie ici que la transformation  $C$  a  $s$  pour somme principale.

Etant donné:

$$\begin{aligned} B &= -1 \\ AB &= ad \\ A^2 B &= a \\ A^3 B &= \overline{a} \\ A^4 B &= \overline{ad}. \end{aligned}$$

On a  $BA^2 B = d_1$ ,  $A^2 BA^2 B = -\overline{a}$  et, suivant le § 49,  $A^4 BA^2 B = ad_1$ , puisque  $A^2 BA^2 B$  est du deuxième ordre. L'équation (90) donne alors:

$$\begin{aligned} BA^2 B &= d_1 \\ ABA^2 B &= a \\ A^2 BA^2 B &= -\overline{a} \\ A^3 BA^2 B &= 1 \\ A^4 BA^2 B &= ad_1. \end{aligned}$$

Dans le texte danois, p. 193 et 194, on trouvera des tableaux de tous les produits de 4 facteurs et de quelques-uns de 6 facteurs.



Nous montrerons maintenant que le groupe est fini. Si l'on a un produit:

$$A^p B A^q B A^r B A^s \dots$$

on peut d'abord supposer que deux exposants qui se suivent,  $q$  et  $r$ , ne sont pas égaux, puisque le nombre des facteurs du produit pourrait alors être réduit,  $A^m B$  étant au plus du 5<sup>e</sup> ordre. De plus, à cause de la relation:

$$A^2 B A^2 B A^2 \equiv B A^3 B$$

qui est une conséquence de  $(A^2 B)^4 \equiv 1$ , on peut faire disparaître tout facteur  $A^3$  placé entre deux facteurs  $B$ , pour que les exposants  $q$  et  $r$  puissent l'un et l'autre être considérés comme différents de 3.

Nous pouvons à présent montrer qu'aucun produit ne peut renfermer plus d'un certain nombre de facteurs sans être réductible.

En effet, si un produit renfermait une infinité de facteurs sans pouvoir être réduit, les facteurs  $A$ ,  $A^2$ ,  $A^4$  devraient s'y trouver, car s'il ne contenait que deux de ces facteurs, il serait réductible, puisqu'on a  $(A^p B A^q B)^m \equiv 1$ , si  $m$  est au plus égal à 5.

Si le produit n'est pas réductible, il doit donc renfermer un des facteurs suivants:

- 1)  $B A^4 B A^2 B A B$
- 2)  $B A^4 B A B A^2 B$
- 3)  $B A B A^2 B A^4 B$
- 4)  $B A B A^4 B A^2 B$
- 5)  $B A^2 B A B A^4 B$
- 6)  $B A^2 B A^4 B A B$ .

En remplaçant  $B A^2 B$  par  $A^3 B A^3 B A^3$ , on voit de suite que 2) et 5) peuvent être réduits à renfermer un facteur  $B$  de moins.

Si dans 1) on fait précéder  $B A^4$  d'un facteur  $B A^l$ ,  $l$  doit être égal à 1, car on voit immédiatement que  $l$  ne peut être égal à 4, et s'il était égal à 2, on aurait:

$$\dots B A^2 B A^4 B A^2 B A B \dots \equiv B A^2 B A^2 B A^3 B A^4 B \dots$$

qui est réductible. Il faut donc que  $l = 1$ , si quelque facteur  $B A^l$  précède  $B A^4$ , et on aura alors la transformation:

$$\dots B A B A^4 B A^2 B A B \dots$$

produit qui, à son tour, peut être précédé d'un facteur  $B A^k$ , où  $k = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$ ; mais, dans les deux cas, la transformation est réductible. On a en effet ou:

$$\dots B A^4 B A B A^4 B A^2 B A B \dots \equiv B A^4 B A B A^2 B A^3 B A^4 B \dots \equiv \dots B A^4 B A^4 B A^3 B A B A^4 B \dots$$

ou bien:

$$\dots B A^2 B A B A^4 B A^2 B A B \dots \equiv \dots A^3 B A^3 B A^4 B A^4 B A^2 B A B \dots$$

Dans les deux cas, on voit que les transformations sont réductibles.

Par conséquent, 1) ne peut être précédé de facteurs renfermant  $B$  autres que  $B A$ , sans que la transformation soit réductible. On voit de même que 3) ne peut être suivi de facteurs renfermant  $B$  autres que  $A B$ , comme aussi qu'aucun facteur renfermant  $B$  ne peut être ajouté avant ou après 4) ou 6) sans que la transformation soit réductible. Mais il suit de là que le groupe est fini.

On trouvera p. 197 du texte danois un certain nombre de relations qui servent à réduire des produits de transformations à leur forme la plus simple, et p. 198 un schéma

de toutes les transformations d'un groupe sous la forme la plus simple. On voit par ce schéma que ce groupe renferme 360 transformations.

58) Il nous reste à considérer un groupe du 7<sup>e</sup> ordre. Nous supposons comme d'habitude que le groupe renferme deux transformations  $A$  et  $B$ ,  $A$  du 7<sup>e</sup> et  $B$  du 2<sup>e</sup> ordre, avec des coefficients réels. On a alors :

$$A \equiv \begin{cases} \mu x' = \alpha x \\ \mu y' = \alpha^2 x \\ \mu z' = \alpha^4 x \end{cases}$$

où  $\alpha$  est une racine imaginaire arbitraire du 7<sup>e</sup> ordre de l'unité. Posons :

$$d = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$$

on aura par suite :

$$d + \bar{d} = -1 \quad \text{et} \quad d\bar{d} = 2.$$

En multipliant  $B$  par des puissances de  $A$ , on obtient, suivant (90), les colonnes possibles de sommes principales qui suivent :

$s$	$-1$	$-1$	$-1$
$s_1$	$\bar{d}$	$0$	$1$
$s_2$	$1$	$\bar{d}$	$0$
$s_3$	$0$	$1$	$d$
$s_4$	$0$	$1$	$\bar{d}$
$s_5$	$1$	$d$	$0$
$s_6$	$d$	$0$	$1$

On verra qu'il y a dans le groupe des transformations qui, multipliées par des puissances de  $A$ , donnent toutes trois colonnes de sommes principales.

Si l'on suppose que  $B$ , par sa multiplication par des puissances de  $A$ , donne des transformations dont les sommes principales forment la deuxième colonne, on aura :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-(\alpha + \bar{\alpha})}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\alpha + \alpha + 1)} = p \\ b_2 &= \frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + 1}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\alpha + \alpha + 1)} = q \\ c_3 &= \frac{-1}{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)(\alpha + \alpha + 1)} = r \end{aligned} \tag{95}$$

$p, q, r$  seront déplacés circulairement si, à la place de  $\alpha$ , on met  $\alpha^2$  ou  $\alpha^4$ .  $p, q, r$  ont entre eux les relations suivantes :

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 \tag{96}$$

$$pq + qr + rp = 0 \tag{97}$$

$$\left. \begin{aligned} p^2 + p &= rq \\ q^2 + q &= rp \\ r^2 + r &= pq \end{aligned} \right\} \tag{98}$$

A l'aide de ces relations, on trouve :

$$B \equiv \begin{vmatrix} p & r & q \\ r & q & p \\ q & p & r \end{vmatrix}$$

$A^{-2}BA^3BA^{-2}$  est de la forme :

$$B' = \begin{vmatrix} q & p & r \\ p & r & q \\ r & q & p \end{vmatrix}$$

qu'on obtient de  $B$  par un déplacement circulaire de  $p, q, r$ . Le groupe doit alors aussi renfermer la transformation  $B''$ , qui s'obtient par un nouveau déplacement circulaire de  $p, q, r$ .  $BB'$  est de la forme :

$$D \equiv \begin{cases} \mu x' = y \\ \mu y' = z \\ \mu z' = x \end{cases}$$

et le groupe renferme donc aussi la transformation :

$$D' = \begin{cases} \mu x' = z \\ \mu y' = x \\ \mu z' = y \end{cases}$$

On pourrait maintenant montrer que le groupe peut renfermer des transformations de chacune des formes :

$$A^p, A^mBA^n, A^mB'A^n, A^mB^nA^n, DA^n, D'A^n,$$

où les valeurs de  $p, m, n$ , peuvent varier de 0 à 6, car en multipliant l'une par l'autre deux de ces transformations, on obtient encore une transformation d'une de ces formes. On trouvera p. 204 du texte danois un schéma des transformations que renferme le groupe ; il y en a 168.





# Cirolanidæ

et familiæ nonnullæ propinquæ

Musei Hauniensis.

---

Et Bidrag til Kundskaben om nogle Familier af isopode Krebsdyr

ved

**H. J. Hansen.**

---

Med 10 Kobbertavler.

Avec un résumé en français.

---

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. V. 3.



**Kjøbenhavn.**

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1890.



## I. Indledning.

I Aaret 1885 gennemgik jeg Universitetets Zoologiske Museums 3die Afdelings og Studiesamlingens Materiale af de Isopod-Familier, der ikke, saaledes som Ægider-Cymothoider og Land-Isopoder, vare blevne monografisk bearbejdede herhjemme i de senere Aar. Særlig i Studiesamlingens Materiale fandt jeg en Mængde Glas med *Cirolanidæ* og beslægtede Former, men det lykkedes mig kun at bestemme en lille Del deraf, og jeg maatte derfor anse en Mængde Arter for at være hidtil ubeskrevne. Ved en foreløbig Undersøgelse af Materialet stødte jeg paa flere meget interessante og for en større Del ubekjendte Uddannelsesformer af Svømmeben, ligesom jeg ogsaa fandt, at Munddelene, sete rent habituelt udvendig fra med en skarp Lupe, frembøde ypperlige Slægtsmærker og flere ikke tilstrækkelig kjendte Forhold. Jeg laante saa baade Studiesamlingens og 3die Afdelings Samling af disse Dyr hjem til monografisk Bearbejdelse. Jeg vil her aflægge Hr. Prof., Dr. Chr. Lütken og Hr. Inspektør, Dr. F. Meinert min bedste Tak for Laanet af og den frie Disposition over dette saa rige og interessante Materiale, samt for Exemplarer af de beslægtede Ægider og Cymothoider, de have overladt mig til Dissektion.

Af Arter, der ikke fandtes i denne Samling, har jeg kun haft og medtaget 2, nemlig *Cir. concharum* Stimps., som 3die Afdeling paa min Foranledning tilbyttede sig fra Hr. A. M. Norman, og *Conilera cylindracea* (Mont.), af hvilken vigtige Form jeg har kjøbt nogle Stykker af den zoologiske Station i Neapel. Desuden har jeg fra sidstnævnte Sted kjøbt nogle Stykker af *Cir. borealis* Lilljeb. og *Cir. neglecta* n. sp.; endelig har Hr. Dr. F. Hilgendorf ved Univ. zoologiske Museum i Berlin velvilligst overladt mig til Undersøgelse af Munddelene 2 Exemplarer af den mærkelige *Tachæa crassipes* Sch. & Mein., og herfor bringer jeg ham en varm Tak<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Efter Afhandlingens Udarbejdelse har Hr. Fabrikant Budde-Lund overladt mig en Del Hav-Isopoder, der sammen med Land-Isopoder vare sendte ham fra Museet i Moskou til Bearbejdelse. Dette Materiale indeholdt kun 5 herhen hørende Arter, af hvilke 1, der er ny, ikke er medtagen her, medens der lige før Trykningen er taget Hensyn til de andre 4 Arter. Materialet har paa et enkelt Punkt haft adskillig Betydning, da det viser, at de 2 fra gammel Tid opstillede, meget omskrevne og af mig selv for 1½ Aar siden med nogen Tvivl antagne Arter *Cirol. Cranchii* Leach og *Cir. Swainsonii* (Leach) falde sammen til 1 Art.

Under Studiet viste det sig efterhaanden, at Materialet var i de fleste Henseender langt rigere, end jeg fra først af havde antaget eller kunde haabe. 1) Først saaledes med Hensyn til Arternes Antal. Der er til Slutningen af 1887 beskrevet ialt fra hele Verden c. 43 Arter<sup>1)</sup> af de Familier, der her omhandles nærmere; mit Materiale indeholder 34 Arter, et relativt særdeles stort Antal, men heraf har jeg maattet anse 24 Arter for hidtil ubeskrevne og har altsaa kun haft 10 af de tidligere kjendte Arter. En større Del af de nye Arter, nemlig ialt 12, hidrøre med Sikkerhed eller stor Sandsynlighed fra Vestindien, særlig fra St. Thomas, fra hvilken Lokalitet man hidtil ikke kjendte noget Dyr af disse Slægter. 2) Dernæst med Hensyn til Typer for Slægter. Med Undtagelse af de 2 mærkelige, henholdsvis ved engelske og amerikanske Dybhavsundersøgelser erhvervede Former *Anuropus* Bedd. og *Bathynomus* A. Milne Edw., samt Slægten *Corilana* Kosm. (alle 3 Slægter opstillede hver paa 1 Exemplar) har jeg haft Repræsentanter for alle hidtil kjendte og desuden Typer for 2 nye og mærkelige Slægter. Herved er jeg bleven sat i Stand til at studere en Række Typer af Munddele og derved at paavise disses højst forskellige Uddannelse samt deres systematiske Værdi, og Resultaterne heraf ere, forekommer det mig, noget af det Vigtigste i denne Afhandling. 3) Endelig har de nævnte 34 Arter, der i Habitus ere temmelig ensformige, vist sig at frembyde en saadan Mængde af Arts- og Kjønsmærker og saa forskjellig Bygning af Munddele, Kropben, Hale og Haleben, Antenner o. s. v., at jeg ikke kjender nogen anden Afdeling indenfor Arthropoderne, der med et saa lille Antal af Arter kan fremvise en saadan Rigdom af Forskjelligheder, Kombinationer af Karakterer og mærkelige Uddannelser af enkelte Organer efter biologiske Forhold.

Jeg maa dog henlede Opmærksomheden paa en enkelt mindre heldig Egenskab ved Materialet. Ved Afhandlingens Udarbejdelse havde jeg af ikke mindre end 12 Arter kun set 1 Exemplar af hver Art, af 5 Arter kun 2 Exemplarer, af 6 Arter 3 Exemplarer, altsaa blev der kun 11 Arter, af hvilke jeg havde haft 4, flere eller mange Exemplarer; efter Undersøgelsen af Materialet fra Moskou ændredes disse Tal saaledes, at jeg af 11 Arter har haft 1 Exemplar, af 4 Arter 2 Exemplarer, af 7 Arter 3 Exemplarer, af de øvrige 12 Arter flere til mange Exemplarer. Kun af 10 Arter har jeg haft Hunner forsynede med Æggeplader. Af adskillige Arter har jeg sikkert ikke haft voxne Exemplarer. Dette ringe Individ-antal af saa mange Arter har selvfølgelig afsat adskillige, som jeg dog haaber sædvanlig mindre væsentlige Mangler i mit Arbejde. Jeg har saaledes af og til

<sup>1)</sup> Ved denne Sammentælling har jeg ikke medregnet de af Hesse beskrevne, vistnok ganske ukjendelige Arter og heller ikke et Par Arter, der af et Par andre Forfattere ere navngivne men ikke beskrevne. Da jeg ikke har kunnet forskaffe mig Lockingtons senere nævnte Arbejde, har jeg ikke kunnet have nogen Mening om der skulde skjule sig en herhen hørende Form under en af de af ham opstillede Æga-Arter.



ikke kunnet angive Maalet paa Arten efter udvoxne Stykker, jeg har ikke kunnet angive de sikkerlig tilstedeværende Kjønnsforskjelle i Antennulernes Bygning hos nogle Arter af *Eurydice*, heller ikke det fuldstændige Antal af Led i Antennulernes og Antennernes Svøber hos flere Arter, jeg har ved mange Arter ikke kunnet fremstille Kjønnsgriffen paa 2det Par Haleben hos den voxne Han m. m. Heldigvis ere disse Mangler i de fleste Tilfælde efter mit Skjøn ikke af væsentligere Betydning, i hvert Tilfælde har jeg overalt været i Stand til sikkert at adskille Arterne og fremstille en Række sikre og let opfattede Karakterer for hver, saa at jeg er temmelig vis paa, at man ikke blot vil kunne kjende de her fremstillede Arter sikkert fra hverandre, men at man ogsaa i næsten alle Tilfælde, ved at tage tilstrækkeligt Hensyn ikke alene til Diagnosens men ogsaa til de øvrige talrige, i Beskrivelser og Afbildninger viste Mærker, vil kunne kjende mine Arter fra dem, der hidtil kun kjendes efter daarlige Fremstillinger eller som endnu ikke ere beskrevne. — At dette Resultat i det mindste kan naas, forekommer det mig, at den fortræffelige G. O. Sars har vist i sine Arbejder over Mysider og Euphausider. — Det kan ogsaa fremhæves, at Undersøgelsen af de Arter, af hvilke jeg besad flere Exemplarer i forskjellige Aldere og af forskjelligt Kjøn, viste en udmærket Fasthed indenfor Arten af de Karakterer, som jeg har lagt Vægt paa til at gjøre Arten kjendelig.

Det kjøbenhavnske Museums Materiale er jo rigtignok meget stort, men at 24 af Arterne ere nye, og at Tallet af de hidtil kjendte Arter herved bliver forøget med c. 60 p. C., er et yderst paafaldende Forhold, som til en vis Grad har sin Grund i, at disse Dyr aldrig ere blevne monografisk bearbejdede. Alle Publikationer over de her behandlede Dyr ere af en temmelig lejlighedsvis Karakter, oftest en Beskrivelse af Udbyttet fra en enkelt Expedition, hvilket tilstrækkelig vil fremgaa af det følgende.

Mit Materiale og Literaturens Beskaffenhed peger hen paa, at enten maa en Mængde Arter være sjeldne med en temmelig indskrænket geografisk Udbredelse, eller ogsaa, og dette er maaske det sandsynligste, har man endnu ikke ret forstaaet at indsamle dem.

Slægten *Barybrotes* (1 Art), nogle Arter af *Eurydice*, 1 *Cirolana* og 1 *Corallana* ere tagne udelukkende pelagisk. Af de andre Arter er der adskillige, som ifølge deres Bygning ligesaa godt kunne leve et væsentlig pelagisk Liv som de ovennævnte Arter, men om adskillige af disse har jeg kun Opgivelser som: Brasilien, Vestindien, Yeddo-Bugten etc., af hvilket man intet kan skjønne med Sikkerhed. *Eurydice pulchra* findes (se senere) ved Strandbredden og træffes desuden ogsaa svømmende i de øverste Vandlag, maaske endog langt fra Kysten (ligesom de fleste andre pelagiske Dyr synes den især at træffes i de øvre Vandlag om Natten), og det er ikke usandsynligt, at adskillige af de andre her omhandlede Arter føre et lignende Liv. En Del Arter (særlig af Familien *Ciro-*

*lanidæ*) ere derimod sikkert **Bunddyr**, og de fleste træffes vist oftest paa faa Favne, medens andre træffes paa 25—300 Favne.

Ved at udføre min Bearbejdelse af «*Dijmphnas*» Krebsdyr erhvervede jeg mig en ny morfologisk Opfattelse af Malakostrakernes Kjøber. Jeg har nu forsøgt her at anvende de ved det nævnte Arbejde vundne Erfaringer og Resultater, hvilke have hjulpet mig til at finde og finde ud af ikke faa tidligere oversete eller mistydede Bygningsforhold. (Et Par mindre Ændringer i Tydningen af en Del af Kindbakkerne og 2det Kjøbepars 3die Led ville senere blive omtalte.) Munddelene viste sig at afgive udmærkede Familiekarakterer og til Dels ogsaa Slægtskarakterer, hvorfor jeg har lagt særlig Vægt paa at studere dem saa indgaaende som muligt. Da *Ægidæ* og *Cymothoidæ* efter min Opfattelse ere nær beslægtede med de her specielt behandlede Familier, fandt jeg det rigtigst ogsaa at studere Mundbygningen hos deres vigtigste Typer, for at kunne drage Paralleler, udføre Sammenligninger og skaffe Familiekarakterer. Da Fremstillingen af Mundbygningen udgjør en saa betydelig Del af mit Arbejde, har jeg skilt den ud fra den mere systematiske, artsbeskrivende Del og ladet den danne et Afsnit for sig selv. — Et komparativt Studium af Bygningen af Svælget og Formaven (der hos de blodsugende Former vistnok fungerer som Pumpe) har jeg maattet opgive, da mit Materiale af flere Grunde ikke egnede sig dertil.

Som ovenfor angivet er mit Arbejde kun baseret saa at sige paa et enkelt Museums Materiale, og der findes selvfølgelig i de udenlandske Museer en Række hidtil ubeskrevne og mig ukjendte Arter; ja af de hidtil beskrevne Arter kjender jeg jo knap en Fjerdedel af Selvsyn. En Monografi kan min Afhandling derfor ikke kaldes, men da den dog har et vist monografisk Tilsnit, har jeg ment, at det var rigtigst at samle en saavidt mulig fuldstændig Fortegnelse over Literaturen, at give en udførlig Citering af samme og Anførelse af alle hidtil beskrevne, mig ukjendte Arter. I sidstnævnte Henseende bliver Resultatet noget tarveligt, thi en Mængde Arter ere saa maadelig fremstillede, at jeg ikke har kunnet danne mig et klart Begreb om deres Affinitet til mine Arter, ja jeg er ikke engang altid vis paa, at min Henførelse til Slægt er rigtig. — Da *Ægider* og *Cymothoider* for nylig ere behandlede monografisk af Schiøtte og Meinert i et stort og pragtfuldt Arbejde, har jeg for disse 2 Familiers Vedkommende kunnet indskrænke mig til (Studiet af Mundbygningen fra regnet) at fremsætte nogle faa Bemærkninger.

Jeg har fundet det heldigst i et Kapitel for sig at gjøre Rede for «*Cymothoa-Gruppens*» (alle de her omtalte Dyr) Karakterer overfor andre Isopoder, for dens Inddeling i Familier og for de fundne Karakterer og deres Værdi. En Drøftelse af sidstnævnte Spørgsmaal træffes vel temmelig sjelden hos systematiske Forfattere, men den forekommer mig at kunne være meget vejledende, og den skaffer tillige en Art resumerende Oversigt, som Læseren ellers nøjsommelig maa udlede af den detaillerede Fremstilling. At denne Fremgangsmaade er noget vidtløftig og medfører en Del Gjentakelser, kan ikke nægtes,

men dens Fordele forekommer mig meget betydelige, naar man henter Karakterer fra en Mængde Bygningsforhold.

Dernæst maa det være mig tilladt at fremkomme med nogle Bemærkninger om Planen for Afbildningerne og om den ved deres Udfærdigelse benyttede Fremgangsmaade.

Ved Habitusfigurer af Arterne, sete ovenfra, har jeg oftest udeladt Kropbenene. Dette har for det første sin Grund i, at det er overordentlig vanskeligt og tidsslugende at fremstille Dyrene med Benene strakte ud paa en nogenlunde naturlig Maade, dels fordi det er vanskeligt at rette de korte, ofte stive Ben ud og holde dem fast, medens man tegner dem, dels fordi jeg, naar et Stykke af Benene skulde vises paa en nogenlunde tydelig Maade, maatte have gjort Omridset af Dyret betydeligt større, hvilket ogsaa vil fremgaa af de 3 Figurer (Tab. I, Fig. 1, Tab. IV, Fig. 5 og Tab. VIII, Fig. 1), der vise Kroppen med alle Benene. For det andet er Værdien af en Fremstilling af alle Kropbenene paa Dyr af denne og flere lignende Grupper (Sphæromer, Oniscer) oftest heller ikke synderlig stor, og den bliver her endnu mindre end sædvanlig, da jeg efter et nedefor udviklet Princip har fremstillet særskilt 3 Ben af næsten hver Art. Ved at tegne alle Habitusfigurer fra Ryggen med Kropben vilde jeg have opnaaet nogenlunde at give en Forestilling om de forskjellige Bens Længde i Forhold til Kroppen og i Forhold til hverandre indbyrdes, samt om de temmelig smaa Forskjelligheder i Benenes Længde fra Art til Art, altsammen under Forudsætning af, at jeg havde formaaet at strække alle Benene paa samme Dyr og tillige paa alle de andre Dyr ligemeget, thi ellers blev Billedet forkeert. Det vigtigste, jeg vilde have opnaaet, var at give Begreb om 6te Benpars Længde i Forhold til 7de Benpar, men dette kan nogenlunde udtrykkes i Ord og er i hvert Tilfælde formentlig for ringe en Grund til at bevirke, at c. 30 Tegninger skulde have været udførte i betydelig større Maalestok, særlig naar Arbejdet er saa vanskeligt at udføre. At Tegningerne, naar Benene vare paasatte, bleve smukkere og gjorde et mere levende Indtryk, forekommer mig her at være af ganske underordnet Betydning.

Tegningerne af alle de 4 Sæt Mundlemmer af et Dyr ere altid udførte med samme Forstørrelse, thi herved opnaaes at vise deres relative Størrelse, der er meget vexlende fra Familie til Familie.

Af de fleste Arter har jeg afbildet 2 det (naar det ikke var helt, det meget lignende 1ste), 5te og 7de Kropben fra Dyrets venstre Side, alle 3 Ben sete nedenfra og gjen-givne med samme Forstørrelsesgrad. Ved at bruge samme Forstørrelse vandt jeg det samme, som kort ovenfor er nævnt ved Omtalen af Munddelene; ved altid at bruge Ben af de samme Par fra venstre Side hos de forskjellige Arter og altid nedenfra, af andet Par fremadrettet, af de 2 andre Par tilbagerettede, har jeg opnaaet at lette Sammenligningen mellem de enkelte Arters Lemmebygning saa meget som muligt. — Noget lignende har

jeg forsøgt ved at skygge alle Figurer fra venstre Side og ved at tegne alle Profilfigurer af Arterne med Dyrenes højre Side opad, saa at Rygsiden vender mod Lyset. — For Valget af de 3 Benpar, der skulde afbildes, ligge følgende Betragtninger til Grund. 2det Benpar kan betragtes som en god Repræsentant for de 3 forreste Par, der sædvanlig ligne hverandre overmaade meget, og i Tilfælde af væsentligere Forskjelle viser 2det Par en Mellemform mellem 1ste og 3die Par. Naar Dyret har Benene indrettede til Brug ved Svømning, er 7de Par det, der er mest omdannet til dette Formaal; 5te Par danner en Mellemform mellem 4de Par, der atter viser lidt over mod de forreste Par, og 6te Par, der i sin Udvikling altid nærmer sig noget hen imod 7de Par, saa at det snart ligner dette, snart 5te Par mest. En Afbildning af 6te, ja endog af 4de Par kunde af og til have været ganske nyttig, men jeg har ment at burde begrænde mig; der er formentlig Afbildninger nok endda.

Det kan maaske forekomme En og Anden, at jeg gjør altfor meget Væsen af denne ved Afbildningerne fulgte Plan, men dels er det mig om at gjøre for min egen Skyld at lægge den klart frem, dels troer jeg, at man næppe tilstrækkelig stærkt kan henlede Andres Opmærksomhed paa de store Fordele, der vindes ved en saavidt mulig konsekvent Gjennemførelse af en ordentlig Plan, ved at tegne tilsvarende Figurer i samme Stilling og med Lyset fra samme Side (helst og naturligst fra venstre), ved Brug af samme Forstørrelsesgrad i en Række Tilfælde o. s. v. Hvis de karcinologiske Forfattere havde søgt at gennemføre en saadan Plan i deres Arbejder, havde disse oftest været langt bedre og i det mindste altid langt lettere at benytte, end de ere.

Fremgangsmaaden ved Udfærdigelsen af de fleste Tegninger er temmelig omstændelig, men den bør omtales lidt nærmere, da den næppe ellers er benyttet, og den forekommer mig at føre til gode Resultater. Som Exempel kan min Behandling af Kropbenene tjene. Efter forsigtig at have pillet dem ud af deres Leddehuler i «Epimererne», lægger jeg dem oftest i Vand for at blødgjøre Ledføjningerne og med en lille Pensel eller, om nødvendig, med en svag Ætskaliopløsning at rense dem og rette Svømmehaarene ud, hvis saadanne findes. Derpaa lægges de, naar de have Svømmehaar, i stærkt fortyndet Glycerin, endelig nogen Tid efter i ren Glycerin. (Mellemstadiet i det vandholdige Glycerin er nødvendigt, for at Svømmehaarene ikke skulle krølle eller slaa store Bugter.) Derpaa lægges Dækglas over, en Tegning udføres saa godt som muligt ved Hjælp af Prisme, og denne Konturtegning rettes og kompletteres ved Hjælp af gjennemfaldende Lys under det sammensatte Mikroskop. Derpaa udtages Benene af Glycerinen og skylles saa meget af, at den vedhængende Glycerin fjernes, medens Benenes Indre stadig maa være stærkt glycerinholdigt, for at de ikke skulle tørres ud og skrumpe ind; derpaa lægges de paa en Glasplade under stærk Forstørrelse paa et Præparermikroskop, og Tegningerne skygges saa efter disse Præparater, sete med paafaldende Lys fra

venstre Side. Denne Fremgangsmaade er baade benyttet ved Benene, ved Munddelene af de større Former, ved sidste Haleled med dets Uropoder o. s. v., og tillige i en noget simplificeret Form ved Fremstillingen af alle Habitusfigurer af større Arter samt af Hovedets Underside hos disse. Jeg nøjedes nemlig her med at imbibere Dyrene i hel Tilstand med Glycerin, derpaa at rense dem udvendig for denne Vædske og saa tegne dem. — Naar jeg, som jeg mener, har af en Mængde Legemsdele kunnet give Afbildninger, der ere bedre tegnede og især bedre skyggede end de, der findes i Literaturen paa lignende Omraader, saa beroer dette for en meget væsentlig Del paa Hensigtsmæssigheden af den nys beskrevne Præparerings-Methode.

---

Jeg vil bringe Carlsberg-Fondets Bestyrelse en varm Tak for at have tildelt mig en Understøttelse til dette Arbejde og derved hjulpet til at stille mig saaledes, at jeg i henvend et Par Aar har kunnet disponere over den særdeles betydelige Tid, det har krævet at udføre de c. 400 Afbildninger.

Endelig vil jeg bringe Hr. Dr. phil. R. S. Bergh min Tak for den Undersøgelse, han efter min Anmodning med største Imødekommenhed har foretaget af Tarmindholdet hos flere af de her behandlede Dyreformer.

---

## II. Historisk Oversigt.<sup>1)</sup>

H. Strøm (1762), Slabber (1778) og Montagu (1803) ere de første Iagttagere af Dyr af Cirolanernes Familie og have hver beskrevet 1 Art, men Montagu, der henførte sit Dyr til Slægten *Oniscus*, er den første, der benyttede den binære Nomenklatur i en bestemtere Form. Dernæst opstillede Leach (1815 og 1818) ikke mindre end 4 Slægter, nemlig *Cirolana*, *Nelocira*, *Conilera* og *Eurydice*, hver paa 1 Art; af disse Slægter ere de 3 vel funderede, men den fjerde, *Nelocira*, er i Følge Afbildningen af *N. Swainsonii* Leach og i Følge Miers' Undersøgelse af Leachs Original-exemplar samt mine egne Undersøgelser sikkerlig kun en Cirolana-Art, der er identisk med *C. Cranchii* Leach (se senere). Leachs Fremstilling er forøvrigt yderlig kort og ufuldstændig, men han har rigtig stillet sine Slægter nærved *Æga* og *Cymothoa*. — I 1834 blev en ny rigtignok yderst tvivlsom Art fra Brasilien beskrevet af Perty.

En væsentligere Forøgelse af Kundskaben faas først ved H. Milne-Edwards: *Histoire natur. d. Crustacés*, T. III, 1840. Forfatteren beskriver her 3 nye Arter af Slægten *Cirolana*, dog er den ene Art desværre ikke karakteriseret fuldt tilstrækkeligt, og en anden Art er sandsynligvis en *Corallana*. Han kjender ikke af Selvsyn Dyr af de øvrige af Leach opstillede Slægter, men udskriver nogenlunde fuldstændig sine Forgjængere. Endelig giver han en for sin Tid ret god, af et Par Afbildninger ledsaget Fremstilling (paa noget over 1 Side) af Slægten *Cirolana*'s ydre Bygning; Mundbygningen omtales derimod meget lidt. Han stiller de 4 kjendte Slægter sammen med Slægterne *Æga*, *Rocinela*, *Pterelas* og *Alitropus* i én Tribus: *Cymothoadiens errans*. Det tør maaske bemærkes, at Slægten *Conilera*, som han ikke havde set, efter Leach er anbragt forkert i hans Slægts-tabel, fordi han troede, at dens 3 forreste Benpar vare Krogben, hvilket de ikke ere. — Han beskriver ialt kun 7 Arter og nævner Perty's Art med stor Tvivl.

<sup>1)</sup> I denne Oversigt tages væsentlig kun Hensyn til de her mere monografisk behandlede Slægter. Ægide- og Cymothoide-Litteraturen omtales kun, naar den indeholder vigtigere Meddelelser om Mundbygningen eller om Dyrenes systematiske Stilling.

I 1849 gav H. Milne-Edwards i sin Bearbejdelse af Krebsdyrene i den illustrerede (Crochard's) Udgave af *Règne Animal* atter et nyt og vigtigt Bidrag til Kundskaben om disse Dyr, idet han paa Pl. 67 giver en Afbildning af *Cir. hirtipes* og 9 analytiske Kontur-Figurer af dens Antenner, Munddele og Ben. Desuden findes paa Pl. 65, 66 og 67 mange Figurer af Munddelene hos 5 Former af *Cymothoernes* og hos 2 af *Ægidernes* Familier, foruden en Mængde Figurer af Antenner samt af Krop- og Haleben hos de samme Dyr. Skjøndt maaske ikke en eneste eller i hvert Tilfælde yderst faa af disse talrige Figurer ere udtømmende eller fuldt nøjagtige i Enkelthederne, forekommer det mig dog, at den udmærkede Forfatter herved har fremmet Kjendskaben til disse Dyrs Bygning og særlig til deres Mundbygning meget betydelig. Han har ved Behandlingen af *Cymothorne* gjentagne Gange afbildet Hunnens mærkelige Kjæbefødder, men har i den tilhørende, lidt magre Text ikke givet nogen Forklaring af dette Lemmepar og heller ikke paavist Forskjellene mellem Han og Hun i det nævnte Organs Bygning.

I 1852 udkom Lilljeborg: *Norges Crustaceer*, i hvilken den interessante, ogsaa i danske Farvande forekommende Art *Cir. borealis* Lilljeb. for første Gang er beskrevet noget nærmere. (Den er allerede omtalt af H. Strøm.)

J. Dana opstiller 1852 i sin «On the Classification of the Crustacea Choristopoda» en tildels ny Systematik for Isopoderne, men den forekommer mig i mange Henseender uheldig. Han opstiller, hvad der her nærmest har Interesse, en Subtribus: *Cymothoidea*, hvortil han regner 3 Familier, *Cymothoidæ*, *Ægidæ* og *Sphæromidæ*. Familien *Ægidæ* deles atter i 2 Underfamilier: *Æginæ* og *Cirolaninæ*; til *Æginæ* henregnes *Æga* med Underslægtterne *Æga*, *Conilera* og *Rocinela*, dernæst *Acherusia* og *Pterelas*; til *Cirolaninæ* Slægtterne *Cirolana*, *Corallana* n. gen. og *Alitropus*. Slægten *Alitropus* er nærmest en *Rocinela*, *Conilera* nærmest en *Cirolana*, og en Række andre Indvendinger kunne gjøres baade imod Begrundelsen og Opstillingen af denne Systematik.

I Kjæmpeværket *Report Crust. Un. St. Explor. Exped.* (1853 og Atlas 1855) har J. Dana udførligere fremstillet den ovennævnte nye, udmærkede, men af Forfatteren selv maadelig begrundede Slægt *Corallana* paa Basis af én ny Art. Dernæst opstiller han 3 nye Arter af Slægten *Cirolana* fra forskellige tropiske og subtropiske Have, hvorved Kundskaben om Slægtens geografiske Udbredelse blev betydelig forøget. Dernæst beskriver han under Navnet *Æga multidigita* Dana et meget interessant Dyr, der staar nær ved, men i Følge Afbildningerne maa være artsforskjellig fra min nye Form *Alcirona insularis* n. gen., n. sp., endelig beskriver han under Navnene *Æga efferata* Dana og *Æga novizealandiæ* Dana 2 Arter, af hvilke den første maaske staar nær ved min *Lanocira Krøyeri* n. gen., n. sp., medens den anden forekommer mig ganske ubestemmelig. Forfatteren har saaledes haft et interessant og temmelig rigt Materiale, men hans Bearbejdelse er noget overfladisk. Beskrivelserne ere ikke synderlig gode, Afbildningerne hjælpe vel noget, men

man kan dog ikke altid gjenkjende Arterne sikkert. Om Mundbygning og lignende finere Bygningsforhold indeholder dette Afsnit af Værket intet af Interesse.

Stimpson beskrev (1853) 2 smukke, udprægede *Cirolana*-Arter (*C. concharum* og *C. polita*) fra Nord-Amerikas Vestkyst, men henførte dem uheldigvis til Slægten *Æga*, i hvilken Slægt de saa forbleve i godt 20 Aar.

Bleeker beskriver (1857) et Dyr, *Æga macronema* Blkr.; det er i Følge den ikke gode Fremstilling næppe en *Æga*, men muligvis en *Alcirona*; Miers anser det for en *Corallana*.

I 1866 publicerede J. C. Schiødte sin Afhandling: *Krebsdyrenes Suge-mund, I.* Heri behandles Mundbygningen hos en Række Typer af Isopoder, blandt andet ogsaa af *Cirolana* (og *Eurydice*), *Æga* og *Cymothoa* (3 Slægter). Da den giver en langt fyldigere og bedre Fremstilling af de nævnte 3 Typers Mundbygning end noget tidligere eller senere publiceret Arbejde, maa den omtales noget udførligere.

Foruden den speciellere Behandling af Isopodernes Mundbygning indeholder Arbejdet en Række langt videre gaaende Betragtninger og Theorier over Bygningen af Insekternes og Krebsdyrenes Hudskelet og særlig over deres Mundbygning; af disse Betragtninger forekomme nogle mig fortræffelige, medens jeg ikke kan slutte mig til andre, hvilket jeg ogsaa tidligere har udtalt i min Bearbejdelse af «Dijmphna»-Togtets Krebsdyr. Jeg maa atter berøre det her, fordi jeg i min senere Behandling af Munddelene hos de her fremstillede Former hylder en anden Betragtningssmaade af deres Sammensætning i morfologisk Henseende. For Kjæbeføddernes og Kjæbernes Vedkommende har jeg i mit nys nævnte Arbejde og særlig i Résuméet dertil udførlig fremstillet min Opfattelse af disse Organers Bygning hos forskellige Krebsdyr og blandt disse ogsaa et Par Isopoder; angaaende Kindbakkerne mener jeg, at hver kun er dannet af 1 Led, Palpen fraregnet, medens Schiødte (l. c. p. 174) mener, at hver Kindbakke bestaar af Hængsel, Skaft og Flige. Man kan vel ofte træffe bevægelige Fligdannelser paa Kindbakkens Corpus, men de ere efter min Mening æquivalente med de Fligdannelser, der udgaa som (ofte tilleddede) Sideforlængelser fra et Par af Leddene i Kjæber eller Kjæbefødder. Her, ved Behandlingen af en lille Isopod-Gruppe, kan jeg ikke gaa nærmere ind paa de Bygningsforhold, som træffes hos andre Crustaceer og hos Insekterne, og som nødvendigvis maa medtages i en fyldigere Behandling af disse og de andre af Schiødte omtalte, omfattende, morfologiske Spørgsmaal; jeg agter i et andet paabegyndt, væsentlig morfologisk Arbejde at underkaste disse Forhold en nærmere Drøftelse.

Schiødte underkaster *Cirolanernes*, *Ægernes* og *Cymothoernes* Mundbygning en ny Undersøgelse, beskriver og afbilder de enkelte Munddeles Form og Bygning, samt giver en ved flere Afbildninger oplyst, helt ny og i det hele fortræffelig Fremstilling af deres indbyrdes Lejring, deres Forhold til «Tungen», deres Funktion og Samvirken. Han paa-



viser, at Cirolanerne have en «Os sectorium», hvilket maaske kan oversættes ved «en Rovdyrmund», idet de, som han oplyser ved Fortællinger, leve af at æde Fiske. Dernæst vises, at Munden hos Æger og Cymothoer er en, hos de 2 Typer noget forskjellig, Sugemund; thi nogle Munddele ere indrettede til at frembringe et Hul i Fiskenes Hud, medens de andre slutte fast sammen til Dannelsen af et Sugerør. (Om Cymothoernes Levevis henvises dog til Behandlingen af Mundbygningen i denne Afhandling.) Han har saaledes fremstillet en rigelig Mængde, for største Delen nye Forhold i disse Dyrs Mundbygning, der her for første Gang blev behandlet med det Formaal at opklare Mund-Elementernes Lejrning og indbyrdes Samvirken, og siden Schiødtes nu 24 Aar gamle Afhandling har ingen indladt sig synderlig paa de nævnte Typers Mundbygning, hvilket vil fremgaa af det følgende.

Den saa forskjellige Mundbygning hos Cirolaner paa den ene og Æger-Cymothoer paa den anden Side har givet Anledning til, at Schiødte, saavidt jeg forstaaer hans Udtalelser, da hans Afhandling ikke indeholder nogen samlet systematisk Oversigt over alle Isopodernes Familier, anser Cirolanerne som de højeste Isopoder og vil have dem fjernede langt fra Æger-Cymothoer, med hvilke de af andre Forfattere ere forenede paa Grund af Ligheder, der efter hans Mening «høre hjemme indenfor de biologiske Tillempningers Kreds, men savne al typisk Charakter». Denne Mening kan jeg ikke slutte mig til, og foruden at henviser til min senere Behandling af Dyrenes Systematik skal jeg her anføre, at Schiødte ikke kjendte den her for første Gang nærmere fremstillede Mundbygning af *Corallana*, *Alcirona*, (*Tachaa*) og *Barybrotos*, hos hvilke Former Mundbygningen viser helt nye Modifikationer, af hvilke nogle kun træffes hos disse Typer, medens adskillige vise over mod Cirolanerne, andre over mod Æger og Cymothoer. Naar Schiødte saaledes ikke har kjendt disse Former, der danne Bindeleddene mellem de af ham undersøgte Typer, kan man godt forstaa, at han ikke har villet følge Forfatterne i at henføre Cirolanerne til Cymothoiderne. Da Schiødte skrev sit Arbejde, ejede Museets 3die Afdeling yderst lidt og tilmed daarlig bevaret Materiale af de 2 førstnævnte Typer og kun 1 Exemplar af *Barybrotos*; han har sikkert ikke havt nogen Anelse om, at her fandtes mærkelige Typer, og Literaturen kunde ikke give noget Vink, da man paa det Omraade kun besad Dana's ovenfor omtalte, defekte Fremstilling.

Som ovenfor bemærket har jeg haft andre morfologiske Udgangspunkter end Schiødte, har studeret Mundbygningen af flere mærkelige, for ham ukjendte Former og har endelig haft et stort Materiale af Slægter og Arter og godt Forraad af flere Arter til Dissektion. Dette har tilsammen, som rimeligt er, ført til, at jeg har fundet nye Bygningsforhold i Munddelene og noget ændrede samt nye Karakterer for Familier og Slægter, hvilket atter har medført, at jeg har anset det for rigtigst at give et helt nyt Sæt Figurer af Mundbygningen, baade af de dengang ukjendte Former og tillige af Cirolaner, Æger og

Cymothoer, for at illustrere min Fremstilling og Opfattelse, der, fra regnet Morfologien og Systematiken, paa de fleste Punkter stemmer særdeles meget eller helt overens med Schiødtes Fremstilling, hvilket er naturligt, da denne Naturforsker undersøgte udmærket og med stor Omsigt<sup>1)</sup>.

Det forekommer mig endnu nødvendigt her at berøre enkelte Forskjelle mellem Schiødtes og mine Resultater, da de ikke resultere af den ovennævnte forskjellige morfologiske og systematiske Opfattelse. De smaa Forskjelle, Schiødte har fundet mellem *Cirolana borealis* og *Eurydice pulchra* i Kindbakkernes og Kjæbernes Bygning, har jeg ogsaa fundet, men Undersøgelsen af en Række Cirolana-Arter viste, at de ikke have generisk Værdi. Schiødte mente, at Spidsen af Kindbakken hos Æger og Cymothoer var bevægelig ved Hjælp af Muskler liggende i selve Kindbakkens Corpus; dette har jeg ved Anvendelse af den størst mulige Omhu ikke kunnet finde, og min Mening er, at det er hele Kindbakkens Vippen, der bevirker, at Spidserne af de 2 Kindbakker føres mod og til Dels forbi hinanden, naar Dyret bider. Kindbakken gaar paa Grund af sin ejendommelige Indledning og sin Forbindelse med Paragnatherne tæt bag sit ombøjede Endeparti meget let i Stykker paa det Sted, hvor Schiødte mener at have fundet en Leddeforbindelse; den er paa det nævnte Sted gjentagne Gange gaaet i Stykker for mig, men naar jeg, ofte med stort Besvær, fik den helt ud, kunde jeg ikke finde noget Led. Dernæst har jeg i Bygningen af 2det Par Kjæber hos *Cymothoa* ikke kunnet finde saa stor Kjønssforskjel, som Schiødte angiver, men derimod er Forskjellen i Kjæbeføddernes Bygning hos Han og Hun langt større end efter hans Fremstilling, thi han har ifølge Fig. 3 g paa Tab. XI ikke undersøgt en Han, men et Dyr, der var stærkt begyndt med at udvikle sig til en Hun. I Kjæbeføddernes Omdannelse hos Hunnerne hos flere Former, i Kjæbefodspalpernes Funktion hos Æger og Cymothoer m. m. har jeg her fremstillet flere af Schiødte ikke observerede Forhold.

I 1866 publicerede M. Hesse en Afhandling over adskillige af ham ved Frankrigs Kyst iagttagne Cirolanider. Afhandlingen indeholder dels biologiske iagttagelser, dels Beskrivelser af Slægter og Arter. De biologiske iagttagelser, af hvilke nogle ere udskrevne i det systematiske Afsnit af denne Afhandling, referere sig især til *Slabberina agata* v. Ben., der imidlertid efter Hesses egen Beskrivelse næppe kan være *Eur. pulchra* Leach, men maa være enten *Eur. truncata* Norm. eller *Eur. elegantula* m. Han beskriver dernæst en

<sup>1)</sup> Det har, blandt andet for maaske at kunne forebygge mulige Misforstaaelser, forekommet mig heldigst at udtale mig nærmere om Differentserne, samt disses Grunde, mellem den Fremstilling, der findes i denne Afhandling, og den, der findes i det nævnte, paa nye og gode iagttagelser særdeles indholdsrige Arbejde af min gamle Lærer, hvis Paavirkning har været af den mest indgribende Betydning for min Udvikling til Zoolog, af hvem jeg i det hele taget har lært saa meget og som jeg ogsaa i andre Henseender skylder grumme meget.

ny Slægt, *Eucolomban* med 2 nye Arter og 6 Arter af Slægten *Cirolana*, af hvilke de 5 skulle være ny og den sjette er bestemt som «*Cir. Cranchii?*», men ifølge Forf. egen Beskrivelse af *Benene* kan den ikke være denne Art, men er sandsynligvis *C. borealis* Lilljb. De 7 nye Arter (5 *Cirolana*, 2 *Eucolomban*) er det mig aldeles umuligt at danne mig en bestemt Mening om, og jeg troer hverken, at de lade sig gjenkjende efter Beskrivelserne, eller at de fleste af dem ere gode Arter. Jeg har derfor tilladt mig aldeles ikke at tage Hensyn til dem i det systematiske Afsnit.

Fra 1866 til 1889 (incl.) er der udkommet en meget betydelig Række Arbejder, der give Bidrag til Kundskaben om de her omhandlede Familier. Da de fleste af disse Bidrag ere meget smaa og ville blive tilstrækkelig omtalte i det systematiske Afsnit, vil jeg her kun tage Hensyn til et mindre Udvalg af Afhandlinger, som enten ved Stoffet eller ved Behandlingen frembyde mere Interesse.

I 1868 udkom Sp. Bate & Westwood: *Brit. Sess.-eyed Crustacea*, Vol. II, i hvilket Forfatterne beskrive den engelske Faunas 4 Arter (2 *Cirolana*, 1 *Conilera*, 1 *Eurydice*). Beskrivelserne ere ret udførlige og ere ledsagede af mange Afbildninger, af hvilke de fleste ere temmelig tarvelige. Munddelene afbildes af *Conilera* og *Eurydice*, men ikke synderlig godt; Afbildningerne af den tidligere miskjendte *Conilera* have mest Interesse. Om *Eurydice* gives en interessant biologisk Iagttagelse. Endelig gives en meget tarvelig Fremstilling af Munden af en *Æga*.

Den vigtigste af de nyere Afhandlinger er Schiødte & Meinert: *De Cirolanis Ægas simulantibus*, 1879. Her opstilles de 2 nye, yderst interessante Slægter, *Barybrotos* (paa 2 Arter, der efter mit Skjøn kun er 1 Art) og *Tachæa* (1 Art); dernæst beskrives 6 Arter (af hvilke 4 nye) af den hidtil særdeles lidt kjendte Slægt *Corallana*. Alle Dyrene samt Dele af dem afbildes smukt paa 3 Tavler. Det er saaledes det største og tillige som Helhed det bedste af de fremkomne Bidrag til Kundskaben om de mellem *Cirolaner* og *Æger* staaende Dyr. En væsentligere Mangel er det dog, at Mundbygningen er studeret temmelig lidt, og de Angivelser, man finder deri baade om Mundene som Helhed og om deres enkelte Dele, ere for faa og for ufuldstændige. Det har vel ogsaa været en væsentligere Hindring for dette Studium, at næsten det hele, i sig selv ikke store, tilfældig med *Æger-Cymothoer* modtagne Materiale tilhørte fremmede Museer og altsaa skulde skaanes i høj Grad og tilbagesendes. Forfatterne have rigtig erkjendt, at de behandlede Dyr ikke vare *Ægider*, men Henførelsen til *Cirolanerne* er mindre heldig; det er aabenbart ikke gaaet op for dem, at de havde 3 Sæt af Former for sig, der hver for sig havde en lige saa høj Værdi som Familietyper som f. Ex. *Cirolana* og *Æga*. Nogle Rettelser af Angivelser i Arbejdets Text findes i denne Afhandlings formløbet Afsnit. — Angaaende de samme Forfatteres store Monografi af *Æger-Cymothoer* (1879—84) henvises til mine Bemærkninger i de følgende Afsnit.

A. Milne-Edwards giver i *Comptes rendus*, Januar 1879, en foreløbig Meddelelse om en ny, kjæmpemæssig Isopod, *Bathynomus giganteus*, tagen af Al. Agassiz paa 955 Fv. i det caraimiske Hav. Foruden ved sin enorme Størrelse (230<sup>mm</sup> lang, 100<sup>mm</sup> bred) udmærker Dyret sig ifølge Forf. særlig ved, at dens 5 Par Pleopoder baade, som hos Cirolaner-Cymothoer, fungere som Aandedrætsorganer og hver Pleopod tillige som et Laag for en stærkt forgrenet Gjælle, der udgaar ved hver Pleopods Basis. Denne supplementære Udvikling af Gjæller er et meget interessant Forhold, der, som Milne-Edwards vistnok med Rette udtaler, er en Følge af, at det sædvanlige Aandedrætsapparat ikke slaar til for et Dyr af denne kjæmpemæssige Størrelse. Forf. meddeler ogsaa, at Øjnene, af hvilke hvert skal bestaa af c. 4000 Facetter, kun sidde paa Hovedets Underside. I H. Filhol «*La Vie au fond des Mers*» findes p. 147 en stor Afbildning af Dyret, set fra Bugsiden (en Afbildning af Dyret fra Rygsiden findes hos Agassiz, Fig. 252 (se senere), men den har i denne Sammenhæng mindre Betydning). Mundens og Benenes Bygning er vel ikke gjengivet synderlig fint, men dog tilstrækkelig godt til, at man øjeblikkelig og sikkert kan se, at man har et Dyr af Cirolanernes Familie for sig, ja hvis det ikke besad de mærkelige Gjæller, vilde jeg uden Betænkning optage det i selve Slægten *Cirolana* som en af de Arter, hvis Ben kun ere Gangben. Paa Grund af Gjælleapparatet bør den nu opstilles som en Slægt indenfor Cirolanernes Familie. Milne-Edwards skriver rigtignok, at Bygningen af Hoved, Antenner og Øjne viser Karakterer, som fjerner *Bathynomus* fra alle kjendte Grupper af Cirolaner-Cymothoer, men efter den ganske brugelige Afbildning hos Filhol kan jeg ikke se nogen Forskjel mellem Hoved og Antenner hos den og mange Cirolaner. Øjnene ere omtalte ovenfor som liggende kun paa Hovedets Underside, men et Blik paa mine Tavler vil vise, at det er meget almindeligt hos Cirolanerne, at Øjnene gaa stærkt ind paa Hovedets Underside, og at de hos *Bathynomus* kun findes her, ikke tillige som hos andre Cirolaner paa Oversiden, og at de have et saa stort Antal Facetter (hvis Angivelsen er rigtig), kan højst bruges som et Slægtsmærke. Forf. mener, at den i Bygningen af Munddelene mere nærmer sig til Cirolanerne end til de andre Repræsentanter for Cirolan-Cymothoegruppen; jeg vil sige, at den citerede Tegning viser en typisk *Cirolana*-Mund. Dernæst mener han, at Benene vise Ligheder med *Cirolana* og med Slægten *Æga*; efter Tegningen ligne de 3 forreste Benpar, der ere de afgjørende, slet ikke *Ægas* men derimod meget godt Benene hos mange Arter af Slægten *Cirolana*. Naar Hr. A. Milne-Edwards til Slutning mener, at *Bathynomus* efter de af ham angivne Bygningsforhold bør danne en ny Gruppe indenfor Cymothoerne med Navnet «*Cymothoediens branchifères*», saa er jeg selvfølgelig uenig med ham; thi flere af de af ham paa en noget vag Maade angivne Karakterer modsiges paa det bestemteste af Filhols (og Agassiz') Afbildning, som jeg fæster adskillig mere Lid til, og der bliver kun 2 Karakterer tilbage, af hvilke den ene, Øjnenes eksklusive Beliggenhed paa Undersiden og mægtige Facette-Antal

forekommer mig at være af temmelig ringe Vigtighed, medens den anden interessantere, Tilstedeværelsen af Gjæller, vistnok, som Forf. ogsaa anfører, er en Følge af Dyrets Størrelse, men saa er den som sekundær biologisk Karakter ogsaa uskikket til at benyttes som et Mærke for en Tribus af højere Rang.

R. Kossmann giver 1880 i «Zoologische Ergebnisse einer Reise in die Küstengebiete d. Roth. Meeres» dels Beskrivelser af 1 ny Slægt og 2 nye Arter, dels en Række Betragtninger over Isopodernes Systematik. Den nye Slægt kaldes *Corilana* og er opstillet paa 1 Exemplar. Det væsentligste, jeg kan faa ud af Forf. Beskrivelse og Afbildninger, er, at 7de Led og Kloen paa 1ste Par Kropben danner en kjæmpemæssig, krum «Klo»; Fremstillingen af Mundbygningen er ikke blot meget fragmentarisk, hvad Forf. selv gjør Undskyldning for, men den Munddel, der særlig beskrives og afbildes, nemlig Kindbakken, er absolut uforstaaelig for mig og sikkerlig ganske forkert. Jeg antager, at Slægten maa henføres til min Familie *Alcironidæ*, men dette er muligvis ganske urigtigt, thi naar Forfatteren har præpareret saa maadelig, at han ved Beskrivelsen af Kjæbefoden (p. 116) selv omtaler, at han maaske har sammenblandet noget af en Kjæbe med Kjæbefoden (!) og han leverer Figurer som Fig. 3, 4 og 5 paa Taf. IX, saa skal man ikke faa synderlig Oplysning af ham. Et Fremskridt bør dog omtales, nemlig at han rigtig, i Modsetning til Schiødte, har erkjendt, at den paa Indersiden af Cirolanas Mandibel forekommende, savdannede Flig er homolog med «*pars molaris*» hos andre Isopoder.

Forf. fremsætter ogsaa, til Dels refererende sig til Schiødte, en Række Betragtninger over «Archisopodernes» Systematik, og sammenfatter disse Overvejelser i et Schema, efter hvilket disse Dyr kunne sondres i 3 Rækker og hver Række i 2 eller flere Familier. Inddelingen forekommer mig paa flere Steder meget unaturlig, og Forf. viser ved sine distinktive Mærker, at han ikke kjender Bygningen af flere Familier (f. Ex. *Asellidæ*, *Sphæromidæ*, *Munnopsidæ*). Han stiller *Cirolanidæ*, *Cymothoidæ*, *Bopyridæ*, *Cryptoniscidæ* og *Serolidæ* sammen i én Række, men stiller saa *Sphæromidæ* sammen med *Idotheidæ* og *Munnopsidæ* i én Række, hvilket sidste forekommer mig ganske fortvivlet; og hvorfor *Serolidæ* skal stilles i førstnævnte Række, naar *Sphæromer*ne skulle skilles ud, indser jeg ikke.

I 1881 og 1882 udkom Gerstæckers Bearbejdelse af disse Dyr i «Bronn's Klassen und Ordn. d. Thier-Reichs». For Munddelenes Vedkommende er det væsentlige en Gjengivelse af Schiødtes Fremstilling, dog har han fundet (p. 27) og afbildet (Taf. VII, Fig. 17 a) første Leds Flig (Inderfligen) paa første Kjæbepar hos *Æga*. Pag. 188—99 opstilles en systematisk Oversigt over Isopodernes Familier; her kan jeg af Hensyn til Pladsen ikke diskutere denne nærmere, men skal kun fremhæve, at han stiller 2 Familier, *Ægidæ* og *Cymothoidæ*, imellem *Sphæromidæ* og *Bopyridæ*, at han p. 202 deler *Ægidæ* i 2 Underfamilier: *Cirolanina* og *Ægina*, og at han p. 224—26 deler den førstnævnte Underfamilie i følgende 6 Slægter: *Conilera*, *Eurydice*, *Cirolana*, *Tachæa*, *Corallana*,

*Barybrotos*, og endelig stilles *Bathynomus* bagefter *Cirolanina*, som formodentlig dannende en Overgang til *Æga*. — Min Mening om dette Arrangement vil tilstrækkelig fremgaa af Fremstillingen i denne Afhandling; men det bør fremhæves, at Gerstæcker ifølge Literaturens Angivelser næppe her kunde gjøre noget bedre end det, han har præsteret.

Mindre, men meget interessante Bidrag til Kundskaben om Slægten *Cirolana* skyldes Oscar Harger; særlig bør hans Bearbejdelse af Blake-Expeditionens Udbytte nævnes (1883). Han beskriver der kun 2 Arter (den ene ny); men det gjøres meget udførlig og godt, og desuden giver han Afbildninger baade af disse og af de 2 andre ved Nordamerikas Østkyst tagne Arter. Afbildningerne ere talrige, fylde 2 Tavler, ere ganske godt udførte i teknisk Henseende, og tillige, hvad der særlig bør fremhæves, valgte efter en Plan. Han har saaledes paa en lignende Maade som i dette Arbejde tegnet flere Ben af hver Art, og samme Benpar af de forskellige Arter i samme Stilling; ligeledes tegner han efter en lignende Plan flere andre Dele af sine Dyr. Han har ogsaa fremdraget en Mængde Bygningsforhold og benyttet deres Forskjelle som gode Artskarakterer. Det er første Gang, at Dyr af den righoldige Slægt *Cirolana* ere gjorte til Gjenstand for en rationel, komparativ Behandling. — (Jeg kan vel anføre, at jeg selv havde lagt min fuldstændige, her fulgte Plan for Afbildningerne og udført en saa stor Mængde, at jeg kunde forelægge et Udvalg ved Naturforsker mødet i Christiania 1886, uden at kjende Hargers gode Afhandling, som jeg lejlighedsvis fik at se bagefter hos Hr. Prof. G. O. Sars. Jeg anfører dette for at vise, at jeg selv har fundet paa Planen for Tegningerne; iøvrigt afviger jo ogsaa min Plan noget fra Hargers, og Munddelene har han ikke behandlet).

I 1886 publicerede F. Beddard (Challenger-Exp. Report, Zool. Vol. XVII) Beskrivelse og Afbildninger af en højst mærkelig Form, *Anuropus branchiatus*, tagen i det stille Hav paa 1070 Fv. Det eneste fundne Exemplar er 70<sup>mm</sup> langt og udmærker sig ved følgende Bygningsforhold: Uropoderne have faaet samme Bygning og Udseende som Pleopoderne, staa i Respirationens Tjeneste, ligge under det store 6te Haleled og ere (naar Dyret ses ovenfra) dækkede deraf. Øjne mangle. Hver Antennule bestaar kun af 2 Led, af hvilke det yderste er forholdsvis temmelig langt, tykt og lidt krummet. Kjøbefodspalpen er paafaldende kort og bestaar kun af 1 Led, der dog efter mit Skjøn sandsynligvis er dannet af flere sammensmeltede Led. Paa første Benpar kunne 7de Led og Kloen tilsammen slaas ind mod 6te Led, saa at der dannes en Gribehaand af samme Form som hos *Glyptonotus Entomon* (L.); andet Par Ben vare defekte, hvorimod de følgende 5 Par ifølge Afbildningen egentlig kun afvige fra Gangben hos *Cirolana* ved, at 6te Led er paafaldende spinkelt. — Beddards Tegning af Hovedets Underside og hans Beskrivelse af Munddelene ere særdeles tarvelige, saa at jeg ikke kan danne mig et sikkert Skjøn om Dyrets systematiske Stilling; Munddelene minde, sete in situ, adskillig om *Cirolanernes*.

Af de ovennævnte Karakterer er Bygningen af første Benpars Haand den, der mest stiller sig imod Dyrets Henførelse til min Familie *Cirolanidæ*; Bygningen af Uropoderne er vel yderst mærkelig og afvigende, men Beddard paralleliserer den selv, hvad vistnok er rigtigt, med de supplementære Gjæller hos *Bathynomus*, idet han udtaler, at ligesom *Bathynomus* har faaet sine Gjæller, fordi de 5 Par sædvanlige Pleopoder ikke vare tilstrækkelige til det kjæmpemæssige Dyrs Aandedræt, saaledes har den forholdsvis store *Anuropus* heller ikke havt Iltningsflade nok i sine 5 Par Pleopoder, men Savnet er her afhjulpet ved, at den faar ét Par til, nemlig Uropoderne, der saa blive ændrede i Beskaffenhed, Stilling og Form. Antennulernes Bygning og Mangelen af Øjne forekomme mig mindre væsentlige i systematisk Henseende. — Som en Art Résumé kan jeg kun udtale, at *Anuropus* enten og sandsynligvis maa høre til min Familie *Cirolanidæ* eller at den, hvis Mundbygningen skulde vise sig at afgive ukjendte og afvigende Forhold af Betydning, maa opstilles som Repræsentant for en ny Familie.

Det store og smukke Arbejde af Giard og Bonnier «Contributions à l'étude des Bopyriens, 1887», indeholder vel ikke noget om de her behandlede Dyreformer, men Forfatterne have deri paavist paa levende æggebærende Hunner af *Cepon elegans*, at Kjæbefødderne, der ere omdannede paa en lignende Maade, men i langt højere Grad end hos de i dette Arbejde fremstillede Former, og tillige første Par Æggeplader ere i stadig Bevægelse og derved frembringe en Vandstrøm igjennem Rugeposen, og, saavidt jeg har forstaaet Texten, i Retningen bagfra fremefter. Denne iagttagelse er for mig af stor Betydning, da den i højeste Grad bestyrker den Anskuelse, jeg har fremsat og allerede før det citerede Arbejdes Fremkomst havde næret om Betydningen af den Omdannelse, jeg har paavist hos de fleste her behandlede Typer i Hunnernes Kjæbefødder.

---

#### Libri citati.<sup>1)</sup>

Commentationes a me non visæ, auctoritate aliorum citatæ, asterisco notatæ sunt.  
 Agassiz, A.: Three Cruises of the U. S. Coast and Geodetic Survey Steamer «Blake»,  
 Vol. II. (Bull. of the Museum of Compar. Zoölogy at Harvard College, in Cambridge,  
 Vol. XV, 1888).

---

<sup>1)</sup> Skjøndt jeg har gjort mig megen Umage for at faa denne Liste saa fuldstændig som mulig, saa antager jeg alligevel, at jeg ikke har faaet alt med. Et kort Gjennemsyn af denne lange Liste og af det systematiske Afsnit vil forhaabentlig vise Vanskelighederne og undskyldte mulige Forbi-gaaelser.

- Bate, C. Sp. & Westwood, J. O.: A History of the British Sessile-eyed Crustacea, Vol. II, 1868.
- Beddard, Fr. E.: Preliminary Notice of the Isopoda collected during the Voyage of H. M. S. «Challenger». — Part III. (Proceed. of the Zoolog. Society of London, Febr. 1886, p. 97). [n° 1].
- Report on the Isopoda collected by H. M. S. «Challenger» during the years 1873—76. — Second Part. (Report on the scient. Results of the explor. Voy. of H. M. S. «Challenger», Zoology, Vol. XVII, I, 1886). [n° 2].
- Beneden, P. J. van: Recherches sur les Crustacés du littoral de Belgique. (Mémoires de l'Académ. Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Tome XXXIII, 1861).
- Bianco, Salvat. Lo: Notizie biologiche riguardanti specialmente il periodo di maturità sessuale degli animali del golfo di Napoli. (Mittheilungen aus der Zoolog. Station zu Neapel, Band VIII, 1888, p. 385).
- Bleeker, P.: Recherches sur les Crustacés de l'Inde archipélagique. (Act. Societ. scient. Indo-Neerland. II, Batavia, 1857).
- Boas, J. E. V.: Studien über die Verwandtschaftsbeziehungen der Malakostraken. (Morphol. Jahrbuch, B. VIII, 1882, p. 485).
- Bonnier, J.: Catalogue des Crustacés Malacostracés recueillis dans la baie de Concarneau. (Bull. Scientifique du Département du Nord, 2<sup>me</sup> Ser., X<sup>me</sup> Année, 1887).
- Bos, J. Ritzema: Bijdrage tot de kennis van de Crustacea Hedriophthalmata van Nederland en zijne kusten. Akademisch Proefschrift. Groningen, 1874.
- Bovallius, C.: New or imperfectly known Isopoda. (Bihang till K. Svenska Vetensk.-Akadem. Handlingar, B. 11, Nr. 17, 1886).
- Carus, J. V.: Prodromus Faunae Mediterraneae. Vol. I, 1885.
- \*Chevreux, Ed.: Crustacés Amphipodes et Isopodes des environs du Croisic. (Assoc. pour l'avancem. des Sciences, 12<sup>e</sup> Session. Rouen. 1883, p. 317).
- Cunningham, R. O.: Notes on the Reptiles, Amphibia, Fishes, Mollusca and Crustacea obtained during the Voyage of H. M. S. «Nassau» in the years 1866—69. (Transact. of the Linnean Society, Vol. XXVII, 1871, p. 465).
- Cuvier, G., se under Edwards, H. Milne-. [n° 2].
- \*Czerniavsky, V.: Materialia ad zoographiam Ponticam comparatam. («Transact. of the first meeting of Russian Naturalists in St. Petersburg, 1868, 4<sup>o</sup> (written in Russian)»). — Citeret efter E. v. Martens, Crustacea i: The Zoological Record f. 1870 (1871).
- Dana, J. D.: On the Classification of the Crustacea Choristopoda or Tetracapoda. (The American Journal of Science and Arts, Second Ser., Vol. XIV, Novemb. 1852, p. 297). [n° 1].



- Dana, J. D.: United States Exploring Expedition during the years 1838, 1839, 1840, 1841, 1842 under the Command of Charles Wilkes, Vol. XIII, Crustacea, Part II, 1852, et Atlas, 1855. [n° 2].
- Day, F.: Exhibition of, and remarks upon, a specimen of a Dog-fish (*Acanthias vulgaris*) internally devoured by parasites (Proceed. Zoological Society of London f. 1884, p. 44).
- Delage, Yv.: Catalogue des Crustacés Edriophthalmes et Podophthalmes qui habitent les plages de Roscoff. (Archives de Zoologie expérimentale et générale, T. IX, 1881, p. 152).
- Desmarest, A. G.: Considérations générales sur la Classe des Crustacés et description des espèces de ces animaux, qui vivent dans la mer, sur les côtes, ou dans les eaux douces de la France. Paris. 1825.
- Dollfus, A.: Sur quelques Crustacés Isopodes du littoral des Açores. (Bulletin de la Société Zoologique de France, T. XIII, 1888, p. 5). [n° 1].
- Isopoda i Hoek: Crustacea Neerlandica. Nieuwe lijst van tot de Fauna van Nederland behoorende Schaaldieren. (Tijdschrift der Nederlandsche Dierkundige Vereeniging (2), II, 1889). Særtryk er citeret. [n° 2].
- Edwards, Alph. Milne-: Sur un Isopode gigantesque des grandes profondeurs de la mer. (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, Tome 88, 1879, p. 21—23).
- Samme Artikel i Oversættelse i: Annals and Magazine of Natur. History, Ser. V, Vol. III, 1879, p. 241—43.
- Edwards, H. Milne-: Histoire naturelle des Crustacés, Tome III et Planches. Paris. 1840. [n° 1].
- Le Règne animal distribué d'après son organisation, par George Cuvier. Les Crustacés, avec un Atlas. Paris «1849». (Crochard Edit.). [n° 2].
- Filhol, H.: La Vie au fond des Mers. Paris. 1885. [n° 1].
- \*— «Mission de l'Isle Campbell. Rec. Vénus, III, 2. (Crustaceen in Kap. VII, pag. 349—510) 1886.» [n° 2].
- Gerstaecker, A.: H. G. Bronn's Klassen und Ordnungen des Thier-Reichs. Fünfter Band. II Abtheilung. Gliederfüssler: Arthropoda, 1—10 Lief., 1882—83.
- Giard, A. et Bonnier, J.: Contributions a l'étude des Bopyriens. 4<sup>te</sup>. Lille. 1887.
- \*Gosse, Ph. H.: A Manual of Marine Zoology for the British Isles, Part I, 1855.
- \*Grube, A. Ed.: Die Insel Lussin und Ihre Meeresfauna. Breslau. 1864.
- Hallez, P.: Un fait de cantonnement de quelques animaux préposés au service de la salubrité des plages. (Revue Biologique, 1<sup>re</sup> Ann., 1888, p. 39).
- Harger, O.: Isopoda i: Verrill, A. E., Smith, S. J. and Harger, O.: Catalogue of the marine invertebrated animals of the Southern Coast of New England and adjacent waters. (Report. Unit. States Commiss. of Fish and Fisheries, Part I, 1874, p. 537). [n° 1].

- Harger, O.: Isopoda i: Smith, S. J. and Harger, O.: Report on the dredgings in the region of St. George's Banks in 1872. (Transact. of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, Vol. III, 1874, p. 1). [n° 2].
- Notes on New England Isopoda. (Proceed. of the Unit. States National Museum, Vol. II, 1879, p. 157). [n° 3].
- Report on the marine Isopoda of New England and adjacent waters. (Report of the Unit. States Commissioner of Fish and Fisheries, Part VI f. 1878, p. 297). [n° 4].
- Reports on the results of dredging, under the supervision of Al. Agassiz, on the east-coast of the Unit. States, dur. the Summer of 1880, by the U. S. Coast Survey Steamer «Blake». (Bulletin of the Museum of Comparative Zoology, Vol. XI, n° 4, 1883, p. 91). [n° 5].
- \*Haswell, W. A.: On some new Australian marine Isopoda. Part II. (Proceed. Linnean Society New South Wales, Vol. VI, 1882, p. 181).
- Catalogue of the Australian Stalk- and Sessile-eyed Crustacea. (The Austral. Mus. Sidney). 1882.
- Heller, Cam.: Vorläufiger Bericht über die während der Weltumseglung der k. k. Fregatte Novara gesammelten Crustaceen. (Verhandl. der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien, Jahrg. 1861, B. XI, p. 495). [n° 1].
- Carcinologische Beiträge zur Fauna des adriatischen Meeres. (Verhandl. der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien, Jahrg. 1866, B. XVI, p. 723). [n° 2].
- Reise der oesterreichischen Fregatte Novara um die Erde in den Jahren 1857, 1858, 1859. Zoologischer Theil, Zweiter Band, Crustaceen. Wien, 1868. [n° 3].
- Herklots, J. A.: Specimen zoographicum inaugurale continens Additamenta ad Faunam Carcinologicam Africae occidentalis. Lugduni-Batavorum. 1851. 4<sup>to</sup>. [n° 1].
- Deux nouveaux genres de Crustacés vivant en parasites sur des poissons — Epichthys et Ichthyoxenus. (Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, T. V, 1870, p. 120). (Særtryk er citeret). [n° 2].
- Hesse, M.: Observations biologiques sur quelques Crustacés des côtes de Bretagne. (Annales d. Sciences Natur., 5<sup>me</sup> Ser., Zoologie, T. V, 1866, p. 241).
- Hoek, P. P. C.: Die Crustaceen, gesammelt während den Fahrten des «Willem Barents» in den Jahren 1878 und 1879. (Niederl. Archiv f. Zoologie, Supplemenb. I, 1882).
- Crustacea Neerlandica, se Dollfus, A.
- Koehler, R.: Contribution à l'étude de la Faune littorale des Iles Anglo-Normandes. (Annales d. Sciences Natur., 6<sup>me</sup> Ser., T. XX, 1885, Art. 4).
- Kossmann, R.: Zoologische Ergebnisse einer im Auftrage der kön. Acad. d. Wissensch. zu Berlin ausgeführten Reise in die Küstengebiete des Rothen Meeres. Zweite Hälfte, Erste Lief. Leipzig. 1880. 4<sup>to</sup>.

- Krauss, F.: Die südafrikanischen Crustaceen. Eine Zusammenstellung aller bekannten *Malacostraca*. Stuttgart 1843. 4<sup>to</sup>.
- Leach, W. E.: A tabular View of the external Characters of Four Classes of Animals, which Linné arranged under Insecta etc. (Transact. of the Linnean Society of London, Vol. XI, 1815, p. 306). [n° 1].
- Cymothoadées. (Dictionnaire des Sciences Naturelles, T. XII, 1818, p. 338). [n° 2].
- Leidy, J.: Cirolana feasting on the Edible Crab. (Proceed. of the Acad. of Nat. Sciences of Philadelphia, 1888, p. 80). [n° 1].
- Habit of Cirolana concharum. (Proceed. of the Acad. of Nat. Sciences of Philadelphia, 1888, p. 124). [n° 2].
- Lenz, H.: Die wirbellosen Thiere der Travemünder Bucht. Theil I. (Jahresbericht der Commission zur wissensch. Untersuchung d. deutschen Meere für d. Jahre 1874, 1875, 1876. Berlin 1878. — Anhang I).
- Lilljeborg, W.: Norges Crustacéer. (Öfvers. af Kgl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Åttonde Årgången. 1851, p. 19 (1852)).
- \*Lockington, W. N.: Description of seventeen new species of Crustacea. (Proceed. of the Californian Academy of Sciences, Vol. VII, p. 41, 1877).
- \*Lockwood, S.: A new host for *Cirolana concharum* Harger. (New Jersey St. Microscopical Soc., meeting March 19, 1883).
- Samme Artikel i: Science, Vol. II, 1883, p. 664.
- — — i: Journ. Royal Microscop. Soc., Ser. II, Vol. IV, 1884, p. 51.
- Lütken, Chr. F.: Nogle Bemærkninger om de nordiske *Æga*-Arter samt om *Æga*-Slægtens rette Begrændsning. (Videnskab. Meddelelser fra den naturhist. Forening i i Kjøbenhavn for Aaret 1858, p. 65 (1859)). [n° 1].
- Om visse Cymothoagtige Krebsdyrs Ophold i Mundhulen hos forskellige Fiske. (Videnskab. Meddelelser fra den naturhist. Forening i Kjøbenhavn for Aaret 1858, p. 172 (1859)). [n° 2].
- Tillæg til «nogle Bemærkninger om de nordiske *Æga*-Arter samt om *Æga*-Slægtens rette Begrændsning». — Om *Æga tridens* Leach og *Æga rotundicauda* Lilljeborg samt om Slægterne *Acherusia* og *Ægacylla*. (Videnskab. Meddelelser fra den naturh. Forening i Kjøbenhavn for Aaret 1860, p. 175 (1861)). [n° 3].
- Martens, E. v.: Ueber einige ostasiatische Süßwasserthiere. (Archiv für Naturgeschichte, Jahrg. XXXIV, 1868, B. I, p. 1).
- Meinert, Fr.: Crustacea Isopoda, Amphipoda et Decapoda Daniae: Fortegnelse over Danmarks isopode, amphipode og decapode Krebsdyr. (Naturhist. Tidsskr., 3. R., B. XI, 1877, p. 56). [n° 1].

- Meinert, Fr.: Crustacea Isopoda.... Første Tillæg. (Naturhist. Tidsskr., 3. R., B. XII, 1880, p. 465). [n° 2].
- (Schiødte & Meinert, se Schiødte).
- Metzger, A.: Crustaceen aus den Ordnungen Edriophthalmata und Podophthalmata. (Jahresbericht der Commission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere für die Jahre 1872, 1873, II und III Jahrg., 1875, p. 279).
- Miers, E. J.: Descriptions of some new Species of Crustacea, chiefly from New Zealand. (Annals and Magaz. Natur. History, Fourth Ser., Vol. XVII, 1876, p. 218). [n° 1].
- \*— Catalogue of the stalk- and sessile-eyed Crustacea of New Zealand. London 1876. 8<sup>vo</sup>. [n° 2].
- On Species of Crustacea living within the Venus's Flower-basket (*Euplectella*) and in *Meyerina claviformis*. (The Journal of the Linnean Society, Zoology, Vol. XIII, 1878, p. 506, Pl. XXIV). [n° 3].
- On a Collection of Crustacea from the Malaysian Region, Part IV. (Annals and Magaz. of Natur. History, Fifth Ser., Vol. V, 1880, p. 457). [n° 4].
- Crustacea i: Account of the Zoological Collections made during the Survey of H. M. S. «Alert» in the Straits of Magellan and on the Coast of Patagonia. Communicated by A. Günther. (Proceed. Zoological Society of London for the year 1881. — Crustacea p. 61). [n° 5].
- On a Collection of Crustacea made by Baron Hermann Maltzan of Goree Island, Senegambia. (Annals and Magaz. Natur. History, Fifth Ser., Vol. VIII, 1881, p. 204). [n° 6].
- Crustacea i: Report on the Zoological Collections made in the Indo-pacific Ocean during the Voyage of H. M. S. «Alert» 1881—82. Part I. The Collections from Melanesia. London 1884. 8<sup>vo</sup>. — Crustacea p. 178. [n° 7].
- Montagu, G.: Description of several Marine Animals found on the South Coast of Devonshire. (Transact. of the Linnean Society of London, Vol. VII, 1803, p. 61).
- Norman, A. M.: On two Isopods, belonging to the Genera *Cirolana* and *Anilocra*, new to the British Islands. (Annals and Magaz. Natur. History, Fourth Ser., Vol. II, 1868, p. 421). [n° 1].
- Shetland Final Dredging Report. — Part II. On the Crustacea, Tunicata, Polyzoa, Echinodermata, Actinozoa, Hydrozoa and Porifera. (Report on the thirty-eighth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1868. London (1869), p. 247). [n° 2].
- Crustacea i: Exploration of the Faroe Channel, during the Summer of 1880, in H. M.'s hired Ship «Knight Errant». (Proceed. of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XI, 1882, p. 638). [n° 3].

- Perty, M.: *Delectus animalium articulorum, quæ in itinere per Brasiliam annis 1817—1820 collegerunt J. B. de Spix et C. F. Ph. de Martius.* Monachii 1830—1834. Fol.
- Pfeffer, G.: *Die Krebse von Süd-Georgien nach der Ausbente d. Deutschen Station 1882—83.* I. (Jahrbuch der Hamburgischen wissensch. Anstalten, IV Jahrg., 1887, p. 43 — samt i: *Naturhist. Museum zu Hamburg. Bericht f. d. Jahr 1886*, p. 43). [n° 1].
- *Die niedere Thierwelt des antarktischen Ufergebietes.* («Aus dem Werke über die Ergebnisse der deutschen Polar-Expeditionen», Allgemeiner Theil, Band II, 17, 1890). [n° 2].
- Risso, A.: *Histoire naturelle des principales productions de l'Europe Méridionale et particulièrement de celles des environs de Nice et des Alpes maritimes.* T. V. Paris 1826.
- Rosenstedt, B.: *Beiträge zur Kenntnis der Organisation von Asellus aquaticus und verwandten Isopoden.* (Biolog. Centralblatt, B. VIII, Nr. 15, 1888, p. 452).
- Sars, G. O.: *Beretning om en i Sommeren 1865 foretagen zoologisk Reise ved Kysterne af Christianias og Christianssands Stifter.* (Nyt Magazin for Naturvidenskaberne, 15de B., 1868, p. 84). [n° 1].
- *Bidrag til Kundskab om Dyrelivet paa vore Havbanker.* (Forhandl. i Vidensk. Selskabet i Christiania f. 1872, p. 73 (1873)). [n° 2].
- *Oversigt af Norges Crustaceer med foreløbige Bemærkninger over de nye eller mindre bekendte Arter.* I. (Forhandl. i Vidensk. Selskabet i Christiania f. 1882, Nr. 18, p. 1 (1883)). [n° 3].
- *Den norske Nordhavs-Expedition 1876—1878.* XV. Zoologi. Crustacea, II. Christiania 1886. 4<sup>to</sup>. [n° 4].
- Schiødte, J. C.: *Krebsdyrenes Sugemund (I).* (Naturhist. Tidsskr., 3 R., B. IV, p. 169, 1866). [n° 1].
- Schiødte, J. C. & Meinert, Fr.: *De Cirolanis Ægas simulantibus.* Commentatio brevis. (Naturhist. Tidsskr., 3 R., B. XII, p. 279, 1879). [n° 2].
- — *Symbolæ ad Monographiam Cymothoarum, Crustaceorum Isopodum familiæ.* (Naturhist. Tidsskr., 3 R., B. XII, p. 321, 1879; B. XIII, p. 1—166, 1881 og p. 281—378, 1883; B. XIV, p. 221—352, 1883 og p. 353—454, 1884 (udk. 1885)). [n° 3].
- \*Slabber, M.: *Naturkundige Verlostigingen behelzende microscopise waarnemingen van in- en uitlandsche water- en land-dieren.* Haarlem 1778. 4<sup>to</sup>.
- *Physikalische Belustigungen oder Mikroskopische Wahrnehmungen von drey und vierzig in- und ausländischen Wasser- und Landthierchen.* Aus dem Holländisch. übersetzt. Nürnberg 1784. 4<sup>to</sup>.

- Stalio, L.: Catalogo metodico e descrittivo dei Crostacei dell' Adriatico. (Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Ser. V, Tomo III, 1876—1877, p. 355, p. 499, p. 629, p. 773, p. 977, p. 1111, p. 1345).
- Stimpson, W.: Synopsis of the Marine Invertebrata of Grand Manan. (Smithsonian Contributions to Knowledge, Vol. VI, Art. 5, 1854).
- Stossich, M.: Prospetto della Fauna del mare Adriatico. Parte III. (Bollettino della Società Adriatica di Scienze naturali in Trieste, Vol. VI, 1880, p. 178).
- Strøm, H.: Physisk og Oeconomisk Beskrivelse over Fogderiet Søndmør beliggende i Bergens Stift i Norge. Oplyst med Landkort og Kobberstykker. Første Part. Trykt i Sorøe 1762. 4<sup>to</sup>.
- Studer, Th.: Verzeichniss der während der Reise S. M. S. Gazelle an der Westküste von Afrika, Ascension und dem Cap der guten Hoffnung gesammelten Crustaceen. (Abhandl. d. königl. Akademie der Wissensch. zu Berlin. Aus dem Jahre 1882. Physik. Abhandl. II. (1883)). [n° 1].
- Isopoden, gesammelt während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—76. (Anhang zu den Abhandl. d. königl. Akademie der Wissensch. zu Berlin. Aus dem Jahre 1883. Physikal. Abhandl. I. Berlin 1884). [n° 2].
- Thompson, Will.: Additions to the Fauna of Ireland. (Annals and Magaz. of Natur. History, Vol. XX, 1847, p. 169 og 237).
- Thomson, G. M. and Chilton, Ch.: Critical List of the Crustacea Malacostraca of New Zealand. (Transact. of the New Zealand Institute, 1885, Vol. XVIII, p. 141 (1886)).
- Valle, A.: Cirolana hirtipes, M. Edw. nella Thalassochelys corticata, Rondel. (Bollettina della Società Adriatica di Scienze naturali in Trieste, Vol. IV, 1879, p. 191).
- Weber, Max: Die Isopoden gesammelt währ. der Fahrten des «Willem Barents» in das nördliche Eismeer in den Jahren 1880 u. 1881. Amsterdam 1884. (Af: «Bijdragen tot de Dierkunde»).
- Westwood, J. O. and Sp. Bate, se Bate.
- White, A.: List of the specimens of Crustacea in the Collection of the British Museum. London 1847. [n° 1].
- List of the specimens of British Animals in the Collection of the British Museum. Part IV. Crustacea. London 1850. [n° 2].

### III. Systematik og Karakterer.

Alle Forfattere, undtagen J. C. Schiødte, have været enige i at sætte Cirolaner og Corallaner nærmest ved Æger og Cymothoer, ja de have endog sædvanlig forenet alle disse Former i én stor Gruppe. Jeg maa af Grunde, som ville fremgaa af det følgende, i Hovedtrækkene gjøre ligesaa.

Saavidt jeg skjønner, afgiver Halens og Haleføddernes yderst forskellige Bygning indenfor Isopoderne de fleste og vigtigste Karakterer til at dele Ordenen i Grupper. I Bygningen af disse Organer findes der nu store Overensstemmelser mellem Cirolaner, Corallaner, o. s. v., Æger og Cymothoer, dog maa man tage særligt Hensyn til Cymothoerne, der, som paavist især af Schiødte & Meinert, ere noget anderledes byggede som fritsvømmende unge, vel udviklede, men ikke kjønsmodne Dyr end som voxne, fasthagede, af Snytelivet noget omdannede Former. Naar man derfor vil sammenligne Cymothoerne med andre Isopoder og udfinde deres Slægtskab, maa man helst se paa den med 6 Benpar og Svømmehale udstyrede Unge: *Pullus stad. II<sup>di</sup>* Sch. & Mein., der ofte træffes i Hunnens Æggepose, eller paa det med 7 Benpar forsynede, omkringsvømmende, lidt større Individ, hos hvilke Halens Bygning ikke har undergaaet de Reduktioner, som efterhaanden vise sig gennem Hudskifter under Individets stadige Fasthagning paa et oftest dækket Sted. De to vigtigste Forskjelle ere: Hos Ungen er Indersiden af de 5 Par Pleopoders Skaft forsynede med flere vel udviklede Kroge, der sammenhægte de 2 ligeoverfor hinanden liggende Pleopoder; disse Kroge mangle hos de voxne eller ere saa reducerede, at de ere ganske ubrugelige til Sammenhægtning. Dernæst have Uropoder og alle Pleopoder, undtagen 5te Pars Indergren, hos alle Unger i 2det Stadium og i det mindste Uropoderne ogsaa i 3die Stadium randstillede Svømmehaar, der mangle hos de voxne, i hvert Tilfælde hos de voxne Hunner. — Hos en enkelt Slægt, *Urozeuktes* M. Edw., ere hos de voxne de 5 forreste Haleled indbyrdes sammenvoxne, medens de samme Led hos Ungen (ifølge Schiødtes Tegning) ere indbyrdes frie.

Tager man nu kun Hensyn til de unge, ikke til de voxne Cymothoer, kan man paa Halens Bygning opstille følgende Karakterer for Cirolaner-Cymothoer: Alle Halens 6 Ringe ere indbyrdes frie (de forreste undertiden dækkede paa Rygsiden), og sidste Haleled er stort; hver Pleopod bestaar af en bred

Stamme, som i det mindste paa de 4 forreste Par<sup>1)</sup> har Hefte-Kroge paa den indre Rand, og 2 store, i Størrelse ikke indbyrdes meget forskellige, sædvanlig bladagtige, oftest tæt randhaarede (kun 5te Pars Indergren mangler altid Randhaar) Grene, og de forskellige Par ligne altid hverandre betydelig, oftest særdeles meget i Form; Uropoderne bestaa af et Skaft og 2 bevægelige, bladdannede, uleddede Grene, der tilsammen med Halens sidste Led danner en oftest med Randhaar vel besat Svømmevifte.

Denne Kombination af Karakterer træffes indenfor Isopoderne ellers kun hos den i flere Henseender fra alle andre Isopoder afvigende Slægt *Anceus*. Det eneste Sted, hvor man ellers træffer en lignende Uddannelse af Uropoderne, er hos nogle Arter af Slægten *Serolis*, men her vise Pleopoderne, som bekendt, en fra alle andre Isopoders afvigende Bygning. De eneste Former, hvis 6 Haleringe ere indbyrdes frie og hvis 6te Halering og Pleopoder vise en noget lignende Bygning som hos Cirolaner og Cymothoer, ere Slægten *Limnoria* og nogle Slægter af Familien *Anthuridæ*, men den første Slægt afviger i Halens Bygning ved den mærkelige Form af Uropodernes Grene og deres Tilledning, og den sidstnævnte Gruppe afviger ved sine mærkelig stillede og formede Uropoder med 2-leddet Indergren<sup>2)</sup>.

En anden for Gruppen fælles Karakter er følgende: De ægge bærende Hunner (jeg har undersøgt saadanne af alle Typer undtagen af *Barybrotos* og *Alcironidæ*, der i saa Henseende sikkerlig ikke afvige) have 5 Par Æggeblade (af hvilke undertiden 1 til 3 Par ere partielt randhaarede) paa de 5 første Par Kropben (og desuden langt mindre, supplementære, æggepladeagtige Dannelser paa de 2 sidste Par Kropben) samt store, mere eller mindre randhaarede Blade, udgaaende fra Inderkant og Bagkant af Kjæbeføddernes første Led, fra Yderkanten af deres Epipodit og fra Yderkanten af deres andet Led; disse mægtige Blade fra Kjæbefødderne dækkes helt eller næsten helt af de forreste Æggeblade, der strække sig hen til Mundaabningen eller endog frem over denne som et Dække, og disse Kjæbefodsblade tjene sikkerlig til at male Vand ud af Æggeposen, for at der bagtil i samme kan sive frisk Vand ind til Æg og Unger. Dette Forhold i Kjæbeføddernes Bygning er vel tidligere til Dels set hos *Cymothoa*, men er aldrig blevet rigtig fremstillet eller forstaaet. (Det synes mig at danne en smuk Analogi til den Vifte, der findes paa Grundleddet af andet Par Kjæber hos Cuma-

<sup>1)</sup> Hos de voksne Dyr af alle 6 Familier mangle Krogene paa 5te Par Pleopoder, men findes paa dette Lemmepar hos *Ceratothoa Banksii*, pull. stad. H<sup>di</sup>.

<sup>2)</sup> *Anceidæ* og især *Anthuridæ* anser jeg for beslægtede med Cirolaner-Cymothoer. *Sphæromidæ* ere ligeledes beslægtede med Cymothoerne, noget fjernere staa *Serolidæ*. Et Stykke fra de mere omdannede Cymothoer maa *Bopyridæ* stilles. — *Tanaidæ* regner jeg ikke til Isopoderne, men mener, at de bør danne en selvstændig Orden, thi de afvige i flere vigtige Karakterer fra alle andre Isopoder, og man kan ikke godt henføre dem hverken til Amphipoder eller til Mysider.



ceernes Hunner og som af G. O. Sars er tydet som et Apparat til at røre om mellem Æg og Unger for at holde dem friske.) Baade dette Forhold og Antallet af Æggeblade forekommer mig at afgive gode Karakterer for Cirolana-Cymothoa-Gruppen. Jeg har kun truffet en lignende Bygning af Kjæbefødderne og samme Antal af Æggeblade hos nogle Bopyrider. Efter at alle disse Iagttagelser vare gjorte, læste jeg Giard's og Bonnier's smukke (i den historiske Oversigt omtalte) Iagttagelser over *Cepon*. Disse Forfattere have baade set Kjæbeføddernes Omdannelse og tillige gjort Iagttagelser paa levende Dyr, hvorved de have paavist, at Kjæbefødderne og 1ste Par Æggeblade ere i stadig Bevægelse og ved fælles Samvirken vedligeholde en stadig Vandstrøm bagfra forefter gennem Æggeposen. At 1ste Par Æggeplader hos Cirolaner-Cymothoer spiller en lignende Rolle som hos Bopyrerne er ikke usandsynligt, men jeg kan intet sikkert afgjøre derom, og det kan næppe afgjøres uden ved at iagttage levende Dyr; dog bør det anføres, at jeg hos *Cirolana* har truffet 1ste og 2det Par Æggeplader randhaarede fortil, 5te Par randhaaret bagtil, hos *Corallana* derimod kun de frie Bagrande af 5te Par Æggeplader vel udstyrede med temmelig lange og ret stive Haar med meget korte Sidegrene.

Hos *Arcturus* og *Idotheu* har jeg fundet en mindre, kun bagudrettet, pladeagtig, randhaaret Forlængelse fra Kjæbeføddernes Rodled, men ingen fra Epipoditen og fra andet Led, og hele Dannelsen er forholdsvis meget lille og ændrer kun lidt Kjæbeføddens Habitus. Om *Asellus aquaticus* angiver Rosenstedt (op. cit. p. 462), at der hos Hunnen udvikles paa Roddelen af Kjæbefødderne 2 Knuder, der tilsidst faae et Antal lange, stærkt fjerhaarede Børster, og disse Tilhængsler rage ind i Rugeposen. Det turde ifølge Forfatteren være en Indretning «um die Einfuhr des Wassers in den Brutraum zu regulieren». Hos andre Isopoder har jeg ikke truffet nogen saadan Dannelse, og jeg kan for næsten alle Formers Vedkommende bestemt angive, at den ikke træffes, thi af vigtigere Former er der kun 2, nemlig *Serolis* og *Praniza*, af hvilke jeg ikke har undersøgt æggebærende Hunner.

Endnu kan nævnes følgende, for *Cirolana-Cymothoa*-Gruppen almindelig gjældende Forhold, der rigtignok ikke afgive eksklusive Karakterer, idet de fleste gjenfindes hos *Sphæromida*, nogle ogsaa hos andre Grupper.

1) Forreste Kropring er aldrig sammenvoxen med Hovedet; alle Kropringe ere indbyrdes frie, ingen paafaldende afsmalnet (som hos *Anceus*).

2) Antennerne (2det Par) reduceres hos Cymothoerne, saa at Grændsen mellem Skaft og Svøbe sædvanlig udviskes, og hele Antennen ofte kun indeholder 6—8 Led; hos de andre Familier er Skaftet godt sondret, aldrig (som f. Ex. hos *Janira* eller *Munnopsis*) med 6 Led, uden Squama (der findes dog muligvis Spor deraf hos nogle *Æga*-Arter) og sædvanlig med 5 (undertiden kun 4) Led; Svøben er mangleddet.

3) Kindbakkerne, der ere yderst forskjellige, have den fælles negative Karakter, at «pars molaris» aldrig er uddannet til et Tygge- eller Knuseredskab, den mangler

sædvanlig eller er meget reduceret, og hvor den findes mere udviklet (*Cirolanidæ*), er den omdannet til et tilledet, knivbladdannet, i den ene Rand tornvæbnet Redskab. Palpen er altid vel udviklet, 3-leddet.

4) Kjøbeføddernes Rodled er lille, andet Leds Flig temmelig kort eller manglende. Epipoditen er kort i Retning af Dyrets Længdeaxe og fastvoxen til Hovedets Underside.

5) Kropbenene. Rodledet paa første Benpar er sammensmeltet med Kropningen, paa de andre 6 Par danner det en vel udviklet, ved Søm eller svag Ledføjning afsat «Epimer», hvis Yderside slutter sig til Kroppens Sideflade. Syvende Led har en vel udviklet (hos *Cymothoerne* en særlig lang, men oftest yderlig utydelig afsat) Klo, medens den som en anselig «Biklo» hos mange Isopoder forekommende Torn bag Kloen her er meget lille og oftest mangler. — Benene ere altid middellange eller temmelig korte (et Ben er næppe nogensinde længere end Halvdelen af Dyrets Legeme), de 3 forreste Par ere altid noget, ofte betydelig kortere end de 4 bageste Par, og af disse er enten 6te eller (sjældnere) 7de det længste.

6) Med Undtagelse af Forekomsten af en Kjønsgriffel paa andet Par Pleopoder hos Hannen finder man i Pleopodernes Bygning ingen Forskjel mellem Han og Hun. Kjønsgriffen er altid smal, uden indre Hulhed (sædvanlig temmelig lige, sjelden meget krum eller betydelig udvidet nær Spidsen), og den naar omtrent til eller noget udenfor Spidsen af Pleopodens Indergren.

Efter saaledes at have anført de væsentligere Bygningstræk, der ere fælles for Gruppen, vil jeg gaa over til at omtale de Forhold, der kunne benyttes som Karakterer for Familier, Slægter og Arter, disse Karakterers Værdi, samt min Inddeling af Gruppen.

Gruppen falder naturlig i 6 Familier: *Cirolanidæ* (Slægter: *Cirolana*, *Eurydice*, *Conilera*, *Bathynomus*, (? *Anuropus*)), *Corallanidæ* (Slægt: *Corallana*), *Alcironidæ* (Slægter: *Alcirona*, *Lanocira*, *Tachæa* (?? *Corilana*)), *Barybrotidæ* (Slægt: *Barybrotus*), *Ægidæ* (Slægter: *Æga*, *Rocinela*, *Syscenus*), *Cymothoidæ* (Slægtsgrupperne *Anilocridæ*, *Saophridæ* og *Cymothoidæ* opstillede som Familier af Schiødte & Meinert). — Naar jeg udtrykker mig med Tvivl om Henførelsen af *Anuropus* og *Corilana*, saa er det, fordi disse Slægter og særlig deres Munddele ere saa ufuldstændig (og for *Corilana*'s Vedkommende saa slet) fremstillede henholdsvis af F. Beddard og R. Kossmann, at jeg ikke kan danne mig nogen bestemtere Forestilling om deres Bygning.

Denne Inddeling er især grundet paa Mundbygningen, som indenfor hver af de enkelte Familier er temmelig ensartet, men hos de af mig undersøgte Former af de første 5 Familier yderst ejendommelig for hver Familie for sig, uden nogen Overgang mellem nogen af Familierne. Forskjellene ere endog i det ydre saa store, at man, ved

blot med en nogenlunde stærk Lupe at bese Undersiden af Ho edet paa et for vedhængende Spiritus befriet Exemplar, øjeblikkelig kan bestemme Familien (naar man da ikke har faaet fat paa en Hun med de store Æggeplader, der for største Delen dække Munddelene), og dette er et Tilfælde, som er meget sjældent indenfor Arthropoderne, thi hvor fortræffelige systematiske Karakterer Munddelene end ofte afgive, saa plejer man dog ikke at kunne bestemme nærstaaende Familier alene efter deres ydre Habitus uden nogensomhelst Dissektion. — Den 6te Familie, *Cymothoidæ*, er ogsaa nogenlunde karakteriseret ved sin Mundbygning, men Forskjellen mellem Mundens Habitus hos visse Slægter af *Cymothoer*, f. Ex. *Livoneca*, *Nerocila*, og hos *Ægide*-Slægten *Rocinela* er dog for lille til, at den kan kaldes let at benytte.

Familien *Cymothoidæ* er imidlertid meget godt skilt fra de øvrige 5 Familier ved flere vigtige Forhold. Ved Mundbygningen og særlig ved Kjøbefodens Bygning er den let at skjelne i alle Aldere fra alle de andre Dyr, undtagen fra Slægten *Rocinela*. Halvvoxne og voxne *Cymothoer* skjelnes, som bekjendt, let fra *Æga-Rocinela* ved den totale Mangel af Svømmehaar paa 6te Haleled og næsten altid ogsaa paa Uropoderne, ved de mægtige, stærkt krogede Kløer paa 4—6 (oftest tillige paa 7de) Benpar, paa de næsten altid stærkt reducerede Antenner uden tydelig Modsætning mellem Skaft og Svøbe m. m., men jeg troer, at selv en hvilkensomhelst omkringsvømmende *Cymothoa*-Larve (Pull. stad. II<sup>di</sup> vel III<sup>di</sup>) kan kjendes fra en *Rocinela*-Unge ved den stærkere Udvikling af 4de—6te Benpars «Klo» (se Figureerne i Schiødte & Meinerts Monogr.) og baade ved sin Kløvæbning og sin Mundbygning fra alle andre her omtalte Former. Denne «Klo» er som sædvanlig dannet af 7de Led og selve Kloen, der oftest ikke ere meget forskellige i Længde, men saa inderlig forenede, at man selv hos Unger i andet Stadium (Tab. X, Fig. 4 u) og i tredje Stadium (Tab. X, Fig. 5) næppe eller ikke er i Stand til at paavise en Grændse, thi der findes hverken Biklo eller Smaabørster, og den adskilende Tværlinie kan være og er vel oftest ganske forsvunden. Denne «Klo»-Dannelse er hos *Cymothoa*-Unger i andet Stadium som Regel længere og mere krum paa de 3 forreste end paa de 3 bageste Par, men selv paa de sidste er den noget krum og saa paafaldende lang og karakteristisk bygget, at man næppe kan begaa Fejlbestemmelser, naar man tager Hensyn til «Kløerne» paa alle Benene<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> *Cymothoerne* udmærke sig ogsaa ved det af Bullar og P. Mayer efterviste Kjønskifte, der ikke er paavist hos nogen Repræsentant af de andre Familier, og heller ikke, saavidt jeg kan skjønne, findes hos nogen anden Form undtagen maaske hos *Alcirona* (og *Tachæa*), hvor det forekommer mig muligt, ikke sandsynligt. Det staar for mig som en rimelig Antagelse, at dette Kjønskifte er en Indretning, der hænger nøje sammen med de udviklede Dyrs Mangel paa Evne til at flytte sig fra Sted til Sted; der opnaaes derved, at hvert Dyr kan gjøre Nytte til Artens Forplantelse baade som Han og Hun og derved bøde paa det forholdsvis ringe Antal Unger, Dyret har i sin Rugepose. Hos de ligeledes som voxne fastsiddende Bopyrider opnaaes stor Frugtbarhed ved de

Næst efter Munddelene ere Kropbenene de i systematisk Henseende vigtigste Organer. I deres Bygning har jeg imidlertid kun fundet et eneste Forhold, som kan afgive Karakterer for Familierne, og det er 7de Leds og Kloens Udvikling (særlig paa de 3 forreste Benpar, hos *Cymothoidæ* paa alle Benparrene), nemlig den relative Længde af disse 2 Dele, deres Længde tilsammen i Forhold til 6te Led og om de tilsammen danne Klamrekroge eller ej. Bygningen hos de forskjellige Familier og Slægter findes omtalt i det formbeskrivende Afsnit; for Cymothoernes Vedkommende er den af praktiske Grunde allerede omtalt paa forrige Side.

Af de særdeles talrige Karakterer, som afgives af næsten alle Dele i Hudskelettet, kunne kun ganske faa bruges som Mærker for Familier, ja de ere næsten alle af temmelig underordnet Betydning i saa Henseende, da de vel kunne afgive skildrende, men ikke eksklusive Karakterer. Adskillige afgive derimod gode Slægtsmærker, de fleste kun Artsmærker og nogle endog kun sekundære Kjønsmærker. Jeg vil kortelig omtale Karaktererne og deres Værdi og foretrækker at begynde med dem, hvis Forekomst kun ere Kjønsmærker.

1. Appendix masculina. Alle udvoxne Hanner have, som bekjendt, et griffelagtigt Vedhæng, udgaaende fra Indersiden af 2det Par Halebens Indergren og oftest tæt ved dennes Grund. Denne Griffel anlægges meget tidlig, den begynder som en kun ved en Længdelinie afsat Inderkant langs et Stykke af den bladdannede Pleopod-Grens Inderrand, og ved et paafølgende Hudskitte bliver den en fri, tilleddet Dannelse. Hos *Cirolana borealis* Lilljeb. har jeg kunnet paavise den (Tab. I, Fig. 1 u) som fri Griffel hos en ung Han, der ikke havde naaet Halvdelen af en voxen Hans Legemslængde; hos *Coralana tricornis* n. sp. har jeg fundet den paa et Exemplar, der knap maalte  $\frac{3}{5}$  af den voxne Hans Længde; hos en pelagisk fisket, kun 6<sup>mm</sup> lang Cymothoide-Unge; der endnu besad rigelig Besætning af Svømmehaar paa Uropoder og sidste Haleled, har jeg ligeledes fundet den som et frit Vedhæng (Tab. X, Fig. 5 a). Hos saadanne Unger har Griffelen imidlertid aldrig sin fulde Længde og endelige Form, hvilket den vistnok først opnaar, naar Dyret er voxent og parringsdygtigt. Hos voxne Hanner af flere Slægter (*Cirolana*, *Eurydice*) er Griffelens Form forskjellig fra Art til Art, hvilket vil fremgaa af mine Figurer, men dens Brugbarhed som Artskarakter indskrænkes jo meget ved, at den først opnaar sin definitive Form hos voxne Dyr, og at den kun findes hos det ene Kjøen. — Hos Slægten *Eurydice* er denne Griffel kortere og bredere og indleddet længere nede paa Indergrenens Inderrand end hos nogen anden her omtalt Form; denne Forskjel afgiver saaledes en

---

utallige Æg, en enkelt Hun kan have i Rugeposen, og Hannerne blive kun diminutive, paa Hunnerne levende Smaaæsner).

smuk lille Slægtskarakter. — Dette Organ, hvis Forekomst kun er et Kjønsmærke, kan saaledes, som hos mange andre Krebsdyr, afgive Arts- og Slægtsmærker.

2. Sekundære Kjønsskarakterer. Kun indenfor 3 af her nærmere behandlede Slægter har jeg truffet sekundære Kjønssforskjelle af Betydning; hos de andre Former synes den eneste Forskjel at være, at Hannen af og til er lidt slankere end Hunnen. De 3 Slægter ere *Eurydice*, *Corallana* og *Alcirona*, og med Hensyn til den sidste Slægt véd jeg endda saa lidt Besked, at jeg her foretrækker at nøjes med at henvise til min Artsbeskrivelse af *A. Krebsii*. Hos *Corallana* har jeg oftere fundet mindre Afvigelser i Halens Behaaring, hos *C. oculata* lidt Differens i Labrums Stilling og Mandiblernes Fremstaaen (se senere), men de interessanteste Forhold har jeg truffet hos *C. quadricornis* og især hos *C. tricornis*. Hos sidstnævnte Art er Hovedets Overflade hos den voxne Hun (Tab. VI, Fig. 4) kun svagt fordybet mellem Øjnene, medens den hos den voxne Han (Tab. VI, Fig. 41) er meget dybt udhulet paa samme Sted og desuden udstyret med 3 anselige Horn, af hvilke det forreste sidder uparret fortil, de andre lateralt ved Øjnenes bageste Inderhjørne. Desuden er særlig 1ste Kropring langt tykkere og stærkere hvælvet hos ♂ (Tab. VI, Fig. 4 a) end hos ♀ og desuden paa Oversiden fortil udstyret med 2 mindre, lidt fra hinanden siddende Forhøjninger. (Paa et stort Materiale har jeg kunnet følge hele denne Dannelses gradvise Udvikling fra Dyrene ere halvvoxne til de blive fuldvoxne. Hos ganske smaa Hanner og mindre Hunner er Hovedets Overflade mellem Øjnene endogsaa plan.) *C. quadricornis*, af hvilken jeg ikke har haft fuldvoxne Stykker, synes at vise lignende Forhold. Tilstedeværelsen af saadanne Horn paa Hovedets Overside og paa første Kropring hos Hannen kjendes, saa vidt jeg véd, ellers ikke hos nogen Crustacé, ja Hornene svare baade i Form og Stilling særdeles godt til dem, man træffer hos Hannerne af adskillige Skarabæer.

Indenfor Slægten *Eurydice* træffes betydelige Kjønssforskjelle i flere Legemsdele. Jeg kjender imidlertid af nogle Arter ikke voxne Exemplarer af begge Kjøn, og desuden synes der ogsaa, saavidt mit Materiale kan vise, at være betydelig Forskjel imellem de enkelte Arter, idet Kjønssforskjellen hos én Art er langt større end hos en anden. Jeg vil derfor her indskrænke mig til at omtale Kjønssforskjellene hos den Art, hvor jeg har fundet dem stærkest udviklede, nemlig hos *Eur. elegantula*. Hos denne Art er hos Hannen Kroppen betydelig smallere og i Forhold til Halen kortere end hos Hunnen, Halen er langt kraftigere og sidste Haleled større, men, mærkeligt nok, ere Uropodernes Svømmehaar kortere hos Hannen end hos Hunnen. Øjnene ere større og lidt anderledes formede; første Par Antenner er langt større, deres Skaft og især deres Svøbe ere anderledes formede, og Svøben har et ganske anderledes mægtigt Udstyr med Sandsebørster hos Hannen end hos Hunnen. — Ikke voxne Hanner ligne som sædvanlig Hunnerne meget.

3. Gode Artskarakterer kunne hentes fra: Øjnenes Form og Farve og til Dels, skjøndt ofte i ringere Grad, fra deres Størrelse og Granulering, Antennulernes Skaft og til Dels fra deres Svøbe (den sidste maa dog ofte benyttes med Varsomhed), Antennernes Skaft og særlig den relative Længde af dets Led (samt Svøbens Længde, naar denne benyttes med stor Forsigtighed), Pandepladens Form, Clypeus og undertiden Labrum, Epimererne, særlig Formen af deres ydre Baghjørner og deres Stribning, Kropbenenes yderst forskjellige Bygning, de 5 forreste Haleleds Sidehjørner, sidste Haleleds og Uropodernes Form samt Udstyr med Torne og Svømmehaar. Meget ofte afgive ogsaa Kropleddenes Udstyr med Striber, af og til ogsaa Halens Skulptur eller Udstyr med Haar paa Rygsiden, Formen af de forreste Pleopoder og endelig Formen af Appendix masculina gode Artsmærker.

Et Mærke, der nok kan være godt, men dog maa benyttes med Varsomhed, er Legemets Længde i Forhold til dets Brede, thi her spiller Dyrets Kontraktionsgrad (hvad jeg oftere har bemærket) en stor Rolle. Kontraktionsgraden og Dyrets mere eller mindre bøjede eller af Blod mere eller mindre oppustede Tilstand har ligeledes en stor Indflydelse paa det Billede, man faar af Epimerernes Form (se særlig Tab. VIII, Fig. 1 a og 1 o), thi de fleste af disse kunne enten blive næsten halvt dækkede eller helt frie; jeg vil endog lægge særlig Eftertryk paa dette Forhold, da Epimerernes Form altid beskrives, men et Par af deres bedste Mærker, nemlig deres Baghjørner og deres Stribning, ikke altid paaagtes. Et andet af samme Grund temmelig upaalideligt Mærke er Antallet af de ovenfra synlige korte Haleled, og naar Forfattere bruge det som et vigtigt Mærke, at de kunne se alle 5 eller kun de 4 af disse korte Led, saa er det absolut forkasteligt, thi det veksler ofte noget indenfor Individet af samme Art. Antallet af Led i Antennulernes og Antennernes Svøber er ofte yderst vanskeligt at tælle, ved højere Tal ikke konstant, og desuden er Ledantallet i det mindste ikke altid (vel næsten aldrig) saa stort hos halvvoxne som hos udvoxne Exemplarer; hvor langt Antennesvøberne naa tilbage paa Dyrets Krop er brugeligt, naar man ikke regner for subtilt, men tager Hensyn til Antennens egen mindre Variation og til Kroppens Kontraktion. Farven af Spiritusexemplarer er selvfølgelig oftest af ringe Værd, det vigtigste her bliver, i hvilken Grad de ofte tilstedeværende, sorte, sædvanlig ganske holdbare Stjernepletter ere fremtrædende.

Formen af de 5 forreste Haleleds Sidehjørner afgive særdeles ofte gode Artsmærker, men jeg har kun benyttet dem i mindre Grad, da de ere vanskelige at beskrive godt, de forreste tilmed ofte vanskelige at se, og jeg desuden havde gode Mærker i Overflod. I Profil-Figurerne af de hele Dyr ere disse Hjørner altid tegnede med Omhu, saa de kunne benyttes til en vis Grad, men disse Figurer kunne ikke vise alle herhen hørende Forhold, særlig ikke Indbøjningerne paa Halens Underside; hvis dette skulde have været udtømmende behandlet, havde en Række nye Tegninger været nødvendige.

Det kan ogsaa her bemærkes, at mine Afbildninger vise adskillige andre gode Artskarakterer (saaledes Kropsegmenternes Stribning ved Epimererne), der oftest ikke ere medtagne i Texten, da denne saa vilde svulme yderligere i ikke ringe Grad.

4. Som Mærker for Slægter ere kun faa Forhold benyttede, særlig Differenser i 2det Par Antenner, Munddele og Halefødder. Af disse skulle her kun Halefødderne omtales lidt nærmere. Hos *Conilera* ere første Pars Stamme (Tab. V, Fig. 1 b) bleven betydelig forlænget og udstyret med et større Antal (8—9) Heftekroge, begge Grene ere blevene fast chitiniserede og Indergrenen desuden forlænget og forsynet med en retlinet Inderrand; ved hele denne Omdannelse er dette Par Haleben blevet indrettet til at danne et stort Laag, der fuldstændig dækker over de 4 næste Par, og Laagets 2 Halvdele holdes ved det forøgede Antal Heftekroge (af hvilke man ellers kun træffer c. 4) udmærket fast sammen i Midtlinien. Laaget forekommer mig at være baade fortræffelig og simpelt af Konstruktion, og jeg kjender ikke nogen anden Isopod, der er forsynet med et Laag af en saadan Bygning, thi Laaget hos *Munnopsidæ*, *Munna*, *Janira* o. s. v. er bygget paa en ganske anden Maade og forskjelligt hos de 2 Kjøen, for ikke at tale om det vel kjendte Laag hos *Idotheidæ*. — Hos *Eurydice* er Pleopodernes Stamme (Tab. V og VI, flere Figurer) forholdsvis betydelig længere end hos nogen af de andre her behandlede Slægter (undt. *Conilera*). Dernæst er Uropodernes Stamme kun forlænget meget lidt indad og bagud, og dens Indergren faar derved en meget kort Tilledning, hvilket ere Bygningstræk, der kun findes hos denne Slægt og, om just ikke altid i saa høj Grad, hos *Cymothoerne* og deres Unger. (Om *Cymothoa*-Ungernes pelagiske Levevis se senere; at de voxne *Cymothoer*, skjøndt ikke svømmende, have til en vis Grad beholdt nogle af de Bygningsstræk, man finder i deres Ungers Uropoder, kan ikke gjøres gjældende mod Rigtigheden af de følgende Udtalelser.) Det er ganske mærkeligt, at hos de Former af *Cirolana* m. fl., der sikkerlig kun svømme lidt, forlænger Uropodernes Stamme sig ud i en lang, bagud og indad rettet Proces, med en temmelig lang Tilledning for Indergrenen, medens de Former, der ere tagne pelagisk (*Cirolana elongata* (Tab. III, Fig. 4 l), *Barybrotes* (Tab. IX, Fig. 3 s)) og i mindre Grad nogle faa andre, som *Corallana*, der vist svømme adskilligt, i saa Henseende danne en vis Tilnærmelse til Bygningen hos *Eurydice* og *Cymothoa*-Ungerne. Man kan altsaa slutte, at til en vis Grad er Længden af den nævnte Proces af Uropodernes Stamme (og af Indergrenens Tilledning) omvendt proportional med Halens Udvikling som Svømmeredskab, thi Haleviften maa absolut være det vigtigste Redskab til hurtig Svømning hos de pelagisk levende Former. Det er vel forøvrigt Tilledningens Længde og den dermed sandsynligvis sammenhængende Grad af Frihed i Bevægelse, der spiller den væsentlige Rolle, men en nærmere Undersøgelse af dette er meget vanskelig at foretage paa disse Dyr, af

hvilke de fleste gode Svømmere ere smaa og temmelig tyndt chitiniserede. Ligeledes kan man sige, at til en vis Grad er Halens Længde i Forhold til det øvrige Legeme og dens kraftige Udvikling ligefrem proportional med dens Udvikling til Svømmeredskab. Dette vil blive indlysende ved en Sammenligning af mine Figurer indbyrdes og et Blik paa Schiødtes Figurer af *Cymothoa*-Ungerne. — Til nærmere Belysning af den her fremsatte Betragtning kan det vel anføres, at hos *Sphæromidæ*, der enten slet ikke eller kun i ringe Grad kunne bruge deres Halevifte til Svømning, er (undtagen hos *Limnoria*) Uropodernes Stamme fastvoxen med Indergrenen og nogle Haleled indbyrdes fast sammenvoxne; dette forekommer mig at passe udmærket med mine ovennævnte Slutninger.

Kropbenene ere, næst efter Munddelene, sikkert de Organer, der have faaet den forskjelligste og interessanteste Uddannelse. Naar jeg kun bruger et enkelt Forhold som Karakter for Familier og ligeledes ikke benytter adskillige Bygningstræk ved Opstilling af Slægter, saa kan denne Fremgangsmaade synes saa vilkaarlig, at den vist bør begrundes lidt nærmere. Hos en Del Arter af Slægten *Cirolana*, hos *Barybrotes*, alle Arter af *Eurydice* samt af *Corallana* væsentlig kun *C. Warmingii* ere Benene udstyrede med lange Svømmehaar og de bageste desuden omdannede i Formen til Svømning. Disse Svømmehaar ere sædvanlig tydelig rækkestiliede, oftest tæt indenfor en støttende Kant, hos *Eurydice* oftest ordnede i korte Tværrækker ved Leddenes Rande; hos *Eurydice* og *Corallana* ere de simple paa alle Benene, medens de for en overvejende Del ere fjerdannede paa de bageste Par og især paa det bageste Par Ben hos *Cirolana* og *Barybrotes*. Hos alle Arter er det særlig de 4 bageste Benpar, og af disse igjen 6te og især 7de Par, der ere indrettede til Svømning, og dette viser sig ogsaa i, at et eller flere af deres Led blive udvidede, forlængede, udfladede, hvorved de baade selv kunne gjøre Nytte som Aarer og tillige frembyde gunstige Forhold til Anbringelsen af Svømmehaarene. Da 7de Benpar altid er det, der er mest omdannet til Svømning, egner det sig bedst til her kortelig at fremhæve de væsentligste Principer for Omdannelsen. Hos *Barybrotes* (Tab. IX, Fig. 3 q) og nogle af *Cirolana*-Arterne (f. Ex. Tab. I, Fig. 1 s og Fig. 2 e) er paa det nævnte Benpar 2det Led («Epimeren» regnet for 1ste Led) stort, forlænget, udfladet, med 3 skarpe Kanter, langs hvilke de lange, fine, fjergrenede Svømmehaar sidde i en tæt Række, derimod ere Benets følgende Led langt mindre eller slet ikke udvidede, med færre eller næsten ingen Svømmehaar. Hos 2 andre *Cirolana*-Arter er 2det Led hverken forlænget eller udfladet, derimod ere 3die, 4de og 5te Led noget udvidede (Tab. II, Fig. 3 e og Fig. 4 e), nogle ogsaa forlængede, samt ret vel udstyrede med Svømmehaar, særlig omkring bageste Yderhjørne. Hos *Eurydice* (f. Ex. Tab. VI, Fig. 3 g) træffes atter



noget afvigende Forhold, der dog i Principet nærme sig Forholdene hos de 2 sidstnævnte Cirolaner; det samme er til en vis Grad Tilfælde med *Cor. Warmingii* (Tab. VII, Fig. 7 e).

Ved disse orienterende Bemærkninger er Stoffet rigtignok langt fra udtømt, og 4de—6te Benpar kunde ogsaa fortjene Omtale, men jeg antager, at det her sagte er tilstrækkeligt som Vejledning til Studiet af mine Afbildninger, som vise en lang Række her ikke omtalte Forhold. Jeg skal endnu kun gjøre opmærksom paa den mægtige, yderst mærkelige Forlængelse af 3die og 4de Leds Yderparti paa de 3 forreste Benpar hos nogle Arter, særlig hos *Cir. elongata* (Tab. III, Fig. 4 g); disse 2 Led ere rigtignok altid noget fortykkede og udvidede paa Ydersiden, men Udvidelsens Grad er hos den nævnte Art saa paafaldende abnorm og afvigende fra alt, hvad jeg ellers har truffet hos Isopoder, at den fortjener særlig Opmærksomhed.

De øvrige Arter af *Cirolana* og de andre her behandlede Slægter have ikke noget Led paa noget Benpar kjendelig udvidet til Svømning, og længere Haar ere kun tilstede i temmelig begrændset Antal eller mangle næsten ganske. Benenes Form og deres Udstyr er derfor langt fra ens hos de paagjældende Arter; her skal dog kun henvises til de mærkelige, spateldannede, oftest med en Børste udstyrede Torne paa de 4 bageste Benpar af *Cir. orientalis* (Tab. IV, Fig. 4 d, Fig. 4 e og Fig. 4 f) og til de interessante, smukt grenede Børster paa nogle Led af de 4 bageste Benpar hos Arterne af Slægten *Corallana* (Tab. VII, Fig. 5 c).

Ved Benyttelse af Benenes Udstyrelse til Svømning, deres Tornvæbning m. m. kunde jeg paa mit Materiale godt have skilt Slægten *Cirolana* i 2, 4 eller 5 Slægter, men har ikke villet foretage en saadan Deling, da der, hvad Literaturens rigtignok oftest daarlige Afbildninger til Dels udvise, vistnok existerer Arter, der mere eller mindre ville udslette Grændserne mellem de Slægter, der for Tiden kunde opstilles. Slægterne vilde ogsaa væsentligst blive funderede paa Karakterer, hvis Uddannelsesgrad varierer stærkt hos de enkelte Arter, og den Art af Karakterer ere yderst farlige.

Ungerne af *Cymothoidæ* ere flere Gange tagne pelagisk, og de føre vist alle et pelagisk Liv. Prof. Schiødte har for en Aarrække siden fortalt mig, at Dr. P. E. Müller havde ved Neapel fanget og iagttaget et Dyr, der fosforescerede stærkt og samtidig svømmede udmærket hurtig, hvilke 2 Forhold fremkaldte Forestillingen om «et Lyn», og dette Dyr viste sig at være Ungen af en *Cymothoa*. (Exemplaret er 9,4<sup>mm</sup> langt, dets 7de Benpar er vel udviklet, fuldt saa langt som 6te Par, Appendix masculina naar næsten til Indergrenens Enderand; 6te Haleleds Bagrand, Inderranden af Uropodernes Ydergren, begge Rande af deres Indergren og den bageste Del af Inderranden af Uropodernes kun svagt udtrukne Skaft ere besatte med temmelig korte, tætstillede, fjergrenede Svømmehaar, derimod ere Pleopodernes Rande ganske nøgne.) Denne

Iagttagelse, den eneste jeg kjender om *Cymothoa*-Ungernes Svømmen, forekommer mig meget interessant og passer desuden udmærket med mine ovenfor fremsatte Udtalelser. *Cymothoa*-Ungerne svømme sikkert alene ved Hjælp af Haleviften, thi Pleopoderne miste tidlig deres Randhaar (og ere næppe, selv hos Ungen i 2det Stadium, kraftige nok til at frembringe en hurtig Svømmen), og Benene mangle ganske Svømmehaar. Arter af Slægten *Eurydice* ere (se senere) baade kjendte som ypperlige Svømmere og tillige som i det mindste for en Del pelagisk levende Dyr; de svømme vistnok ogsaa væsentlig, naar det skal gaa hurtig, ved Hjælp af Haleviften, men desuden have Pleopoderne meget lange Randhaar, og særlig de bageste Ben ere ret godt indrettede til Svømning (se Tab. V og VI)<sup>1</sup>). Hos *Barybrotos* (Tab. IX) og den pelagiske *Cir. elongata* (Tab. III) er Haleviften ikke (se ovenfor) saa fuldkommen indrettet til pelagisk Liv, men saa ere til Gjengjæld Kropbenene udmærket indrettede til Svømning, og der er Sandsynlighed for, at de bruge disse meget til en roligere Fremroning (smlgn. Mysidernes Færd), og Halen eller maaske Hale og Ben sammen, naar de ville hurtig afsted.

Man har saaledes meget forskjellig Udvikling af Svømmeredskaber hos Former, der væsentlig eller udelukkende ere tagne svømmende i det aabne Hav. Paa den anden Side bør det ogsaa fremhæves, at Former, som have Kropbenene i høj Grad omdannede og ypperlig indrettede til Svømning, sjældent eller aldrig ere tagne pelagisk, og som et smukt Exempel herpaa kan nævnes *Cirolana borealis*, der svømmer meget godt (se senere), men hvis Hale er kortere, og hvis Halevifte næppe er fuldt saa godt indrettet til Svømning som de pelagiske Former. (Sammenlign hermed *Munnopsiderne*, der ere Bunderdyr, men hvis 3 bageste Benpar, særlig hos Slægten *Eurycope*, ere ypperlige Aarer.)

<sup>1</sup>) Boas skriver (op. cit. p. 547) om Isopoderne: «wenn auch die Schwanzfüsse [maa betyde Pleopoderne], jedenfalls bei vielen (ich selbst beobachtete es bei *Idothea*, *Eurydice* und *Sphæroma*), im Stande sind als Schwimmwerkzeuge zu wirken, so ist das Schwimmvermögen jedoch beschränkt und die Thiere werden meistens schnell müde». De 3 nævnte Slægter kunne imidlertid ikke sammenstilles uden videre i saa Henseende; de 2 bageste Par Pleopoder ere hos *Sphæroma* ubrugelige til Svømning, og Dyret svømmer ikke godt; *Eurydice* er derimod (se senere) en aldeles fortrinlig Svømmer, og jeg troer at turde benægte, at man, naar den farer rask afsted, kan se, hvilke Organer der bruges. Forøvrigt kan jeg ikke indse, at Pleopoderne ifølge deres Form og Indledning skulde kunne frembringe en hurtig Svømning.

## IV. Mundens Bygning.

### I. Familien Cirolanidæ.

Hos de af mig undersøgte Slægter: *Cirolana*, *Conilera* og *Eurydice* er Mundens Bygning saa ensartet, at den kan behandles under ét, og det eneste Forhold, der har generisk Værdi, blive fremhævet tilsidst i den latinske Oversigt. Da Bygningen af de enkelte Dele viser smaa Differenser hos de enkelte Arter, ere Munddelene afbildede mere eller mindre fuldstændig af 5 Arter, fuldstændigst af *Cir. borealis* Lilljeb. (Tab. I, Fig. 1 b—1 n), der er valgt til Type, dernæst af *Eur. elegantula* m. (Tab. V, Fig. 2 c—2 l), endelig af *Cir. elongata* M.-Edw. (Tab. III, Fig. 4 b—4 f), *Cir. minuta* m. (Tab. IV, Fig. 1—1 c) og *Cir. japonica* m. (Tab. IV, Fig. 2 b—2 f). Jeg nøjes her paa de fleste Steder med at henvise til Figureerne af *Cir. borealis*.

#### a. Hannen og den ikke æggebærende Hun.

Munddelene, der indtage den største Del af Hovedets Underside (Tab. I, Fig. 1 b), danne tilsammen et næsten halvkugleagtig hvælvet, meget betydelig udstaaende Parti.

1. Clypeus og Labrum (Fig. 1 b, b og c og en Mængde Afbildninger paa Tab. I—VI af de enkelte Arters Hoved, set nedenfra) ere altid af en ret anselig Størrelse, umiddelbart synlige nedenfra, og de ligge altid i Planer, der ikke afvige i høj Grad fra det vandrette Plan. — Labrum er altid temmelig stor, mere bred end lang, pladedannet, fast chitiniseret, uden Haar, og dens lidt udrandede Bagrand dækker lidt af Mandiblernes forreste Parti. Clypeus er altid bredest bagtil og dér kun lidt bredere end Labrum, dens bageste Sidehjørner omfatte Labrums forreste Sidehjørner og støde op til Kindbakkens forreste Leddeknude; den er omtrent trekantet og støder fortil op til Lamina frontalis (a) eller dennes Æquivalent i Beliggenhed, men forøvrigt er den yderst forskjellig i Habitus, thi oftest er dens frie Overflade plan, og ofte er enten dens forreste Del eller hele dens øverste Parti (set nedenfra) trukken ud i et udad og fremad rettet Horn, der saa dækker over Roddelens Forbindelse med Pandepladen.

2. Kindbakkerne (Fig. 1 b, d, Fig. 1 c—1 f) afvige betydelig fra alle andre Isopoders, og det bør, i Modsætning til flere af de følgende Familier, strax fremhæves, at

deres lige til Apex brede, yderste Halvdel væsentlig kun dækkes af den let bevægelige Kjæbefodspalpe, og altsaa let kan bringes til Syne uden Vold. Hyer Kindbakke er, set nedenfra og især, naar den er udtagen af sin Leddehule, af en anselig Brede igjennem hele Længden, bredest noget bag Midten (Fig. 1 c). Naar den ses in situ, er dens yderste Trediedel bøjet lige ind mod Midtlinien, hvor højre Mandibels skarpe, haarde og tynde Skjærerand er dækket af venstres; Skjæreranden er lang, og dens Retning divergerer ikke meget eller slet ikke fra Dyrets Midtlinie, dens Baghjørne gaar ud i en anselig, trekantet, spids Tap, og dens foran liggende Del gaar ud i 2, undertiden stærkt (Tab. III, Fig. 4 c), undertiden svagt (Tab. I, Fig. 1 c) udviklede, altid skarpe Tænder eller Flige. Højre Kindbakkes Skjærerand ligner væsentlig venstres, kun ere alle 3 Tænder vel udviklede (Tab. I, Fig. 1 f). Kindbakkernes bageste Halvdel er, set in situ, omtrent parallel med Dyrets Længdeaxe, ja bagtil endog tilsyneladende næsten bøjet indad mod Yderranden, hvilket hidrører fra, at det bageste Yderhjørne (Fig. 1 c, e) er dækket af Hovedets Skelet, og Kindbakken viser af denne og lignende mindre Grunde et noget andet Omrids, naar den er udtagen, end naar den sidder indfæstet (Fig. 1 b).

Pars molaris (Fig. 1 c, c, Fig. 1 f, c og Fig. 1 e) er afsat fra Corpus mandibulæ ved et tydeligt Led med temmelig svag Bevægelse; den har Form af et temmelig langt og smalt (Fig. 1 c) eller kort og bredt, aflang trekantet (Tab. V, Fig. 2 e) Knivsblad, hvis Ryg, der vender bagud, er fortykket og fast chitiniseret, medens det fremad vendte Parti, Knivsbladets Eg, er tyndere og svagere chitiniseret og tæt indenfor Forranden i næsten hele dennes Længde udstyret med en Række af talrige, temmelig smaa, lancetdannede Smaablade. Denne mærkelige «Tyggeknude» er, naar Hovedet ses nedenfra, rettet skraat tilbage og opad i den bageste Del af Svælget (Fig. 1 n, a<sup>4</sup>).

Midt imellem «Pars scissoria» og «Pars molaris» findes paa den mod Hovedet vendte Side af Kindbakken den vel udviklede «Lacinia mobilis» (Fig. 1 c, b og Fig. 1 f, b; Fig. 1 d)<sup>1)</sup>. Den er for største Delen blødhudet og betydelig udhvelvet, dens fremad vendte, forreste Væg er en fast chitiniseret Chitinplade (Fig. 1 d, a), der rager stærkt frem, og som ved Randen er udstyret med en Del korte og stærke Torne. Tæt bag denne Plade findes et lille, chitiniseret Parti med nogle faa Torne (Fig. 1 d, b), og disse svare maaske til «Setæ» hos andre Isopoder.

<sup>1)</sup> Efter fornyede komparative Studier har jeg ændret min i «Dijmphna»-Togtet udtalte Opfattelse af denne Dannelse. Jeg troer nu, at det forreste, faste, fortykkede Parti (tidligere opfattet af mig som «Lacinia mobilis») plus det bagved liggende, blødhudede Parti med sine «Setæ» bør tilsammen opfattes som «Lacinia», en Flig, der dels er blødhudet og bærer Børster, dels fortil fast, at det er dens Forvæg, der ofte forlænger sig ud i en tyk Tap, der maaske kan kaldes «Cuspis laciniæ». Denne og den paa følgende Side omtalte Ændring ville forøvrigt blive udførligere omtalte og oplyste ved Figurer i et større morfologisk Arbejde, der er vidt fremskredet i Udførelse.

Kindbakkens Form i Forhold til dens Bevægelse maa skildres lidt nærmere. Dens bageste Leddeknude er det bageste og yderste, af Hovedets Chitin skjulte, fremspringende Hjørne (Fig. 1 c, e og Fig. 1 f, e). Længst fortil og ud mod Siden ses 2 fremspringende Knuder (Fig. 1 c, d og d'), af hvilke jeg efter gjentagne Forsøg maa opfatte den underste, dybest liggende, som den egentlige Leddetap, den anden som en supplementær Dannelse. Kindbakken drejes altsaa om en Axe mellem forreste og bageste Leddetap; den stærke *Musculus adductor* sidder et Stykke bagtil paa Kindbakkens Inderrand (Fig. 1 c, f), og den svage *M. abductor* paa den modsatte Kant. Et Blik paa Fig. 1 b og Fig. 1 c vil nu forhaabentlig tydelig vise de fleste af de følgende Forhold. Resultatet af en Abduktion vil, paa Grund af Kindbakkens Form og Stilling være, at Labrum løftes, at Kindbakkens Skjærerand løftes betydeligt op og drejes noget udad, og at dette især vil være Tilfældet med dens bageste, højt beliggende, i en lang Tap udløbende Skjærerand. Da *M. adductor* ligger et godt Stykke indenfor Forbindelseslinien mellem Kindbakkens Leddehoveder, vil den alene af den Grund kunne virke med stor Kraft. Enderesultatet er, at Kindbakkerne kunne gabe vidt ud fra hinanden, at den bageste Tand paa deres Skjærerand kan blive løftet højt op over de andre Munddele, og at en Adduktion kan foretages med stor Kraft. — Endnu bør det omtales, at Kindbakkerne ikke ere forbundne med *Paragnatherne* («Labium», *Hypopharynx*), hvis Fliges Yderkant kun dækker en lille Part af dens Overside paa det Sted, hvor den bøjer ind mod Midtlinien (hvilket til Dels kan ses paa Fig. 1 n).

Kindbakkepalpen udspringer noget foran (Tab. I, Fig. 1 c, p) eller noget bag Midten (Tab. IV, Fig. 2 c) af Kindbakkens Yderrand; 2det Led er meget længere end et af de 2 andre; de 2 yderste og særlig det sidste Led ere vel udstyrede med Haar og Børster.

3. Første Par Kjæber (Fig. 1 g) er næsten af Længde med Kindbakkerne og meget kraftigt. Første Led (1) har en ret mærkelig, trefflig Form, dets Flig (1<sup>1</sup>) er middellang, kraftig og ender med en Udvidelse, der paa Indersiden gaar ud i 3, altid med en svag Ledføjning afsatte, noget procesagtige, mod Enden haarklædte, spidse Torne. Andet Led (2) er vel udviklet, men som sædvanlig kort; tredie Led (3) udvider sig fra Roden stærkt mod Spidsen, dets yderste Del er drejet noget indefter og er i Enden lidt skraat afskaaren, den derved fremkomne indad vendte Rand er lang eller endog paafaldende lang og lidt indbugtet, altid besat med en Mængde lange og kraftige, lidt bevægelige Torne.

4. Andet Par Kjæber (Fig. 1 h) er anseligt, men altid adskilligt kortere end første. Første Led (1) er kort og bredt; andet Led (2) ligeledes kort og bredt, dets Flig (1<sup>2</sup>) middellang og bred, og dennes frie Del kort, rettet noget indad, med en skraat afskaaren, lang, med Børster besat Enderand. Tredie Leds Flige (1<sup>3</sup>)<sup>1)</sup> ere fremadrettede,

<sup>1)</sup> Ogsaa her maa jeg efter fornyede Studier foretage en lille Ændring af min i «*Dijmphna*»-Toget  
Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. V. 3.

middellange eller temmelig korte, paa Inderranden mere eller mindre udstyrede med lange Børster.

5. Kjæbefødderne (Fig. 1 b, g og Fig. 1 i) ere noget længere end Kindbakkerne, altid tydelig 7-leddede. Første Led (Fig. 1 i, 1 og Fig. 1 k, 1) er ganske lille, med en Epipodit (ep), der er mere bred end lang og omtrent af Størrelse med det middelstore, tilnærmelsesvis kvadratiske andet Led. Dette sidste (2) gaar paa den mod Hovedet vendte Side ud i en først indad mod de andre Munddele (Fig. 1 k), derpaa fremad rettet, temmelig kort og bred Flig (<sup>1</sup>), som hos *Cirolana* og *Conilera* er udstyret med 1—3 Heftekroge (u), der mangle hos *Eurydice* (Tab. V, Fig. 2 k). Ledføjningen mellem 3die og 4de Led tilsteder en meget betydelig Bevægelse i et tilnærmelsesvis vandret Plan; de 4 sidste Led have Form af en meget fladtrykt, i Randene haarklædt, frit over Munddelene liggende Palpe, der er temmelig bred eller endog meget bred ved Midten eller lidt bag samme, smallere mod Enderne (Tab. IV, Fig. 1 c).

6. Paragnatherne (Fig. 1 n, f) ere temmelig lange, paafaldende smalle, fra Roden udefter stærkt divergerende; deres Yderkant dækker fortil lidt af Kindbakkens Inderkant, deres lille, spidse Ende er bøjet indad mod Midtlinien. Svælget er langt, smalt (Fig. 1 n, g); dets Sider begrænses af blød, muskelfyldt Hud.

#### β. Hunnen med Æggeplader.

Denne afviger kun fra den unge Hun i Bygningen af Kjæbefødderne (Tab. I, Fig. 1 l og Fig. 1 m samt Tab. V, Fig. 2 l). Første Led (1) bærer her en anselig, tyndhudet Plade (a), der hos *C. borealis*, hvor jeg har truffet den noget mere udviklet end hos *Eurydice*, forlænger sig fremad i en smallere Trekant langs andet Leds Inderrand og bagtil danner en bred Flig; Randen er besat med yderst korte, fine Haar. Epipoditen er bleven helt omdannet til en ret lang og meget bred, partielt tyndhudet Plade (ep) og dens Yderrand besat med lange, fjergrenede Haar. Kjæbefodens andet Led (2) har paa sin Yderrand en stor, udadrettet Plade (b), der sender en bred, afrundet Flig fremefter til Forranden af 3die Led; denne Plades Bagrand er fast forbunden med Epipoditens, og dens Yderrand og Forrand besatte med lange, fjergrenede Haar. (Hos *Eurydice* har jeg fundet Randhaarene paa alle Plader særdeles korte og tynde.) Disse Plader ere alle bevægelige

---

fremsatte Opfattelse. De 2 frie, fremadrettede Flige, som jeg dengang antog tilhørte 2, muligvis dog ved en sekundær Deling af 1 Led opstaaede Flige, erkjender jeg nu tilhører et enkelt Led (det 3die), idet det lille Chitinstykke, som jeg dengang antog for 4de Led (op. cit., Tab. XX, Fig. 1 a og Fig. 3 f) har vist sig at ligge tæt under blød Hud, og kan derfor ikke tydes som Chitindelen af et Led. Forøvrigt vise Bygningen og Udviklingen af det 3die Led hos flere andre Malakostrakorder ogsaa, at de 2 Flige, som jeg antog for at høre til 2 Led, virkelig høre til et toffiget Led.

ved en indviklet Muskulatur i deres basale Del. Endelig er Indersiden af andet og tredje Led dunhaaret.

Forreste Par Æggeplader naa med deres Yderrande og deres ydre Forhjørner noget ud over Kjæbefodspalperne. Forranden og forreste Del af Yder- og Inderrand bære Fjerhaar. Om Funktionen af Kjæbeføddernes Plader se ovenfor Side 264—65.

Cirolaniderne ere yderst graadige Rovdyr (se det formbeskrivende Afsnit) og kunne æde sig ind i, ja skelettere Fiske, som de vistnok ofte anfalde som levende. Den stærke Udhvælvning af Munddelene in toto og Beliggenheden af Kindbakkernes lange Skjærerand paa Hvælvingens højeste Punkt bevirker, at Dyrene kunne ligefrem æde sig ind i et stort Legeme. Munddelenes og særlig Kindbakkernes ovenfor udviklede anselige Bevægelighed og Bygning sætte dem i Stand til at bide et ret anseligt Stykke Kjød af. Takkerne paa Kindbakkernes Skjærerand og særlig de to bageste, lange, dolkformede Tænder jages ved Begyndelsen af Bidningsprocessen ind i Kjødet, holde udmærket fast og spile desuden Vævene, saa de lettere klippes over af de skarpe, tæt forbi hinanden glidende Skjærerande. Jeg forstaar ikke ret, hvilken Rolle den mærkeligt formede og rettede Pars molaris spiller, men jeg antager følgende. Naar Kindbakkerne ere abducerede, vil Pars molaris været løftet op fra Svælget og vil vel sammen med *Lacinia mobilis* og første Kjæbepars stærke Torne gribe fast i Enden af det, der skal bides over; naar Kindbakkerne saa adduceres, vil den vel derved kunne føre den afbidte Kjødstump ind i Munden og op i Svælget. Første Par Kjæber, der ere kraftige og med mange stærke Torne paa Fligene, hjælpe sikkerlig med til at holde fast paa Kjødet, maaske ogsaa til at føre det op i Svælget. — Andet Kjæbepars Funktion er vist ikke stor, men jeg kjender den ikke; Kjæbeføddernes Roddele lukke Munden bagtil, men dette Par Mundlemmers øvrige Funktioner ere mig ubekjendte.

Set nedenfra kjendes en Cirolanide let fra alle følgende Familier ved, at Kindbakkerne bøje temmelig pludselig og stærkt indad med deres forreste, brede Ender, der for største Delen ere frie, og venstre Kindbakkes Skjærerand hører op som en noget skraa eller næsten lige, takket Længdelinie nær Dyrets Midtlinie bag en *anselig* Overløbe og adskilligt *bagved en Linie*, trukken paa tværs mellem Kindbakkernes, ved Overløbens Siderande tydelig fremtrædende Forhjørner.

Fra alle Former, undtagen *Alcironidæ*, skilles de desuden let ved, at Kjæbefodspalperne ere særdeles bevægelige, stærkt fladtrykte, temmelig brede til meget brede og stærkt haarklædte i Randene.

## II. Familien Corallanidæ.

Da der er nogen Forskjel mellem de enkelte Arters Mundbygning, vil jeg omtale de 2 i saa Henseende mest forskellige Arter hver for sig (de andre ligge mellem disse Ydergrændser) og begynde med den mindst omdannede Form, *C. tricornis* m., af hvilken jeg rigtignok ikke har givet en fuldstændig Habitusfigur af Munddelene, men denne Mangel kan i det væsentlige udfyldes ved Habitusfiguren af den anden Art, *C. antillensis* m.

### a. *Cor. tricornis* m.

#### a. Hannen samt Hunnen uden Æggeblade.

Munddelene indtage en stor Del af Hovedets Underside. Sete fra Siden (Tab. VI, Fig. 4 a) staa de adskilligt frem, og deres Yderrand fjerner sig fremefter noget fra en med Legemets Længdeaxe parallel Linie, indtil den lidt bag Antennernes Rod ved Mandiblernes Forende pludselig bøjer dybt ind efter. Nedenfra sete danne Munddelene derfor aldeles ingen jævn Hvælving.

1. Clypeus og Labrum (Tab. VI, Fig. 4 b, b og c) ere hos denne Art synlige lodret nedenfra; de ere brede og saa korte, at de tilsammen tage ere omtrent 3 Gange saa korte som brede. Clypeus (b) har Form af en yderst stumpvinklet Trekant, hvis fremad vendte, stumpe Vinkel imidlertid er dybt indkærvet til at modtage den anselige, aflange Lamina frontalis (a). Labrum (c) er omtrent af Brede med Clypeus, lidt afrundet mod Enderne.

2. Kindbakkerne ere særdeles mærkelige. Hver Kindbakkes bageste Halvdel (Tab. VI, Fig. 4 c) danner en noget aflang Firkant, der ses paa Hovedets Underside som en lavt liggende, bred Plade (Tab. VI, Fig. 4 a), hvis bageste Yderhjørne ligger lidt nærmere ved Dyrets Midtlinie end forreste Yderhjørne. Ved Palpens Indledning afsmalnes Kindbakken pludselig til den halve Brede, men bliver saa hurtig højt udhvælvet, gaar noget fremad og derpaa næsten lige ind mod Midtlinien, stadig højt hvælvet holdende samme Brede og efterhaanden løftende sig stærkt op over de andre Munddele, saa at dens distale Halvdel staar meget stærkt frem. Venstre Kindbakke gaar ved Midtlinien (Tab. VI, Fig. 4 b) ud i 3 meget stærke Spidser, af hvilke de 2 forreste (Fig. 4 c og 4 d) ere forholdsvis temmelig smaa og næppe naa Dyrets Midtlinie, og den forreste af dem er desuden vanskelig at se nedenfra; den bageste Spids er derimod en meget lang, lidt krum, trekantet Dolk, der naar langt ud over Midtlinien, og hvis Spids bøjer lidt bagom højre Kindbakkes Corpus. Disse 3 Spidsers Kanter ere skarpe og danne Kindbakkens Skjærrand, der, naar Munden ses nedenfra, paa Grund af denne Bygning gjør Indtryk af at ligge særdeles skraat. Højre Kindbakkes apicale Del er ganske overdækket af venstres, og den



viser et andet Habitus paa Grund af, at den bageste Spids har taget Overmagten i den Grad, at man udvendig fra ikke ser andre, men naar den udtagne Kindbakke ses indenfra (Tab. VI, Fig. 4 f) finder man en enkelt Spids ( $a^1$ ) siddende langt tilbage. Tager man venstre Kindbakke ud og betragter den fra den mod Hovedet vendte Side (Fig. 4 e), ser man en dyb Rende (i) strække sig fra de korte Spidser ( $a^1$  og  $a^2$ ) langt tilbage paa Undersiden, og højre Kindbakkens apicale Del er lagt ind i denne Rende, naar Kindbakkerne ere adducerede. Denne Rende mangler paa højre Kindbakke.

*Lacinia mobilis* og *Pars molaris* mangle ganske paa begge Kindbakker.

Kindbakkernes Leddetappe (Fig. 4 c, d og e) ligge omtrent som hos *Cirolana*, Kindbakkernes Bevægelse maa være vel udviklet ligesom hos sidstnævnte Slægt. De ere ikke forbundne med Paragnatherne. Palpen er slank; første Led er forlænget og er noget længere end andet Led; baade dette og især det korte tredie Led ere vel udstyrede med Haar (Fig. 4 c).

3. Første Par Kjæber (Tab. VI, Fig. 4 g) ere af Længde med Kindbakkerne og særdeles kraftigt. Første Led (1) er kort og plumpt; dets Flig ( $l^1$ ) er middellang, kraftig og ender med et bredere, skjævt, noget fortykket Endeparti uden Børster eller Torne. Andet Led (2) er anseligt, noget bugtet og saa skraat stillet, at dets forreste, udvendig fra afsmalnede Endeparti ligger adskilligt nærmere ind mod Dyrets Midtlinie end dets Baghjørne, hvorved der fremkommer et Indsnit paa Kjæbens Yderrand mellem andet Led og det allerede næsten ved Grunden paafaldende brede og paa Ydersiden bagtil stærkt fremragende tredie Led. Dette sidste (3) er bredt og rettet fremad med sin proximale Halvdel, medens dets distale Halvdel afsmalnes jævnt og bøjer først noget udad, derpaa atter fremad, og ender med en enkelt, kjæmpemæssig, lidt krummet, fremad og indad rettet Torn, der ved Grunden er næsten lige saa tyk som tredie Leds Spids.

4. Andet Par Kjæber (Tab. VI, Fig. 4 h) ere smaa, svage og stærkt reducerede i enhver Henseende. De to Rodled ere spinkle; Kjæbens yderste Halvdel er en svag, aflang Plade, omtrent 3 Gange saa lang som bred, Enden er skraat afskaaren paa Ydersiden med svage Fligdannelser med nogle faa, kortere Haar i Spidsen. Fligdannelserne har jeg ikke kunnet tyde med Sikkerhed; jeg har afbildet dem af *C. antillensis* med stærkere Forstørrelse (Tab. VII, Fig. 4 g og Fig. 4 h).

5. Kjæbefødderne (Tab. VI, Fig. 4 i) ere lidt længere end Kindbakkerne, paafaldende smalle i hele Længden, men ret solide. Rodpartiet ligner meget det, man træffer hos *Cirolana*; det smalle andet Led er lidt længere, og har paa Undersiden (Fig. 4 j) en rudimentær, tilledet Flig ( $l^2$ ) uden Heftekroge. Den smalle «Palpe» er ikke udfladet, dens bredeste Sted er ved Roden af Kjæbefodens 5te Led, der er lige og betydeligt forlænget, længere end 3die og 4de Led tilsammen. Sjette Led gaar fortil ud i en

lille Flig, og udenfor denne træffer man det ganske lille syvende Led. Hele Palpens Behaarig er sparsom, stærkest ved Spidsen.

6. Paragnatherne (Tab. VII, Fig. 1 c og Fig. 4 c, h) ere fremefter stærkt divergerende og minde noget om *Cirolana*'s, men ere meget bredere og noget anderledes formede. Deres forreste Yderparti gaar ind under første Par Kjæbers distale Parti (Fig. 4 c) og noget op paa Indersiden af Kindbakkerne, hvor de fremtræde udvendig som en blød Liste (h<sup>1</sup>) omkring det Sted, hvor disse bøje stærkt ind mod Midtlinien. — I Rummet mellem og under Paragnatherne finder man den bløde, muskelfyldte Hud (Fig. 1 c, m), der paa hver Side begrænder det smalle, sribeformede Svælg (p); fortil er denne Hud forbunden med Underranden af den, der beklæder Clypeus' og Labrums Inderflade (l), og paa det Sted, hvor denne støder op til Svælget (Fig. 1 d), udgaar en uparret, smal, trekantet Klap (q), der (som ogsaa afbildet hos *Cirolana*), strækker sig bagud lige under den Hud, der paa Siderne begrænder Svælget.

I højeste Grad ejendommelig for Familien er den anselige, næsten haarløse Hulhed, der er smallest og dybest fortil, og som fortil er begrændset af Kindbakkerne, bagtil først af Kjæbefødderne, længere fremme og paa Siderne af første Kjæbepar, forrest og dybest inde af de tydelige Paragnather.

#### β. Hunnen med Æggeplader.

Denne afviger, ligesom hos *Cirolana*, væsentlig kun ved Bygningen af Kjæbefødderne (Tab. VI, Fig. 4 k). Deres Pladedannelser er her blevne noget større end hos *Cirolana*. Dette gjælder særlig om 1ste Leds Plade; Epipoditens Plade har faaet en stor, fremad og lidt udad rettet Flig med dunhaaret Rand; andet Leds Plade strækker sig fremefter ud under Roden af Kjæbefodens fjerde Led, og dens fjergrenede Randhaar ere usædvanlig lange. Kjæbefodens 2det—5te Led ere dunhaarede paa Inderranden.

Andet Kjæbepar har faaet nogle faa Haar langs Yderranden.

Første Par Æggeplader, hvis Rande ere haarløse, naa næppe udenfor Kjæbeføddernes Plader.

#### b. *Corallana antillensis* m.

Munden hos denne Art (Tab. VII, Fig. 4 c) afviger væsentlig ved, at den i de fleste Ejendommeligheder for Slægtens Mundbygning er naaet en Del videre end *C. tricornis*.

1. Clypeus og Labrum ere her endnu langt kortere end hos *C. tricornis*, aldeles ikke synlige lodret nedefra, da de mægtige Kindbakker hvælve sig frem og ud over dem; de ere kun synlige omtrent forfra og udgjøre en meget bred og yderst kort Dannelse, der staar næsten lodret mellem Lamina frontalis (a) og Kindbakkernes Forrand.

2. Kindbakkerne (Fig. VII, Fig. 4 c, Fig. 4 d og Fig. 4 e) ere betydeligt mægtigere end hos *C. tricornis*, staa med deres distale Parti mere ud fra Hovedets Underside og naa meget længere frem, lige til Roden af Antennerne. Deres distale, indadbøjede Parti er længere og mere krummet end hos *C. tricornis*; ser man venstre Kindbakke in situ, saa skjønnes det, at den bageste Spids af dens Forende har udviklet sig langt stærkere paa de andre Spidsers Bekostning, der synes forsvundne, og den har udviklet sig saaledes, at den viser sig som en direkte, ikke ved Afsmalning afsat Forlængelse af Corpus mandibulæ, saa at man næppe kunde tyde dens morfologiske Værd, hvis man ikke havde den forrige Art til Sammenligning. Tager man venstre Kindbakke ud og betragter den indenfra (Tab. VII, Fig. 4 e), har man paa dens apicale Del den samme Fure (i) til højre Kindbakkes Indlægning som hos forrige Art, og ved Grunden af denne Fure findes en lille Tand, sikkerlig svarende til den forreste Tand hos *C. tricornis*. (Om denne lille Spids ogsaa findes paa højre Kindbakke er ikke undersøgt.) Den egentlige Leddetap (Fig. 4 e, d) ligger helt inde paa Mandiblens Underside, den lille supplementære Leddeknode (d') ligger paa Underkanten af Forranden.

3. Første Par Kjæber (Fig. 4 c, e) som hos *C. tricornis*; dog er tredie Leds Roddel kortere og dets distale Del endnu stærkere krummet med en endnu længere Torn end hos forrige Art.

4. Andet Par Kjæber (Fig. 4 f) som hos forrige Art; dog ere de i Fig. 4 g og Fig. 4 h gjengivne Fligdannelser noget mere udviklede.

5. Kjæbefødderne (Fig. 4 i) ere forholdsvis smallere end hos *C. tricornis*, særlig andet og femte Led ere længere, smallere og tykkere. Andet og tredie Leds Overflade ere udstyrede med nogle afrundede Knuder; femte Led med 2 Knuder ved Roden og 4 i en Række stillede Knuder nær Inderranden, hvilke 6 Knuder ere kort kegledannede, spidse; fjerde Led har ogsaa nogle faa lignende Knuder.

Hverken Literaturen<sup>1)</sup> eller Etiketterne paa mine Arter af denne Slægt give sikker Oplysning om Dyrenes Levemaade. Jeg maa derfor forsøge ad andre Veje at komme til et nogenlunde sandsynligt Resultat.

Hos flere store Exemplarer (særlig hos det største Stykke af *C. antillensis*) har jeg fundet den af Munddelene omsluttede Forgaard for Svælget opfyldt af en mørkebrun Massè, der meget lignede coaguleret Blod, og som sandsynligvis er kastet op af Dyret,

<sup>1)</sup> *Æga macronema* Bleek. er af Miers (se senere) tydet som en *Corallana*, og hvis denne Tydning er rigtig, saa har Bleekers Bemærkning: «Habite errante la peau de diverses espèces de poissons de la mer de Batavia» stor Interesse og stadfæster mine af andre Forhold dragne Slutninger. Disse vare nedskrevne førend jeg blev opmærksom paa denne Tydning af den Bleekerske Art.

da det blev lagt i Spiritus. (Sammenlign Lyngbyes senere meddelte Iagttagelse om *Cir. borealis*.) Paa en Række Exemplarer af flere Arter er en større Del af Bugsiden betydelig oppustet paa en lignende Maade som hos *Æga*, men dog hverken i saa stor Udstrækning eller i saa høj Grad som hos sidstnævnte Slægt. Hr. Dr. R. Bergh fandt Maveindholdet af *C. antillensis* betydelig fordøjet, men mente dog, at det bestod af tværsribede Muskler.

Kindbakkerne ere ifølge deres Tilledning meget bevægelige, og det maa de ogsaa være for at kunne benyttes, da venstre Kindbakke i Hvile dækker over en saa stor Part af højre Kindbakke, at der kræves en betydelig Abduktion af venstre Kindbakke for, at begges Spidser kunne blive frie af hinanden. Da begge mangle Knuseparti, ere de ganske ubrugelige til Tygning. Endepartiet danner en lang, skarpkantet, haard, lidt krum Dolk, det rager stærkt op over de øvrige Munddele, og hos *Cor. tricornis* træffes desuden paa venstre Kindbakke 2, paa højre 1 skarp Tand, saa at Kindbakkerne kunne bruges paa en noget lignende Maade som hos *Cirolana* til Udklipning af Kjødstumper; hos *C. antillensis* og flere andre Arter ere de nævnte Tænder rudimentære eller mangle, og Kindbakkerne egne sig saa udmærket til i en Fart og med stor Kraft at bide et Hul paa et større Dyr, saa at Blodet flyder stærkt, og de maa, skjøndt det forekommer mig vanskeligt at forstaa, vel ogsaa ifølge Indholdet af Tarmen kunne udrydde eller affænde Kjødstumper. Endepartiet af 3die Led paa første Kjæbepar forekommer mig at være udmærket skikket til kraftig at understøtte Kindbakkens Virksomhed (den ovenfor beskrevne, mærkelige, meget bevægelige Indledning og Form af dette Leds Rodparti passer ogsaa godt hermed). Andet Par Kjæber spiller vistnok en ganske underordnet Rolle. En af Kjæbeføddernes væsentligere Funktioner er vistnok den at hjælpe med til at danne Begrænsningen for den store, skaaldannede Hulhed, der fører ind til Svælget. Svælget er paafaldende langt, og dette peger ogsaa hen paa, at Dyrene ikke ere rene Bloddrikkere, men sandsynligvis i saa Henseende danne en Melleform mellem *Cirolana* og *Æga*.

Jeg antager derfor, at Corallanerne anfælde Fiske eller lavere, større Dyr uden Kalkskal, bide Hul i en Fart, æde noget af Kjødet, drikke det udflydende Blod og forlade derpaa deres Offer; at de forskellige Arter have en noget forskellig Levevis og maaske endog til en vis Grad holde sig til Dyr af forskellige Klasser er sandsynligt paa Grund af Forskjellene i Mundbygningen. Corallanernes Bygning af Ben og Hale tyder ogsaa paa, at de bevæge sig livligt; Uddannelsen af deres Ben viser, at disse ikke bruges til Fasthugning for længere Tid, men dog vistnok kunne anvendes til Fastklamren paa kortere Tid.

Set nedenfra kjendes en *Corallana* let fra alle øvrige Familier ved, at Kindbakkerne bøje stærkt indad med deres forreste, meget anselige Parti, der er bredt, næsten ubedækket, tykt, stærkt udstaaende, og venstre Kindbakke ender med en *meget*

*skraa*, 3-fligget Skjærerand eller med en enkelt mægtig *Dolk*. Formen af de vel udviklede, smalle, ikke udfladede, frit liggende Kjæbefodspalper er ogsaa ejendommelig for denne Familie.

### III. Familien *Alcironidæ*.

De 3 Slægter afvige saa meget fra hverandre, at de bedst behandles hver for sig. Jeg vil begynde med Fremstillingen af den bedst studerede Form. Det kan strax anføres, at jeg ikke har haft en eneste Hun med Æggeblade af nogen Art.

#### a. *Alcirona*.

##### 1. *Alcirona Krebsii* m.

Munddelene danne tilsammen en noget udstaaende Hvælving (Tab. VIII, Fig. 1 b), der dog hverken er saa stor eller saa regelmæssig som hos *Cirolanidæ*.

1. *Clypeus* (Fig. 1 b, b) er overordentlig stor, omtrent af Form som en tværliggende, bred Halvmaane, hvis forreste, ydre Midtpunkt støder op til den pentagonale *Lamina frontalis* (a), og hvis Sidepartier strække sig langs For- og Yderranden af Kindbakkerne langt hen mod disses Baghjørner. *Labrum* (c) er en ganske lille, tværliggende, vandret Plade, beliggende ved Halvmaanens indre Midtpunkt.

2. Kindbakkerne (Tab. VIII, Fig. 1 b, d, Fig. 1 c, Fig. 1 d, Fig. 1 e, Fig. 1 f) have en fra de 2 foregaaende Familiers særdeles afvigende Form og Retning, og stemme derimod i flere væsentlige Forhold med de to følgende Familiers. Set in situ ligner hver Kindbakke en temmelig smal Trekant, hvis korte Grundlinie vender til Siden og bagud og ligger langt fra Hovedets Midtlinie, medens Spidsen (Toppunktet) gaar ind under Overlæbens Sidehjørne; Trekanten skraaner altsaa fra Grundlinien fremad og stærkt indad. Udtaget (Fig. 1 c) har den vel en noget anden Form; den afsmalnes noget i Brede fra Basis til henimod Midten, hvor den afsmalnes stærkt og bøjer lidt fremad for saa atter ved den forreste Leddetap at bøje adskillig indad, ligesom den ogsaa stadig afsmalnes noget. Dens yderste Baghjørne (e) er noget udtrukket og dækket af Hovedets Skelet. — Den første Afvigelse fra *Cirolana* og *Corallana* og Overensstemmelse med *Barybrotos* og *Æga* ligger nu i, at Kindbakken lige fra Basis skraaner betydelig indefter, hvoraf følger, at dens forreste Leddetap kommer til at ligge meget nærmere ved Hovedets Midtlinie end dens bageste Leddetap; Vinklen mellem Kindbakkens distale Parti udenfor forreste Leddetap og dens *Corpus* er meget stump, og af begge disse Forhold følger, at den Adduktion og Abduktion, Kindbakkens Apex kan udføre, bliver temmelig lille. Den anden Afvigelse fra de 2 forrige Familier er, at et Stykke af Kindbakkens apicale Del, kun ikke

selve Apex, er, ligesom hos de 2 næste Familier, dækket af Labrum og Paragnatherne, saa at man ser Kindbakkernes Apex stikke frem nede i et Hul, begrændset af Labrum og Paragnatherne.

Venstre Kindbakkens apicale Parti er, set indenfra (Fig. 1 d), tykt til tæt indenfor Spidsen, hvor det udhules til en Grube for højre Mandibels Apex; det ender med en temmelig kort, meget skraa, skarp, svagt 3-fliget Skjærerand, hvis bageste Flig er langt stærkere udviklet end de andre, omtrent ligesidet trekantet. Højre Mandibels Apex (Fig. 1 e og Fig. 1 f) har en lidt anden Form, dens Skjærerand er ved et dybt Indsnit delt i 2 Flige, af hvilke den forreste er kortere og bredere, den bageste længere og spids, halvt afsat ved en Fure.

Lacinia mobilis og Pars molaris mangle ganske paa begge Kindbakker.

Palpen er vel udviklet, bygget omtrent som hos *Cirolana*.

3. Første Par Kjæber (Fig. 1 g) er af Længde med Kindbakkerne og kraftig udviklet. De 2 Rodled ligne meget betydelig dem, man træffer hos *Cirolana*, og det samme er Tilfældet med 1ste Leds Flig, der dog afviger ved, at dens udadtil mærkelig udfligede Spidse mangle Torne. Tredie Led er kraftigt, bredest ved Midten og afsmalnes derfra stærkt bagtil og noget fremefter; dets Forende vender lidt indad, er skraat afskaaren og væbnet med 2 tykke, krumme Torne og et Par Smaabørster. Den forreste af disse Torne naar hen til den lille Mundaabnings Bagende.

4. Andet Par Kjæber (Fig. 1 h) er paaafaldende korte, men dog ret brede Plader, med afrundet, bred Forende uden Flige. Det er forøvrigt saa reduceret og omdannet, at jeg ikke tør indlade mig paa en Tydning af dets Elementer.

5. Kjæbefødderne (Fig. 1 i) ligne væsentlig de samme Mundlemmer hos en *Eurydice*; den væsentligste Afvigelse er, at deres proximale, af 3 Led og Epipodit bestaaende Afsnit har brede Partier af blød Hud imellem Chitinstykkerne. Andet Led mangler Flig og Heftekroge. Den 4-leddede, ret brede Palpe er meget bevægelig og har børstebesatte Rande.

6. Paragnatherne (Fig. 1 b, h) ere særdeles mægtige, ret tykke, nedenfra for en stor Del synlige Plader, der naa meget nær og maaske som oftest helt sammen i Midtlinien i Størstedelen af deres Længde og strække sig saa langt fremefter, at de med et ret bredt Endeparti dække over Kindbakkernes subapicale Dele og naa frem til Labrums Bagrand; deres forreste Inderhjørne er skraat afskaaret, saa at de her ikke naa sammen i Midtlinien, men efterlade et Hul, der fortil begrændses af den emarginerede Overlæbes Midte, og i dette Hul ser man Spidsen af Kindbakkerne stikke frem (samlgn. *Æga* og *Cymothoa*). De ere i det mindste i en stor Del af deres Længde ikke forbundne med og vistnok helt frie af Kindbakkerne.

De 6 af de 7 Exemplarer af denne Art ere tagne i Gjællehulen af forskellige Fiske, kun om den eneste fundne Han findes ingen Oplysninger. Alle 6 Hunner og særlig de 2 største Exemplarer vare opsvulmede og udspilede som en blodfyldt *Æga*, og Indholdet af Tarmen af det bedst bevarede Stykke er ifølge Dr. Berghs Undersøgelse vistnok Blodkoagulum.

Mundbygningen forekommer mig at stemme vel overens med Opholdsstedet for Hunnerne og med Indholdet af disses Tarm. Kindbakkerne ere ikke i Stand til at dreje deres Spidser synderlig langt ud af Munden, derimod ere de baade ifølge deres Bevægelse og Formen af deres apicale Parti med den meget korte Skjærerand udmærket skikkede til at bide et mindre Hul; deres Spidser virke ogsaa i et temmelig smalt Rør, der vistnok godt kan tjene som Sugerør og hvis Munding, som ovenfor omtalt, begrænses af Labrums Midte og Paragnathernes forreste Inderkanter. Første Kjæbepars 2 stærke Torne paa det kraftige 3die Led hjælpe sandsynligvis til at gribe fat i det, der skal behandles af Kindbakkerne. Andet Par Kjæber spiller vist en ganske underordnet Rolle, og Kjæbeføddernes Funktion er vist ogsaa temmelig lille, men hvori den egentlig bestaar, kan jeg ikke angive.

## 2. *Alcirona insularis* m.

Denne Art (Tab. VIII, Fig. 2 b—2 f) stemmer i alt væsentligt overens med *A. Krebsii*; de væsentligste Afvigelser ere, at Overlæben (Fig. 2 b, c) er noget længere, Kindbakken kortere med bredere Røddel og venstre Kindbakke (Fig. 2 c) har (saavidt jeg efter Undersøgelsen af den ene Side af et enkelt lille Exemplar kan skjønne) en ganske lille *Lacinia mobilis* lidt bag Spidsen. (Højre Kindbakke er ikke undersøgt.)

## b. *Lanocira Krøyeri* m.

Munddelene in situ staa temmelig lidt frem, og fra Bagranden af Labrum skraane de bagud betydelig nedad.

1. *Clypeus* (Tab. VIII, Fig. 3 b, b) er temmelig lille, ikke dobbelt saa stor som Labrum, svagt halvmaanedannet og dens bageste Sidehjørner naa næppe saa langt tilbage som Labrums Bagrand. Labrum (Fig. 3 b, c) er forholdsvis lidt større end hos foregaaende Slægt, omtrent en halv Gang saa smal som *Clypeus*, over dobbelt saa bred som lang, bagtil udrandet.

2. Kindbakkerne (Fig. 3 c) have en lignende Retning som hos forrige Slægt, men Formen og Bygningen er dog noget forskjellig. Det maa strax bemærkes, at jeg (af Mangel paa Materiale) kun har undersøgt venstre Mandibel. Det bageste Parti er som sædvanlig bredt, men den med bageste Leddeknude udstyrede Del er trukket stærkt bagud. Kindbakken afsmalnes saa meget stærkt indtil Midten, men udvides derpaa atter noget frem-

efter indtil det Sted, hvor forreste Leddeknude findes. Det apicale Parti er omtrent som hos *Alcirona*, men tæt bagved dette har jeg fundet 2 Fligdannelser, som ligge tæt bag hinanden, have tornfligede Spidser og vist maa svare til *Lacinia mobilis* (b) og *Pars molaris* (c). (Jeg tør forresten ikke garantere den fuldstændige Rigtighed af denne Fremstilling, da jeg kun har undersøgt 1 Mandibel af et enkelt, meget lille og ikke godt konserveret Exemplar.)

3. Første Par Kjæber (Fig. 3 d) afviger ligeledes adskilligt fra den forrige Slægts. Første Led og dets Flig ere noget bredere og anderledes formet. Tredie Led opnaar temmelig hurtig sin anselige Brede og afsmalnes saa jævnt ud mod Enden, der er væbnet med en enkelt, meget lang og krum Krog; dernæst er dets bageste Halvdel rettet adskillig indad, men ved Midten bøjer det, saa der fremkommer en stump, indadgaaende Vinkel paa Ydersiden, og dets yderste Halvdel er rettet næsten lige fremad.

4. Andet Par Kjæber (Fig. 3 e) er meget mærkeligt og ret vel udviklet. Hver Kjæbes Hovedmasse udgjør en anselig, omtrent skjæv firkantet Plade, der for største Delen maa svare til 2det Leds Flig og ved dens bageste Yderhjørne findes de 2 korte, men brede Rodled. Pladens Inderrand er ret, forreste Inderhjørne bærer nogle faa Haar, og fra det udgaar en lang, meget smal Flig, hvis Spidse atter bærer en Dannelse, der har Udseende af en bred og lang Børste; denne Flig maa være tredie Leds.

5. Kjæbefødderne (Fig. 3 f) ere væsentlig byggede som hos *Alcirona*.

6. Paragnatherne. Om disse kan jeg ikke meddele Oplysninger af Betydning.

Skjøndt ovenstaaende Fremstilling er noget ufuldstændig og paa enkelte Punkter noget usikker, saa ere de fremdragne Forskjelle i flere af Munddelene saa store, at de fuldt ville retfærdiggjøre min Udskillelse af Dyret fra *Alcirona*. — Om Artens Levemaade véd jeg intet.

### c. *Tachæa crassipes* Sch. & Mein.

Af denne Slægt har jeg kun uddissekeret Munddelene hos den ene Art, *T. crassipes*, men en udvendig Undersøgelse med stærk Lupe af den anden Art, *T. incerta*, har ikke vist mig Forskjelle, der kunde tyde paa væsentligere Differentser i de skjulte Dele hos disse 2 hinanden nærstaaende Arter.

Munddelene staa meget lidt frem paa Hovedets Underside (Tab. VIII, Fig. 4 a og Tab. IX, Fig. 1); Overlæben er det højeste Punkt, men ligger dog saa lavt, at den næppe kan ses, naar Dyret betragtes lodret fra Siden.

1. Clypeus (Fig. 1, b) har omtrent en lignende Form og Størrelse som hos *Lanocira*, men jeg har ikke kunnet finde nogen skarp Grændse mellem den og Labrum, der, saavidt jeg kan skjønne, udgjør den mindre, tværliggende Plade paa Bagranden af



Clypeus. Clypeus sænker sig fortil dybt ned til Pandepladens Rod, saa at det faar en stærkt fremadvendt Overflade.

2. Kindbakkerne (Fig. 1, d og Fig. 1 a) stemme meget overens med *Alcirona*'s, dog findes enkelte væsentligere Forskjelle. Deres bageste Halvdel er langt smallere end hos *Alcirona*, og den største Brede ligger lidt bag Midten af Kindbakken, saa at denne herfra afsmalnes noget bagtil. Dernæst er Partiet mellem bageste og forreste Leddeknode noget længere og Partiet mellem forreste Leddeknode og Spidsen adskilligt kortere end hos *Alcirona*. Det yderste Parti gaar jævnt ud i en aflang trekantet, indad og lidt bagud rettet Spids, og paa Kindbakkens Underside (naar Kindbakken ses udvendig fra) findes tæt bag denne Spids en anden, vistnok tilleddet, kegledannet, spids Tap, der vel maa betragtes som en svagt udviklet *Lacinia mobilis*. Højre og venstre (afbildede) Kindbakke ere omtrent ens. Kindbakkernes apicale Parti dækkes væsentlig af Labrum-Clypeus og i mindre Grad af Paragnatherne. — Palpen er i det væsentlige bygget som hos *Alcirona*.

3. Første Par Kjæber (Fig. 1 b) ligner betydelig *Alcirona*'s. Rodleddet er kraftigt; dets Flig er paafaldende lang og naar langt frem foran Midten af 3die Led; Fligens Spids er svagt fortykket, med en enkelt Børste. 2det Led har jeg ikke kunnet sondre sikkert fra 1ste. 3die Led er næsten lige, bredest noget bag Midten og afsmalnet mod Spidsen, der bærer en meget kraftig og anselig, svagt krummet Torn.

4. Andet Par Kjæber (Fig. 1 c) er forholdsvis mindre og mere reduceret end hos nogen anden her behandlet Isopod. Hver Kjæbe danner en lille, aflang, 2-leddet Plade med afrundet, glat Forende, og det frie Endeparti er næppe mere end en Fjerdedel af hele Kjæbens Længde.

5. Kjæbefødderne (Fig. 1 d) ere mere reducerede end hos *Alcirona*. De naa dog næsten frem til Mundaabningen (Fig. 1). Det proximale Afsnit bestaar kun af 2 Led, idet 3die Led er sammensmeltet med 2det Led, der til Dels af den Grund indtager over Halvdelen af hele Kjæbefodens Længde. Fligdannelser mangle. Palpen er som sædvanlig 4-leddet, aflang, pladedannet, men forholdsvis temmelig kort og næppe synderlig bevægelig mod Kjæbefodens proximale Del i Retningen udad og indad; dens Børstestyr er meget ringe, indskrænket til noget faa Børster paa Yderranden af de 3 sidste Led.

6. Paragnatherne (Fig. 1, h og Fig. 1 e) ere tykke, meget brede, adskilte ved et temmelig kort, fortil temmelig smalt, bagtil yderst smalt Melletrum; deres Forende er bredt afrundet med en lille Tap paa forreste Inderhjørne; noget bagved denne Tap ses en lille Udposning, som jeg tyder som et første Spor til den hos *Æga* mere udviklede Inderflig. Paragnatherne naa fremefter helt hen til Labrum, saa at Mundaabningen her begrænses som hos *Alcirona*.

Slægten afviger saaledes fra begge de 2 forrige Slægter især ved Bygningen af Kindbakkernes apicale Parti og ved Kjæbefødderne; fra *Alcirona* afviger den desuden især ved Clypeus' ringe Størrelse og ved kun at besidde 1 Torn paa Spidsen af første Kjæbepars 3die Led; fra *Lanocira* afviger den ogsaa ved det stærkt reducerede 2det Par Kjæber.

De af mig undersøgte Dyr ere sikkerlig ikke voxne; de ere tagne paa Koralklipper. Om Levemaaden vides intet, men det forekommer mig ifølge Mundbygningen sandsynligt, at de leve af at udsuge andre Dyr, dog gaa de, ifølge Mandiblernes Bygning, næppe paa Fiske.

Familien *Alcironidæ* skjelnes uden Dissektion let fra alle de andre Familier ved en Kombination af de to Karakterer: Kindbakkerne skraane betydelig indad fra Roden til Spidsen, og deres smalle apicale eller subapicale Parti er dækket af Labrum og Paragnatherne; Kjæbefødderne ligge frit og have en nogenlunde bred, pladedannet, 4-leddet, *tornløs*, i Randen mere eller mindre *haaret* Palpe. Karakteren hentet fra Kindbakkerne har Familien til en vis Grad fælles med *Barybrotidæ* og *Ægidæ*, Karakteren fra Kjæbefødderne til en vis Grad med *Corallanidæ* og især med *Cirolanidæ*.

#### IV. Familien *Barybrotidæ*.

Af denne Familie kjendes kun 1 Art, *Barybrotos agilis* Sch. & Mein., hvis Mundbygning altsaa beskrives. Det kan ogsaa strax anføres, at jeg ikke har set nogen med Æggeplader udstyret Hun.

Naar Hovedet ses fra Siden (Tab. IX, Fig. 3 b) falder det strax i Øjnene, at Munddelene in toto springe frem fra Hovedets Underside som en anselig, skraat fremad og udad rettet, afstumpet Kegel, og alene dette er tilstrækkeligt til at adskille denne Familie fra de andre her behandlede Isopoder. Sete nedenfra indtage Munddelene et smallere Parti af Hovedets Underside (Fig. 3 c).

1. Clypeus og Labrum (Fig. 3 d) danne tilsammen en anselig, næsten ligesidet Trekant, der fra sin Rod rettes udad og fremad, saa at man, naar Hovedet betragtes lodret nedenfra, kun ser den afrundede Top af Trekanten (Fig. 3 c, b), thi dens frie Overflade vender væsentlig ud mod Hovedets Forende mellem Mandibularpalperne; vil man se Clypeus, maa Hovedet betragtes fra Siden (Fig. 3 b, c) eller forfra. Labrum (Fig. 3 d, b) er en temmelig lille, tværliggende Plade paa Enden af Clypeus; fra Labrums Sider strækker et forholdsvis ret anseligt, blødhudet Parti (Fig. 3 d og Fig. 3 e, c) sig et godt Stykke tilbage langs Sideranden af Clypeus. Labrum har en dobbelt, fast chitiniseret Væg, (Fig. 3 e), og dens Indervæg er mindre end dens Ydervæg. — Clypeus begrænses ved

Roden af en noget indbuet Rand, der med en vel udviklet Leddehud er forbunden med det bageste Afsnit af den store *Lamina frontalis* (Fig. 3 c, a). (Paa Indersiden af *Clypeus* ud mod dens Spidse findes noget indenfor dens Siderande en uregelmæssig Række yderst fine Haardannelser, som synes at være Sandseredskaber (Fig. 3 e).)

2. Kindbakkerne ere fra Roden til Spidsen rettede skraat fremad og betydeligt indad; betragtes Hovedet nedenfra (Fig. 3 c, d) ser man knap deres proximale Halvdel og deres alleryderste Spidse, det meget store mellemliggende Parti er ganske skjult af Kjæbefødderne. Udtaget har venstre Kindbakke (Fig. 3 f) Form af en lang og smal, fremefter nogenlunde jævnt afsmalnende Trekant, hvis bageste Inderhjørne er stumpvinklet, hvis Inderrand er næsten ret fra Roden til nær ved Spidsen, medens Yderranden er temmelig svagt, men bredt indbuet ved Palpens Tilledning. Et Afsnit ved Kindbakkens bageste Yderhjørne (e) er som sædvanlig overdækket af Hovedets Chitin (sammenlign Fig. 3 f med d paa Fig. 3 c). Den forreste Halvdel af Kindbakken hæver sig noget opad fra Hovedets Underside (d paa Fig. 3 b). Det lille, yderste Parti er bøjet betydeligt indad og ender med en kort, i Forhold til Hovedets Længdeaxe svagt skraa Skjærerand, der fortil løber ud i en lidt større og trekantet, bagtil i en ganske lille Tand. Paa Kindbakkens Inderrand findes en ret anselig, langstrakt, ikke synderlig bred og temmelig svagt chitineret Plade (b), der begynder ved Roden af Kindbakkens yderste Trediedel og fremefter naar til Skjærerandens Baghjørne; denne Plades Inderrand har fremefter nogle korte Børster, bagtil gaar den ud i en lille Flig; den maa anses for homolog med *Lacinia mobilis* hos *Cirolana*. Pars molaris mangler ganske. Højre Kindbakke ligner venstre meget, kun er der som sædvanlig lidt Forskjel i Skjærepartiet, særlig synes dets forreste Tap at være lidt længere og lidt mere krummet. — Kindbakkerne ere ikke forbundne med Paragnatherne. Palpen er meget fint udformet; Rodleddet er lidt længere end 2det Led, 3die Led er smalt og noget forlænget; begge de 2 yderste Led have en rigelig Børstebesætning langs Yderranden.

3. Første Par Kjæber (Fig. 3 g) afviger betydeligt fra de foregaaende Slægters, men ligner meget Kjæberne hos en *Æga*. Første Led er middellangt, noget knæbøjet ved Midten, dets temmelig spinkle Flig naar knap til Midten af 3die Led og ender med en lang, kraftig, næsten lige Torn. Andet Led er kun en lille Knude. Tredie Led er langt og paafaldende smalt, set nedenfra næsten lige, set fra Siden noget bugtet for at kunne føje sig efter de foran liggende Munddele; dets yderste Halvdel er noget bredere end Roddelen; paa den skraa Enderand sidde et Par ikke lange, meget stærke, krumme Kroge og nær disse og noget tilbage langs Inderranden nogle kraftige, krumme Børster.

4. Andet Par Kjæber (Fig. 3 h) afviger overordentlig meget fra *Ægernes*, men ligner derimod meget det samme Par hos *Lanocira*. Rodleddet (sammenlign *Lanocira* og *Corallana*) har jeg ikke kunnet finde fuldstændig ud af;

andet Leds Flig er noget kortere end hos *Lanocira*, 3die Leds Flig er lidt kortere og bredere og ender med et Par smaa Haar; Inderranden af 3die og 2det Leds Flige danner en lang, ret Linie. Hele Kjæben er meget tynd, pladedannet.

5. Kjæbefødderne (Fig. 3 b, g, Fig. 3 c, g, Fig. 3 i, Fig. 3 k og Fig. 3 l) afvige aldeles fra de forrige Familiers; de ere omdannede til at omslutte den yderste Halvdel af alle de foregaaende Munddele paa en lignende Maade som, men dog langt fuldstændigere end hos *Æga*, og de ere derfor byggede efter et noget lignende Princip som hos denne Slægt. De ere saa lange, at deres forreste, kantstillede, først noget udad og derpaa stærkt indad bøjede Afsnit næsten naa sammen ved Midtlinien foran den frie Forside af Clypeus. — Første Led er ganske kort (Fig. 3 i), Epipodiet (ep) en ret anselig, oval Plade; 2det Led er temmelig langt uden Inderflig og Heftekroge og 3die Led er kort, begge disse Leds mod Midtlinien vendte Parti er tykt, saa at de to Kjæbefødder her, i knap Halvdelen af deres Længde, kunne slutte tæt op til hinanden med en lodret stillet, ret høj Flade, og paa Grund af denne Tykkelse ved Midten have Kjæbefødderne tilsammentagne en temmelig kjældannet Form. 4de og 5te Led ere sammensmeltede, saa at Sømmen mellem dem endog er forsvunden; det derved fremkomne Led er særdeles langt, saa at dets Forende naar lidt frem foran Labrum, udefter bliver det bredere og krummes desuden til at danne et noget uregelmæssigt Halvrør, saa at dets Yderparti bliver kantstillet og med de yderste  $\frac{2}{5}$  af Længden omslutter Kindbakkerne paa Siden og gaar fortil frem om Clypeus' Siderand; betragter man Kjæbefødderne in situ nedenfra (Fig. 3 c), saa vise de to fjerde Led sig at naa sammen i Midtlinien i de bageste  $\frac{2}{3}$  af deres Længde, ja bøje endog paa en Strækning i Midtlinien nedad mod de underliggende Munddele med Inderranden; i den sidste Trediedel af deres Længde vige de fra hinanden og give Plads til Mundaabningen, der fortil begrænses af Labrum, og i hvilken man ser Spidserne af Kindbakkernø og af første Par Kjæber. Ud mod Spidsen sidder lidt indenfor Inderranden en mindre Længderække af korte, tykke Kroge; forreste Yderhjørne er (Fig. 3 l) udstyret med nogle faa, lange Børster. — Kjæbeføddens 2 sidste Led ere korte og brede og bøjede ind over den fremad vendte Side af Clypeus-Labrum, og naar Munddelene ses in situ nedenfra, ses disse Leds opad vendte (Fig. 3 c), med nogle faa, men stærke, udad rettede Kroge (Fig. 3 k og Fig. 3 l) udstyrede Inderrand foran Labrum.

6. Paragnatherne (Fig. 3 m, h) og den Del af Hovedets Skelet, der bærer dem, springe fremefter stærkt ud fra Hovedets Underside op mellem Kindbakkerne. Heraf følger, at de noget muskelfyldte Plader, der bagtil udspringe fra Hovedets Skelet under Paragnathernes Rod og paa Siderne støde op til Mandiblernes Inderrand (sammenlign Tab. I, Fig. 1 n af *Cirolana*), fremefter gaa over i Huden, der beklæder Indersiden af Labrum og af noget af Clypeus og imellem sig have den Længdespalte, der udgjør selve

Indgangen til Svælget, hos denne Form blive 2 temmelig smalle Baand, der, naar Hovedet ses nedenfra, ligge saa højt over dettes Flade, at de fæste sig til Indersiden af Clypeus ved Roden af dettes yderste Trediedel. Med andre Ord: naar Hovedet med Munddelene ses fra Siden og den nødvendige Præparation tænkes foretaget, vilde man finde den Hud, der beklæder Hovedets Underside mellem Kindbakkernes indre Ledderande, Skelettet ved Paragnathernes Rod og Clypeus-Labrum, rykket saa langt ud mellem Munddelene, at den fortil laa langt nærmere ved Mundkeglens Spids end ved dens Rod. — Paragnatherne (h) selv ere 2 frie, temmelig lange og tynde, ikke synderlig brede, udefter tilspidsede Plader, der først i deres yderste Trediedel vige en Del fra hinanden med Inderrandene og som sædvanlig gaa fremad mellem Mandiblerne og første Kjæbepar.

Den eneste kjendte *Barybrotos*-Art er kun tagen pelagisk; Bygningen af dens Halevifte og dens 2 bageste Par Ben tyder ogsaa paa, at den maa være en udmærket Svømmer. Paa de 3 forreste Par Ben danne 7de Led og Kloen tilsammen vel udviklede Kroge omtrent som hos *Æga*. Man véd intet om Dyrenes øvrige Levevis, og jeg kan derfor kun fremsætte nogle Betragtninger paa Basis af de nævnte Bygningsforhold af Mund og Kropben. Hos intet af mine 5 Exemplarer var Bugsiden opsvulmet; en Undersøgelse af Tarmens Indhold hos 1 Exemplar gav intet Resultat.

Hele Mundens og da særlig Kindbakkernes og i endnu højere Grad første Kjæbepars og Kjæbeføddernes Bygning minde meget om de samme Organer hos *Æga*. Kindbakkerne kunne paa Grund af deres Retning, Tilledning og Kørtheden af den indkrummede, apicale Del ikke fjerne deres Spidser ret langt fra hinanden, derimod ere de udmærket indrettede til hurtigt og sikkert at bide et mindre Hul paa et andet Dyr. Kjæbefødderne omslutte som beskrevet de øvrige Munddele længere fremefter og tillige fuldkomnere end hos *Æga*, thi de lukke endog Mundrøret bagfra lige til Spidsen af første Kjæbepar, medens hos *Æga* en Del af denne Strækning lukkes af andet Kjæbepar, og dernæst slutte de her langt mere ind over Clypeus-Labrum end hos *Æga*. Den Tornvævning, der her træffes ud mod Spidsen paa den øverste Rand af de 3 sidste Led, gjenfindes hos *Æga*, og Funktionen heraf er vist den samme som den, der senere bliver paavist hos *Æga* og især i en simplere og mere klar Form hos *Rocinela*. Ved Sammenligning med *Æga* er der ingen Tvivl om, at man her har en Sugemund for sig, men denne Sugemund er trukken ud i en længere, fremad rettet Kogle. Hele Bygningen synes ikke som hos *Æga* beregnet paa at suge paa samme Sted i et længere Tidsrum, men mere paa at anfælde et andet Dyr, klamre sig godt fast med de 3 forreste Par Kropben, hurtigt bide Hul og suge noget af Byttets Blodvædske i sig, for saa atter at forlade det. Hvilke Dyr *Barybrotos* anfælder, véd jeg ikke, dog formoder jeg, at det ikke er Fiske.

Familien kjendes let fra alle andre Familier paa den skraat fremad rettede Mundkegle og paa de særdeles lange Kjæbefødder med det stærkt forlængede 4de (4de og 5te) Led. (Den stemmer i mange Henseender meget overens med *Æga*, men afviger i flere Karakterer, af hvilke den mest iøjnespringende vel er den aldeles forskellige Bygning og Funktion af 2det Kjæbepar, der derimod stemmer med den forrige Families.)

## V. Familien *Ægidæ*.

Da Mundbygningen indenfor denne Familie ikke er fuldt saa ensformig som de fleste Forfattere synes at have antaget, maa jeg gennemgaa dens Typer for at opnaa en ordentlig Oversigt over Mundens Former og deres mulige Anvendelse i Systematiken, samt endelig for at faa de virkelige Differenser mellem Mundbygningen hos *Ægider* og *Cymothoider* dragne frem.

### a. *Æga psora* (L.).

#### *α*. Hannen samt Hunnen uden *Æggeplader*.

Hovedets Underside (Tab. IX, Fig. 4) er bred og flad; paa denne Flade ses Kjæbefødderne bagtil som en lavere, fremefter som en højere Kjøl, indtil man paa Midten af Hovedets Underside ser Spidserne af alle de andre Munddele omsluttede af de i betydelig Grad kantstillede Kjæbefødspalper ragende frem som en lodret, kort og stump Kegle (Fig. 4 a).

1. Clypeus og Labrum (Fig. 4 b) danne tilsammen en næsten lodret eller svagt tilbagerettet, ret anselig og bred, henimod Midten noget afsmalnet, i Enden bredt afrundet Plade, af hvilken Clypeus (b) udgjør den større Grunddel, medens Labrums fast chitinerede Del (c) er en mindre, oval, tværliggende Plade; om Spidsen og paa Siderne af Labrums Plade samt tilbage langs Clypeus' Siderande findes et forholdsvis bredt, pudeagtigt, blødhudet, fint og korthaaret Parti (d).

2. Kindbakkerne (Fig. 4, d samt Fig. 4 c og Fig. 4 d) have, naar man ser bort fra det i høj Grad skjævt knæbøjede apicale Parti, Form af en aflang Trekant; deres bageste  $\frac{2}{3}$  ses at ligge frit som temmelig flade Plader paa Hovedets Underside og ere fra Roden fremefter rettede meget stærkt indefter Midtlinien; deres sidste Trediedel er, med Undtagelse af den alleryderste Spids, dækket af Paragnatherne, Labrum og især af Kjæbefødderne. Medens de bageste  $\frac{3}{4}$  af hver Kindbakke ere omtrent parallelle med og ikke hæver sig ret meget op over Hovedets Underflade, saa bøjer den sidste Fjerdedel stærkt indad og, naar Hovedet ses nedenfra, stærkt opad, saaledes at Kindbakkens Apex

kommer til at ligge ved Hovedets Midtlinie ved Spidsen af Labrum, altsaa i et, nedenfra set, langt højere Plan end Størstedelen af Kindbakken; den apicale Fjerdedel kommer altsaa til at danne en meget udpræget, men dog stump Vinkel med dens større Roddel, baade naar Kindbakken ses nedenfra (Fig. 4 c) og naar den i udtaget Tilstand ses fra Inderkanten, hvilket Forhold er afbildet hos den noget lignende *Nerocila* (Tab. X, Fig. 3 c). — Kindbakkens forreste Leddeknode (Fig. 4 c, d) findes paa Yderranden netop der, hvor den sidste Fjerdedel bøjer indefter. — Det indbøjede Endeparti er aldeles ikke forbundet med Basaldelen ved Ledføjning eller tyndere Hud, tværtimod strækker den tykke Chitin sig gennem Kindbakkens hele Længde. Omtrent Halvdelen af det indbøjede Parti afsmalnes jævnt og betydelig mod Spidsen, der er trukken ud i en meget haardt chitiniseret, paa højre Mandibel smal og ret skarp Spids (Fig. 4 d), paa venstre Mandibel lidt hagedannet, udenfra set temmelig smal, afrundet Spids. Midt mellem denne Spids og Knæbøjningen ligger paa den ind mod Hovedet vendte Side et lille, temmelig blødhudet Parti uden Børster, maaske Resten af *Lacinia mobilis* (Fig. 4 d). — Paa Grund af Kindbakkens Retning, dens overordentlig lange Tilledning og Korthedden af det frie, indad bøjede Endeparti bliver den Bue, Kindbakkens Spids kan beskrive, temmelig lille, men samtidig bliver Biddet paa Grund af de beskrevne Forhold meget sikkert og kraftigt. — I Inderhjørnet, hvor Kindbakkens forreste Del bøjer indad, er den fast forbunden med Paragnathernes ydre Baghjørne, saa at en stor Del af Paragnathen ofte følger med, naar Kindbakken fjernes fra sit Leje.

Palpen, der er indledet temmelig nær ved Kindbakkens ydre Baghjørne, er temmelig svær; første Led er paafaldende kort, andet meget langt med nogle faa Børster i Spidsen, tredje Led er atter kort med rigelig Børstevæbning paa Yderranden.

3. Første Par Kjæber (Fig. 4 e og Fig. 4 f) ligner meget det samme Par hos *Barybrotos*. Hver Kjæbe er fuldt saa lang som Kindbakken og meget smækker. 1ste Led er paafaldende langt, dets Flig er meget spinkel og ender med en lille Fortykkelse uden Haar eller Torne lidt bag Midten af 3die Led. 2det Led er en lille Trekant. 3die Led er slankt men ret kraftigt, bredest i det proximale Afsnit, dernæst, set fra Siden, noget buftet med opbøjet Endeparti for at kunne passe tæt til de andre Munddele og med Spidsen naa op i Mundkeglen bag Paragnatherne (Fig. 4); den smalle, skraa Enderand er udstyret med talrige, stærke, næsten lidt S-formig buede Kroge (Fig. 4 f), af hvilke de forreste ere langt større end de bageste.

4. Andet Par Kjæber (Fig. 4, f og Fig. 4 g) er forholdsvis langt større end hos nogen af de foregaaende Slægter, og det hidrører fra, at dets distale Parti er, blandt andet, udviklet til at hjælpe til med at lukke Sugerøret bagtil. Første Led er lille; 2det Led er temmelig kort og bredt, dets Flig, hvis Yderrand er sammenvoxen med 3die Led

(sammenlign *Cirolana*) er en meget lang og bred, udefter noget kantstillet Plade. Det yderste Parti af Munddelen dannes af en ret anselig, afrundet Plade med nogle noget bagud rettede Kroge langs Inderranden, og denne Plade anser jeg for at være homolog med 3die Leds Flig ( $l^3$ ) hos *Cirolana*; indenfor Pladen findes en noget kortere, smal Flig med Torne i Spidsen, dens Inderrand er en direkte Fortsættelse af 2det Leds Fligs lange, paa en lang Strækning retlinede Inderrand, og jeg er tilbøjelig til at antage denne lille Flig for en Endepoces af 2det Leds store Flig (Fig. 4 g,  $l^2$ ).

5. Kjæbefødderne (Fig. 4, g og Fig. 4 h) ere meget interessante. 1ste Led er kort, med en anselig, næsten trekantet Epipodit ( $g^1$ ). 2det Led er stærkt forlænget, saa at det udgjør Halvdelen af hele Kjæbeføden; det er tyndt ved Yderranden, fortykkes stærkt indefter, saa at dets retlinede Inderrand har Form af en ret bred, lodret stillet Flade, der slutter tæt sammen med den anden Kjæbeføds Inderflade ligesom hos *Barybrotos*; paa Grund af denne Form danner 2det Led af de to Kjæbefødder tilsammen en Længdekjøl paa Hovedets Underside. Leddet løber fortil paa Undersiden (set nedenfra) frem i en temmelig lille, i Spidsen afrundet, krogløs, ikke tilleddet Flig (Fig. 4 h,  $l^2$ ), der ses at stikke lidt frem foran Enden af 3die Led indenfor det noget udad bøjede 4de Led. 3die Led er meget kort. De 4 yderste Led af hver Kjæbefod lægge sig i en Bue udenom det distale, til en kort Kegle samlede Parti af alle de øvrige Munddele; de blive fremefter drejede mere og mere paa Kant for at kunne omslutte denne Kegle. Alle 4 Led ere tydelig adskilte og lidt bevægelige indbyrdes; de 2 bageste ere de længste og bredeste, det yderste er lille; Enderanden af sidste Led og den opad vendte Inderrand af næstsidste og tredie sidste samt Spidsen af første Led ere udstyrede med en Række væsentlig udad vendte Kroge.

Mellem Kjæbefodspalperne kan man se alle de andre Munddeles Spidser (Fig. 4); forrest Labrum (c), tæt bagved denne Mandiblernes Apex (d), derpaa Paragnathernes Yderflig (h), derpaa første Par Kjæber, derpaa 2det Par Kjæbers i en stor Yderflig og en lille Inderflig delte Endeparti (f), endelig Fligene fra Kjæbeføddernes andet Led.

6. Paragnatherne (Fig. 4 i) ere korte, brede, tykke og skilte ad igjennem hele deres Længde, men dette falder ikke i Øjnene, da deres Inderrande berøre hinanden fra Roden af og et langt Stykke udefter. Hver Paragnath gjør Indtryk af at bestaa af 2 trinde, spidse Flige, en kortere, fremad rettet Inderflig og en noget længere, omtrent fra Midten betydelig indad bøjet Yderflig, men begge Flige ere sammenvoxne i Inderfligens hele Længde. Mellem Inderfligenes Ender og Yderfligenes Inderrande findes et temmelig lille, aflangt Melletrum. Yderfligenes bageste Yderhjørner ere, som ovenfor nævnt, sammenvoxne med Kindbakkerne; Fligene ligge ovenover og lidt bagved Kindbakkernes apicale Parti, og Yderfligene vise sig i Mundaabningen (Fig. 4, h).



β. Hunnen med Æggeplader.

Jeg har ikke set nogen Hun med Æggeplader af *Æga psora* (L.), derimod af *Æ. ventrosa* M. Sars og *Æ. spongiophila* Semper. Forreste Par Æggeplader ere her saa store, at de dække over Mundaabningen og over alle Munddele undtagen Clypeus og en Del af Labrum samt omtrent Halvdelen af Kindbakkernes Palper. Som Følge deraf kan Dyret i denne Tilstand ikke tage Føde til sig, og man har da heller aldrig truffet en æggebærende *Æga* paa en Fisk. Jeg har af Mangel paa Materiale ikke foretaget en Dissektion, men har slaaet første Æggeplade noget til Side, og det viste sig da, at Kjæbefodens Vifte var særdeles stor, men naaede ikke til Yderranden af Æggepladen, og hele Indtrykket, jeg fik, stemmede overens med den Fremstilling, jeg har givet lidt senere af en æggebærende Hun af den anden Ægide-Slægt *Rocinela*, hvorfor jeg her nøjes med at henvise til denne Form.

*Æga psora* (L.) og adskillige andre Arter træffes som bekjendt ikke saa sjældent paa Huden af Fiske, og man finder oftest deres Tarmkanal mere eller mindre stærkt opsvulmet af Fiskeblod. Det er ogsaa sandsynligt, at alle Arter undtagen den mærkelige *Æga spongiophila* Semper ernære sig paa denne Vis. Den beskrevne Mundbygning er ogsaa udmærket skikket til at skaffe Dyrene den nævnte Næring. Kindbakkernes haarde, fine Spidser ere ypperlig egnede til at binde an selv med en dygtig skjællat og fast Fiskehud, til halvt stikkende og borende, halvt gnavende at frembringe et mindre Hul; deres Bevægelse er lille, men kraftig og sikker, hvilket er af største Vigtighed ved en saadan Funktion. Første Kjæbepars tornvæbnede Spids bidrager utvivlsomt til at kradse Hullet op og udvide det. Derimod antager jeg, at 2det Par Kjæber og Kjæbefødderne have en dobbelt Funktion, af hvilke den ene er at hjælpe til ved Sugerørets Dannelselse. Den anden Funktion er vanskeligere at klare, og for at kunne dokumentere den maa jeg henvise til min følgende Fremstilling af *Rocinela Danmoniensis*. Man ser hos den sidstnævnte Form en stærk Muskel i Kjæbefodens 2det Led, og denne Muskel maa bevirke en Udadrejning, en Abduktion fra Mundkeglen af den korte, med udad rettede Krogtorne forsynede Palpe. Det samme maa sikkert finde Sted her; Palpen har jo udad rettede Kroge langs den frie Overrand, og man kan kun tænke sig den Anvendelse af disse, at de bruges til at kradse med fra Dyrets Midte udefter ved en Abduktion af Palpen. Naar Palperne i adduceret Stilling anbringes fast paa Fiskehuden og derpaa abduceres, ville Krogene gribe fat og stramme Huden, saa at den bliver lettere at bearbejde for Kindbakterne; man kan ogsaa tænke sig, at Tornene bruges til at kradse Overhud og Skjæl til Side for at rense Pladsen, hvor der skal bides. En lignende Funktion udøves vistnok af andet Kjæbepars Torne. Denne Abduktion af Kjæbefødder og

2det Kjæbepar forekommer mig endog næsten nødvendig for at skaffe nogenlunde fri Virksomhed for Kindbakkernes og første Kjæbepars Spidser, baade for at disse kunne naa ind til Fiskehuden og dernæst gnave i den.

Følgende i Kjøbenhavns Zool. Museum opbevarede Arter: *Æga psora* (L.), *Æ. tridens* Leach, *Æ. crenulata* Lütken, *Æ. Stroemii* Lütken, *Æ. magnifica* Dana, *Æ. monophthalma* Johnst., *Æ. arctica* Lütken, *Æ. ventrosa* M. Sars og *Æ. spongiophila* Semper stemme, sete udenfra med stærk Lupe, væsentlig overens med *Æga psora*. De andre af Schiødte & Meinert, Stimpson og Fl. beskrevne Æger kjender jeg ikke af Selvsyn. *Æ. ophthalmica* (M.-Edw.) afviger ifølge Opstillereens Fremstilling noget, særlig ved, at de 2 sidste Kjæbefodsled synes at være sammensmeltede, men om dette er rigtigt, kan jeg selvfølgelig ikke afgjøre; i hvert Fald staar Arten efter Milne-Edwards' Figurer nærmere ved de typiske Æger end ved *Rocinela*.

*Æga spongiophila* Semper, der ifølge Miers (op. cit. n<sup>o</sup> 3, p. 510) er tagen i *Euplectella Aspergillum* baade som omtrent 7 Lin. lang og som voxen paa 19<sup>1</sup>/<sub>2</sub> Lin. Længde, afviger ikke i Munddelenes ydre Habitus fra de andre Æger. Hvad et Dyr med en saadan Mundbygning lever af indeni den nævnte Kiselsvamp, maa Fremtiden klare.

#### b. **Rocinela Danmoniensis** Leach.

##### a. Hannen samt Hunnen uden Æggeplader.

Munddelene af denne Form danne i flere Henseender en Overgang mellem *Æga* og den til Cymothoerne hørende Slægt *Nerocila*. En Sammenligning mellem de respektive Figurer (Fig. 4 paa Tab. IX, Fig. 1 og 3 paa Tab. X) vil vise dette.

Hovedet er mindre bredt og dets Underside ikke saa plan som hos *Æga* (Tab. X, Fig. 1).

1. Clypeus (Fig. 1, b og Fig. 1 a, a) er omtrent dobbelt saa bred som lang og rettet lodret nedad som hos *Æga*; Labrum (Fig. 1, c og Fig. 1 a, b) er derimod rettet bagud og danner en næsten spids Vinkel med Clypeus, dens fast chitiniserede Del er næsten 3 Gange saa bred som lang, dens paa Siderne smallere, ved Over- eller Bagranden bredere, blødhudede Del er ved Midten dybt indbugtet, yderst fint haaret. Naar Munddelene betragtes in situ nedenfra, ser man umiddelbart bag Labrum et Stykke af andet Par Kjæber, ja disse gaa endog med Forenden en Smule ind under Labrum, der altsaa desuden ganske dækker Spidserne af Kindbakker, Paragnather og første Par Kjæber.

2. Kindbakkerne (Fig. 1 b, Fig. 1 c, Fig. 1 d, Fig. 1 e og Fig. 1 f) afvige en Del fra *Æga*'s. Deres Rod ligger ikke saa langt ud til Siden, hvorfor de fremetter skraane noget mindre stærkt indefter (Fig. 1, d). Dernæst er den største Brede omtrent ved Begyndelsen

af den bageste Fjerdedel, og herfra afsmalnes de i Modsætning til *Æga* betydeligt mod Bagranden. Kun omtrent den forreste Trediedel er dækket af de andre Munddele. Den forreste Fjerdedel eller det indad og opad bøjede Parti er her bøjet langt mindre indad end hos *Æga*, ja kun den yderste Del deraf kan siges at være bøjet noget indad; paa venstre Kindbakke (Fig. 1 c og Fig. 1 d) gaar den apicale Del ud i en ret lang, lidt buet, afrundet, skarpkantet, med den ene Rand lidt hageagtig indbøjet Forlængelse, paa højre Kindbakke (Fig. 1 e) er den samme Del langt kortere, trekantet, spids. Tæt bag denne Apex findes paa begge Kindbakkens Inderrand en lille, kegledannet, med skjælagtige Børster udstyret Tap (Fig. 1 c, b og Fig. 1 e, b), der sammen med den bagved liggende, men blødhuede Inderrand maa regnes for Resten af *Lacinia mobilis*; ved Basis af det opad bøjede Parti udgaar fra Inderranden en ret anselig, fladtrykt, afrundet, bagud og noget indad rettet, temmelig svagt chitiniseret Flig (Fig. 1 d, c og Fig. 1 e, c), der vel nærmest maa betragtes som den reducerede *Pars molaris*.

Palpen (Fig. 1 b) er indledet adskilligt længere fra Kindbakkens Rod end hos *Æga*, og den er slankere og har en noget anden Form. 1ste og 3die Led ere længere, 2det Led kortere end hos *Æga* og ikke meget længere end 1ste Led; dernæst er Børstevæbningen paa 3die og 2det Led (Fig. 1 b og Fig. 1 f) bleven noget reduceret og omdannet.

3. Første Par Kjæber (Fig. 1 g) afviger fra samme Par hos *Æga* ved, at 1ste Led er kortere og dets Flig synes at være forsvunden, samt ved at 3die Led er slankere, lige bredt i hele Længden og ender med en enkelt stærk Krog og nogle Børster.

4. Andet Par Kjæber (Fig. 1 h) er adskilligt smallere og endnu noget længere end hos *Æga psora*; den ydre Flig har ved Spidsen kun rudimentær Tornvæbning.

5. Kjæbefødderne (Fig. 1, g, Fig. 1 i og Fig. 1 k) afvige meget fra *Æga*'s; den mest iøjnespringende Forskjel er, at man udenfra uden Dissektion kun er i Stand til at skjelne 3 Led i hver Kjæbefod. 1ste Led er yderst kort, opdages først ved en Præparation, og dets Epipodit er meget reduceret. 2det Led er endnu meget længere end hos *Æga* og over dobbelt saa langt som Resten af Kjæbefoden, men det er da ogsaa opstaaet ved en Sammensmeltning af 2det og 3die Led, og bærer fortil paa Indersiden en Flig i Form af en lille, smal Proces. 2det Led ligger i Midtlinien sammen med sin Kontrapart ganske som hos *Æga*; Palpen divergerer noget fra Midtlinien og bliver ogsaa stillet noget paa Kant. Palpen bestaar, set udenfra, kun af 2 Led, af hvilke det første er ret anseligt, noget længere end bredt og dannet ved en Sammensmeltning af Kjæbefodens 4de og 5te Led; sidste Led er, set udenfra, meget kort, ret bredt og langs Forranden væbnet med 4 stærke Torne; ses dette Led indenfra, opdager man, at dets bageste Halvdel er skjult under det forrige Led, at det er dannet ved en fast Sammenvoxning af 2 Led

(Fig. 1 k), altsaa 6te og 7de Led, og at hver af disse 2 Elementer bærer 2 af Krogene. Naar Munddelene ses i Sammenhæng, er dette tornvæbnede Endeparti oftest til Dels puttet ind under Labrum. — I Kjæbefodens 2det Led findes en mægtig *Musculus abductor* (Fig. 1 i, r) og en svagere *M. adductor* (s) for «3die» Led; i «3die» Led findes en mægtig *M. abductor* (t) og en svag *M. adductor* (u) for det «4de» Led eller Endeledet. Dette Muskeludstyr viser tydelig nok, at en væsentlig Funktion for Kjæbefodspalpen maa være at kunne føres med Kraft ud til Siden og derved bruge sine udad rettede Endekroge; Funktionens Betydning er ovenfor omtalt ved *Æga psora*.

6. Paragnatherne ere i det væsentlige byggede som hos *Æga*.

(Munddelene hos Ungerne af *Rocinela Danmoniensis* synes, efter Undersøgelse af *Pullus stadii* Imi Sch. & Mein., ikke at afvige synderlig fra den voxne Hans.)

#### β. Hunnen med Æggeplader.

Ligesom hos *Æga* er første Par Æggeplader saa store, at det skjuler Mundaabningen og alle Munddelene undtagen den forreste og midterste Del af Labrum, Clypeus og Størstedelen af Kindbakkernes Palper. Ved Hr. Prof. Lützens store Velvillie har jeg kunnet uddissekere Munddelene paa den ene Side af en Hun med Unger af denne Art, og denne Undersøgelse har vist, at der findes paafaldende, til Dels store, hidtil ukjendte Forskjelle imellem Hannen og den yngre Hun paa den ene Side og den æggebærende Hun paa den anden Side i Bygningen af de 3 bageste Par Munddele.

Første Par Kjæber (Fig. 1 l) har 3die Led adskilligt slankere i sin yderste Halvdel end hos Hannen, og dets Yderrand er paa en Strækning fra Midten til lidt fra Roden udstyret med en Del kortere, meget fine Haar.

Andet Par Kjæber (Fig. 1 m) er fra Midten til lidt før Spidsen betydelig bredere end hos Hannen, og det gjør Indtryk af at være udfladet paa Ydersiden; den frie Inderrand er fint dunhaaret, Yderranden er fra Midten til et Stykke fra Spidsen udstyret med c. 8 lange, fjergrenede, i en Række stillede Haar.

Kjæbefødderne (Fig. 1 n) ere omdannede efter et lignende Princip som hos Hunnerne af *Cirolana* og *Corallana*, men rigtignok i en langt højere Grad, saa at Omdannelsen har strakt sig til alle deres Dele. Ser man først paa Kjæbefoden alene uden at tage Hensyn til de tilkomne Plader, saa er den bleven noget kortere i Forhold til de andre Munddele end hos Hannen, dernæst har den tabt noget af sin karakteristiske Form; «Palpen», der ikke er forkortet, er rettet fremad samt paa Inderranden og i Enden udstyret med Dunhaar og nogle længere, fjergrenede Børster, hvorimod Endeledenes Tornvæbning er forsvunden; 2det Led er en Del forkortet

og dunhaaret langs Inderranden. Pladedannelser ere de 3 samme som hos *Cirolana* og *Corallana*, men særlig de 2 af dem have her opnaaet en ganske anderledes mægtig Størrelse. Pladen (a) fra Indersiden af 1ste Led sender en Flig fremefter til Midten af 2det Leds Inderrand og forlænger sig dernæst saa stærkt bagud, at Afstanden fra Bagranden til den nævnte Fligs Forende er lidt længere end selve Kjæbefoden. Paa Tegningen vises en Stribe langs Inderranden slaaet tilbage ud over Pladen, og den er dunhaaret baade i Kanten og paa Inderfladen. Pladen fra 2det Leds Yderrand (b) naar fremefter næsten til 3die Leds Forende, og Yderranden baade af denne og af Epipoditens langt mindre Plade er udstyret med en tæt Række fjergrenede Haar. — Disse Pladers Yderrand naar dog ikke fuldt ud til Randen af 1ste Par Æggeplader.

*Rocinela Danmoniensis* er (Sch. & Mein. op. cit. n<sup>o</sup> 2, p. 389 og Meinert op. cit. n<sup>o</sup> 1, p. 90) ofte tagen frit i Bundskrabe, ifølge Lütken (op. cit. n<sup>o</sup> 3, p. 175) én Gang paa en Torsk; Hunnen med Æggeplader er sandsynligvis tagen med Skrabe. Ifølge de beskrevne Munddele og Tarmens ofte stærkt oppustede Tilstand lever den vist som de fleste *Æga*-Arter af at suge Fiskeblod, men at Arten saa ofte tages frit, tyder paa, at den ofte skifter Opholdssted. Munddelene afvige ikke mere fra *Æga*'s, end at de under denne Slægt fremsatte Bemærkninger maa være tilstrækkelige for Forstaaelsen af deres Virksomhed.

Mundbygningen hos de i Københavns Museum opbevarede øvrige *Rocinela*-Arter: *R. Dumerilii* (Luc.), *R. insularis* Sch. & Mein., *R. maculata* S. & M., *R. australis* S. & M. og *R. signata* S. & M. afviger, set udenfra, meget lidt og væsentlig kun i Labrums Størrelse fra *R. Danmoniensis*. Jeg har uddissekeret Munddelene hos en af de tilsyneladende mest afvigende Arter, *R. signata*. Labrum (Tab. X, Fig. 2) er ganske smal og dækker kun lidet af de andre Munddele; Kindbakkens apicale Parti (Fig. 2 a) er lidt anderledes formet, saa at kun den yderste Spids er bøjet lidt indad, m. m.; jeg fandt ingen Flig udgaaende fra Kjæbefodens andet Led, men kan ikke benægte dens Tilstedeværelse paa Grund af Exemplarets mindre gode Opbevaringstilstand; i alle andre Henseender stemme Munddelene af denne Art forøvrigt overens med dem hos *R. Danmoniensis*. De andre Arter nærme sig i Habitus snart til *R. Danmoniensis*, snart til *R. signata*. Ganske det samme finder Sted med *Alitropus foveolatus* Sch. & Mein. (*Al. typus* M.-Edw. kjender jeg ikke), der i Mundbygningen slet ikke synes at afvige fra en typisk *Rocinela*. Ifølge Hargers rigtignok paa dette Punkt lidt tarvelige Fremstilling (op. cit. n<sup>o</sup> 5) af *Syscenus infelix* Harg. slutter dette Dyr sig ogsaa nær til *Rocinela*, men Formen af Kindbakkerne og særlig deres apicale Parti er dog noget afvigende, hvis Hargers Fremstilling her er fuldt rigtig.

Om de fleste nævnte Formers Levevis véd man intet eller meget lidt; nogle ere tagne med Bundskrabe. *R. signata* er, ifølge Schiødte & Meinert (op. cit. n<sup>o</sup> 2, p. 401), ofte

tagen i Gjællehulen af Fiske, men 1 æggebærende Hun er tagen frit, og begge disse Angivelser forekomme mig at have stor Interesse. — Jeg er temmelig vis paa, at alle Arter ere Blodsugere.

*Rocinela*-Typen (*Rocinela*, *Alitropus*, *Syscenus*) er saaledes nydelig skilt fra *Æga* ved de stærkt omdannede Kjæbefødder, der sete udvendig fra med Lupe hos *Æga* indeholder 6 eller idetmindste (*Æ. ophthalmica*?) 5 tydelige Led med Torne paa flere Leds Overrand (det ombøjede, ikke fremtrædende Rodled er fraregnet), medens man kun opdager 3 Led hos *Rocinelerne*, og Torne findes her kun paa Enderanden af sidste Led. Hvor langt de paapegede Forskjelle i de andre Munddele, særlig i Kindbakkerne, kunne holde, tør jeg af Mangel paa Materiale ikke have nogen Mening om.

I Habitus skjælnes man let en Ægide fra alle de foregaaende Familier (og til en vis Grad ogsaa fra den følgende Familie) ved denne Kombination af Mærker: Clypeus er omtrent lodret, Labrum omtrent lodret eller rettet bagud; Kindbakkernes proximale Afsnit skraaner fra Roden frem efter betydelig indad, deres distale Del er helt eller næsten helt dækket af de andre Munddele; Kjæbeføddernes andet Led er længere end Palpen og de to til hinanden svarende Led slutte sammen i Midtlinien, Palpen er noget kantstillet, omslutende Mundkeglens Sider og tornvæbnet i det mindste i Spidsen.

Førend en nærmere Sammenligning mellem Ægernes og Cymothoernes hinanden nærstaaende Munddele kan anstilles, maa de sidstnævnte beskrives.

## VI. Familien Cymothoidæ.

Denne Familie indeholder de 3 af Schiødte & Meinert opstillede Familier: *Anilocridæ*, *Saophridæ* og *Cymothoidæ*, af hvilke den første og den sidste atter af de nævnte Forfattere ere spaltede i en stor Mængde Slægter. Paa Grund af, at Slægterne ere saa talrige og en Del af dem heller ikke findes i vort Zool. Museum, har jeg ikke her kunnet indlade mig paa en Undersøgelse af saa mange Former, at der kan drages mere specielle systematiske Resultater deraf. Jeg har dog eftersat Munddelene udenfra paa en stor Mængde Former og har saa udpillet 2 Hovedtyper, af hvilke den ene, der blandt andet er ypperlig repræsenteret af en Mængde *Nerocila*-Arter, baade i Habitus og i den finere Bygning nærmer sig meget og indenfor Familien mest til *Rocinela*, medens den anden, der blandt andre er repræsenteret af *Cymothoa*, *Glossobius*, *Ceratothoa*, frembyder hos de voksne det ejendommelige Habitus af en Cymothoide-Mund i sin mest udprægede og fra de andre Typer mest afvigende Skikkelse. Som Repræsentant for sidstnævnte Type har jeg behandlet Mundbygningen af *Ceratothoa Banksii* (Leach).

a. **Nerocila bivittata** (Risso).

Af denne Art har jeg undersøgt ét Stykke paa c. 25<sup>mm</sup> Længde, altsaa af en anselig Størrelse, men det havde endnu Karakteren af at være en Han, idet Kjæbeføddernes Omdannelse (se under *Ceratothoa*) ikke var paabegyndt. (*Pullus stad. II<sup>di</sup>* har jeg ogsaa dissekeret.) De Forandringer, en Cymothoides Munddele kunne under Dyrets Væxt og Skiften, oplyses ved næste Slægt, og Forandringerne, med Undtagelse af Kjæbeføddernes Omdannelse, ere ikke og kunne her heller ikke være nær saa store og tydelige som hos *Ceratothoa* (se senere).

Det vil dernæst her paa de fleste Steder være tilstrækkeligt at skildre Differenserne mellem denne Form og *Rocinela*, da de stemme overens i de fleste væsentligere Forhold.

Betragter man Hovedet med Munddelene nedenfra af den nævnte Han (Tab. X, Fig. 3) og ser bort fra den stærkt fremspringende Pande, Antennerne og lign., saa ere Differenserne imellem denne og *Rocinela* (Fig. 1) ikke synderlig store.

1. Clypeus og Labrum (Fig. 3, b og Fig. 3 a) danne en næsten lodret, bred, anselig, temmelig tynd Plade. Labrum (Fig. 3 a, b) er aflang rektangulær, tværliggende og noget større end den fast chitiniserede Del af Clypeus; udenfor det faste Skelet findes paa hver Side en bred Brømme af blødere Hud, og langs Enderanden af Labrum findes en lang, smallere, i Midten og noget ud til Siden flere Gange noget indbugtet, som Helhed næsten ret Hudbrømme.

2. Kindbakkerne (Fig. 3, d, Fig. 3 b og Fig. 3 c) afvige adskilligt fra Ægernes. Deres distale Trediedel er ganske dækket af de andre Munddele. Den yderste Fjerdedel er drejet vinkelformig og stærkt indad og opad (set fra neden); Resten, det paa Hovedet indleddede Parti, er bredest ved Midten, hvor Palpen udgaar, og den bag Palperoden liggende Del aftager betydelig i Brede bagtil og skraaner i sit Forløb bagud noget mindre ud til Siden end hos *Rocinela*; hele den ubedækkede Del af Kindbakken afviger derfor adskilligt i Habitus fra denne Slægt. Den sidste Fjerdedel af Kindbakken bøjer pludselig indad (Fig. 3 b) og opad (Fig. 3 c) i Vinkler, der nærme sig betydelig til at være rette, og man finder lige saa lidt som hos *Æga* Spor af Ledføjning paa dette Sted, der forøvrigt let gaar i Stykker paa Grund af Kindbakkens solide Forbindelse med Hovedets Skelet og med Pagnathernes Yderhjørne netop ved denne Ombøjning. Det indad bøjede, temmelig korte Parti bliver bredere mod Spidsen, hvor det sammentrykkes stærkt paa skraa og afskjæres noget skraat, saa at Forhjørnet, der tilmed er trukket ud i en haard og spids Tand, kommer til at ligge oppe under Kanten af Labrum, medens den skraa Inderrand retter sig lidt bagud og stærkt nedad i Mundhulen; denne Inderrand danner en ganske

tynd, fortil ret fast, bagtil temmelig svagt chitiniseret Rand. Ethvert tydeligt Spor af *Lacinia mobilis* og *Pars molaris* er forsvundet.

Palpen er hos det voksne Dyr meget forskjellig fra *Rocinela*'s; Rodledet, der er det længste, er stærkt opsvulmet, de 2 andre Led ere temmelig spinkle, sidste længst og forsynet med kortere Børster i Yderrandens sidste Halvdel. Den udspringer kun lidt nærmere ved Kindbakkens Bagende end ved dens forreste Yderhjørne.

3. Første Par Kjæber (Fig. 3 d) er væsentlig som hos *Rocinela*; dog er 3die Led udefter tyndere og krummet noget iadad og dets Spids udstyret med 3 smaa Kroge.

4. Andet Par Kjæber (Fig. 3 e) er væsentlig som hos *Rocinela*, dog lidt kortere og bredere. Inderfligen i Spidsen er yderst lille og ender med en enkelt Krog; Yderfligen har nogle faa Kroge i Enderanden. Dette Sæt Munddele gaar som hos *Rocinela* frem over Spidserne af de foran liggende Munddele og ind under Labrums Bagrand.

5. Kjæbefødderne (Fig. 3, g samt Fig. 3 f og Fig. 3 g) ere ogsaa i det væsentlige byggede og rettede som hos *Rocinela*, men dog lidt afvigende i Habitus, noget mere reducerede, og deres 2 sidste Led divergere noget mere. Første Led har jeg ikke kunnet paavise, dets Epipodit er lille og daarlig afgrændset. Andet Led er meget stort, noget plumpere men dog lidt kortere end hos *Rocinela*; det mangler Flig. Det næste Led (svarende til 4de og 5te Led) er lidt længere og udefter smallere end hos *Rocinela*; det sidste, der ikke kan sondres i 2 Led, er rettet stærkt indefter, aflangt trekantet, indledet som hos *Rocinela*, i Spidsen og langs Inderranden (Fig. 3 g) udstyret med nogle stærke, opad og udad krummede Torne. Muskulaturen i Leddene som hos *Rocinela*.

6. Paragnatherne afvige ikke i væsentligere Forhold fra *Æga-Rocinela*'s.

Som det fremgaar af ovenstaaende ligger den væsentligste Forskjel i Mundbygningen mellem *Rocinela* og *Nerocila* i Bygningen af Kindbakken, baade i Formen af den basale og især i dens apicale Parti samt i Palpens Omdannelse. En nærmere Drøftelse opsættes imidlertid til Slutningen af dette lille Afsnit.

Hos *Pull. stad. II<sup>di</sup>* ere Munddelene og særlig Kindbakkernes distale Afsnit byggede som hos det samme Stadium af *Ceratothoa* (se p. 308); andet Kjæbepar er dog adskilligt smallere.

#### b. *Ceratothoa Banksii* (Leach).

Af denne Form har jeg studeret: *Pullus stadii II<sup>di</sup>*, den voksne Han (omtr. 18<sup>mm</sup> lang), den knap udviklede, store Hun (c. 39<sup>mm</sup>) og den voksne med Æggeplader udstyrede Hun (c. 46<sup>mm</sup> lang). Jeg har derved kunnet paavise, at Ungen i første Svømme stadium (stad. II<sup>di</sup> Sch. & Mein.) har Munddele, der meget ligne den voksne



*Nerocila's*, ja endog ere noget mindre reducerede end dennes og i forskellige Forhold vise mere over mod *Rocinela*; at disse Munddele i Dyrets Hun-Stadium allerede ere betydelig omdannede og have faaet et temmelig opsvulmet Udseende, saa de staa lavere end *Nerocila's*, at disse Omdannelser fortsættes jævnt men smaat, eftersom Dyret udvikles til at blive en næppe voxen Hun, og at den voxne Huns Kjæbefødder endelig ere endnu mere omdannede end hos *Rocinela*.

Af forskellige praktiske Hensyn vil jeg begynde med Skildringen af den ældre, men ikke æggebærende Hun, der giver *Cymothoa*-Munden i sin mest karakteristiske Skikkelse og som man tilmed ofte træffer paa.

a. Den ældre, men ikke æggebærende Hun.

Munddelene indtage, sete nedenfra (Fig. 4), den største Del af Hovedets ret udhævede Underside, og de danne ogsaa selv tilsammen et betydeligt udhævet Parti.

1. Clypeus og Labrum (Tab. X, Fig. 4, b—c) udgjøre tilsammen en overmaade mægtig, iøjnespringende Dannelse, der springer højt op fra Hovedets Underside og, set nedenfra, har Form af henimod Halvdelen af en Cirkelflade eller maaske snarere Kugleflade, idet Forrand og Siderande tilsammen danne en jævn Bue af Form som en Halvcirkel, medens Bagranden er svagt fremadbuget og i Midten lidt udrandet. Forside og Overside ere næsten jævnt afrundede. Den hele Dannelse er saa bred, at den med Sidehjørnerne naar ud til Kindbakkepalpernes Tilhæftning og indtager omtr.  $\frac{2}{5}$  af Hovedets Tværmaal; Længden i Midtlinien er omtr.  $\frac{2}{5}$  af Bredden. Labrum indtager en ret anselig Part af den hele Dannelse, men dens Grændser kunne kun erkjendes ved at afskjære Clypeus-Labrum tilsammen og rense deres indre Hulhed (Fig. 4 a). Grændsen mellem Clypeus og Hovedets Skelet har jeg ikke fundet.

2. Kindbakkerne (Fig. 4, d og Fig. 4 b) ere væsentlig byggede som hos *Nerocila*; dog er deres distale, indad bøjede Parti lidt længere og smallere, og det ender fortil med en lille, haard og skarp Krog; Midtpartiet af den bagved liggende Inderrand er betydelig indbuget, og danner, særlig op mod Endekrogen, en ret fast chitiniseret Kant, medens den bageste Del atter er trukken noget ud i en afrundet Flig (Fig. 4 c), hvis Kant er temmelig svagt chitiniseret. Der er kun ringe Forskjel mellem venstre (Fig. 4 c) og højre (Fig. 4 d) Kindbakkes apicale Kroge og Enderande.

Palpens 2 første Led ere stærkt opsvulmede, 2det Led noget længere end 1ste, aldeles uden Børster paa Yderrandens Forhjørne; 3die Led er temmelig kort, ikke meget tykt, nøgent eller med en enkelt, rudimentær Børste. Palpen udspringer længere fra Kindbakkens Bagende end fra dens forreste Yderhjørne.

3. Første Par Kjæber (Fig. 4 e) er bygget omtrent som hos *Nerocila*, men er dog lidt plumpere. Der findes en lille Rest af 1ste Leds Flig (l<sup>1</sup>) i Bindehuden; 3die Leds yderste Parti er ikke indadbøjet, og det ender med 4 kraftige, i Spidsen indadbøjede Kroge (Fig. 4 f).

4. Andet Par Kjæber (Fig. 4, f samt Fig. 4 g og Fig. 4 h) er væsentlig bygget som hos *Nerocila*, dog ere de yderste  $\frac{2}{3}$  betydelig bredere og blive endda bredere mod det tykke, noget afrundede Endeparti, der som sædvanlig har en smal Inderflig og en bred Yderflig; begge Fliges Endeparti (Fig. 4 h) er noget pudeagtigt opsvulmet og udstyret med talrige smaa, men stærke Kroge.

Hver Kjæbes Inderrand er fri i omtrent  $\frac{2}{3}$  af Kjæbens Længde, og da det fri Afsnit er lige og den indre Del af Kjæben tyk, saa kunne Inderrandene af de 2 Kjæber slutte tæt sammen i Midtlinien paa en lang Strækning. Endelig ere Kjæberne lidt kortere end hos *Nerocila*, saa at man (Fig. 4) foran deres brede, udvendig fra frit synlige Endeparti faar et Mellemrum mellem dette og Labrum. I dette i Midten bredere, paa Siderne smalle Rum ses udefter Paragnatherne (Fig. 4, h) og i Midten et Hul, i hvilket man ser den øverste og yderste Spids af Mandiblerne (d) og bag disse Spidserne af 1ste Kjæbepar.

5. Kjæbefødderne (Fig. 4, g og Fig. 4 i) ere betydelig omdannede, idet de danne en Mellemform mellem Hannens (Fig. 4 o) og den æggebærende Huns (Fig. 4 k). Roddelen er stærkt opsvulmet og meget bred, over dobbelt saa bred som hos Hannen. Andet Led, der hos Hannen er bygget omtrent som hos *Nerocila*, har her faaet sit Yderparti udfladet til en stor Plade, hvis Yderrand er lidt indbuet, medens Baghjørnet og særlig Forhjørnet ere noget tapdannet forlængede; Bredden bagtil er lige saa stor som Ledets Længde. Tredie Led er forholdsvis lidt mindre end hos den tegnede *Nerocila*; det sidste, aflange, temmelig lille Led har en skraa, budt Enderand med et Par smaa Kroge. De 2 sidste Led ligge i Hvile skraat udad langs Forranden af 2det Leds Yderplade, men selv om de strækkes mere fremad kunne de ikke naa Labrums Bagrand. (Det er dette Stadium, Prof. Schiødt i «Krebsdyrenes Sugemund» har beskrevet som tilhørende en Han.)

6. Paragnatherne (Fig. 4, h) ligne betydelig *Æga's*, dog er deres «Yderflig» her bleven bredere og mere afstumpet, og den træder for en Del udvendig frem paa en Strækning mellem Labrum og 2det Par Kjæbers Forende.

#### β. Den med udviklede Æggeplader udstyrede Hun.

I Modsætning til *Rocinela* har jeg her ikke fundet nogen Forskjel imellem den ikke udviklede og den æggebærende Hun i Bygningen af første og andet Par Kjæber, men kun som sædvanlig i Bygningen af Kjæbefødderne.

Kjæbeføddernes (Fig. 4 k) andet Led er omtrent af samme Længde som hos den ikke fuldt udviklede Hun, men saa er til Gjengjæld det tredje Led blevet paafaldende kortere og svagere og er rettet fremad. Første Leds Plade (a) er vel meget stor, men den er nøgen og dens bagud rettede Part betydelig kortere end hos *Rocinela*. Andet Leds Plade (b) er derimod bleven endnu betydelig større end hos sidstnævnte Slægt, naar fremefter et godt Stykke frem foran Kjæbefodens Forende og er tilmed omtrent lige saa bred som lang; dens hele Forrand og Yderrand er ret tæt besat med kortere Fjerbørster (og disse Fjerbørster ere de eneste, der findes paa hele Dyret).

Første Par Æggeplader naa ikke nær saa langt frem som hos *Æga-Rocinela*, de dække ikke Mundaabningen og heller ikke Spidserne af andet Kjæbepar og af Kjæbefodspalperne; de naa ved Midtlinien fremefter omtrent til den Tværfure, der findes paa Kjæbefodens næstyderste Led, og de efterlade baade fortil og ud efter en Brømme af 2det Leds Plade fri, saa at denne Brømme med Fjerhaarene ses, naar Munddelene af et vel bevaret Individ betragtes nedenfra.

#### γ. Exemplarer i Han-Stadiet.

Hannen (Fig. 4 l) er let kjendelig paa sine slankere Kjæbefødder, men afviger forøvrigt fra den ældre Hun ved mindre Proportionsforskjelle i næsten alle Munddele. Jeg maa dog gjøre opmærksom paa, at jeg ikke véd, naar Dyret hører op at fungere som Han, men her har det kun været mig om at gjøre at tage en typisk Han og sammenligne den med en langt større, men ikke æggebærende Hun-Form.

1. Clypeus-Labrum (Fig. 4 l) ere tilsammen lige saa brede, men i Midtlinien adskilligt kortere end hos Hunnen, saa at de faa Udseende af en mindre Del af en større Kugle.

2. Kindbakkerne afvige væsentligst ved Bygningen af Palpen (Fig. 4 m), idet dens 2det Led endnu har nogle faa korte Børster paa Yderrandens Forhjørne og dens 3die Led er noget længere og slankere.

3. Første Par Kjæber omtrent som hos Hunnen.

4. Andet Par Kjæber (Fig. 4 l, f og Fig. 4 n) er noget smallere end hos Hunnen, idet det fra Midten til Spidsen beholder samme Brede.

5. Kjæbefødderne (Fig. 4 l, g og Fig. 4 o) ligne meget det beskrevne Stadium hos *Nerocila*. Jeg har dog her kunnet eftervise et ret vel udviklet første Led, derimod har jeg istedetfor en enkelt større Epipodit fundet 2 Plader, som jeg ikke ret kan tyde. Andet Led har en anselig Længde og tiltager adskilligt i Brede fra Midten mod Spidsen. De to sidste Led ere plumpere end hos *Nerocila* og sidste Led bærer en enkelt apicalstillet eller 2 kraftige Kroge.

δ. Pullus stadii secundi.

Munddelene af en saadan, af Rugeposen udtagen Unge nærme sig i flere Henseender stærkt til *Nerocila*-Hannens, ja vise, ligesom hos Pull. stad. II<sup>di</sup> af sidstnævnte Slægt, i visse Henseender endog mere over mod *Rocinela*.

1. Labrum-Clypeus (Fig. 4 p) er næppe tykkere ved Midten end hos *Nerocila*, og man kan her paa den udpræparerede Munddel skjelne tydelig mellem den faste Hud i Labrum og i Clypeus og den blødere Randhud. Labrum er ikke stort over halv saa bred og halv saa lang som Clypeus, udrandet ved Midten.

2. Kindbakkernes (Fig. 4 q) indbøjede Endeparti er kortere og bredere end hos de større Dyr, bygget omtrent som hos *Nerocila*, dog er den forreste, haarde Spids noget længere end hos denne Slægt og meget længere end hos de større Ceratthoer. Palpen er (som allerede eftervist af Schiødte & Meinert) meget afvigende fra Hannens, de 3 Led ere omtrent lige lange, de 2 første kun lidt tykkere end 3die og ikke kjendelig oppustede; 2det Leds Yderrand har ud mod Spidsen c. 5 meget lange Børster, 3die Leds Yderrand ud mod Spidsen en Række Børster, af hvilke de bageste som hos en Cirolan ere kortere, de yderste meget lange.

3. Første Par Kjæber (Fig. 4 r) omtrent som hos det voxne Dyr, dog er 3die Led udefter bøjet svagt indad og ender med 3 længere Krogtorne.

4. Andet Par Kjæber (Fig. 4 s) er i de yderste  $\frac{3}{5}$  langt smallere end hos Hannen og aftager endog noget i Brede fra Midten til Spidsen, og Spidsens 2 Flige ere ikke væbnede som hos Han og Hun af denne Art, men som hos *Nerocila*; Kjæbeparret ligner ogsaa meget denne Slægts, kun er det endnu smallere mod Spidsen.

5. Kjæbefødderne (Fig. 4 t) afvige fra Hannens ved, at 2det Led er forholdsvis kortere, 3die Led længere, 4de Led med 2 stærke Kroge ved Spidsen.

Jeg antager, at Munddelene hos alle Cymothoider gennemgaa en noget lignende Udvikling efter Dyrets Alder som den, jeg har paavist hos *Ceratthoa*, men at denne Udvikling er stærkest hos de Former, der som voxne have en typisk «Cymothoa»-Mund med opsvulmet Labrum-Clypeus m. m., medens den er temmelig ringe hos de Former, der, som *Nerocila* og *Livoneca*, nærme sig som voxne mere til *Æga*-Slægten *Rocinela* i deres Mundbygning; man kan ogsaa udtrykke dette saaledes, at jo mere en voksen Hun af en *Cymothoide* ligner en *Rocinela* i Mundbygningen (udvendig skjønnes dette lettest af Labrums Form og af Kindbakkernes Palper), desto mindre har den undergaaet Forandringer efter Dyrets Alder, — og omvendt.

Et Gjennemsyn af det københavnske Museums Materiale har givet det Resultat, at *Nerocila* (flere Arter) og *Livoneca* (sens. Sch. & Mein.) ligne hinanden overmaade meget i Mundbygning, ja at visse *Livoneca*-Arter endog i Habitus nærme sig fuldt saa meget til *Rocinela* som den her fremstillede *Nerocila*. *Ceratothoa*, *Cymothoa*, *Glossobius* og fl. ligne hverandre overmaade meget og synes som voxne at repræsentere *Cymothoa*-Munden i sin mest omdannede Form. *Anilocra* og fl. danne en Overgang mellem de to nævnte Typer.

Skjøndt jeg kun har anatomeret 3 Slægter af *Cymothoer* (*Livoneca* foruden de 2 ovenfor omtalte), troer jeg efter Besigtelse med Lupe at turde hævde, at de allerfleste (alle af mig besete) Slægter ikke frembyde væsentlige Afvigelser fra denne Fremstilling. Mundbygningen bliver altsaa temmelig ensartet indenfor denne paa Arter saa rige Familie, thi selv de 2 her fremstillede Typer afvige jo ikke fra hinanden i vigtigere Bygningsforhold, og Differenserne ere endda langt mindre hos de tidligere Aldersstadier af Dyrene.

Hvad *Cymothoerne* leve af, er vanskeligere at afgjøre. Mange findes kun paa Tungen af Fiske, andre ere trufne baade paa Tungen og i Gjællehulen, andre kun i Gjællehulen, nogle udvendig paa Huden eller paa Finnerne (Brystfinner, Rygfinner eller Halefinne) [se herom under de forskjellige Arter i Schiødte & Meinerts Monografi]. Om *Ichthyoxenus Jellinghausii* Herkl. meddeler Herklots (op. cit. n<sup>o</sup> 2, p. 15): «Les tégumens extérieurs du poisson sont percés d'une ouverture transversale, au dessous ou immédiatement en arrière des nageoires ventrales. Relativement à l'individu cette ouverture est considérable, mais par rapport au parasite elle est insignifiante, vu qu'elle atteint tout au plus un quart de la largeur de la femelle. Elle conduit dans une cavité en forme de poche, qui monte obliquement en se dirigeant vers l'extrémité antérieure du poisson, et qui est formée simplement par écartement des parties internes, car on n'observe aucune déchirure des membranes.» Giard og Bonnier (op. cit. p. 213) mene nu, at Gruben er dannet ved en Indkrængning af Dyrets ydre Hud, og dens Dannelse paralleliseres af de to Forfattere med *Entoniscus*, der danner sig en lignende, men langt dybere Indposning ind i en Krabbe.

I op. cit. n<sup>o</sup> 2 har Lütken dels givet en Sammenstilling efter Literaturen, dels fremsat flere egne Iagttagelser om adskillige *Cymothoers* Ophold paa Tungen eller i Mundhulen af Fiske, og det gjøres her gjældende, at man aldrig paa Tungen eller paa Mundhulens Loft finder noget Saar eller Hul, der kan hidrøre fra Bid eller Gnavning af *Cymothoen*, saa denne næppe lever af Fiskens Blod. — En Undersøgelse (foretagen af Hr. Dr. Bergh) af Tarmens Indhold hos en saadan Tungebeboer gav paa Grund af Konserverings-Tilstanden ikke noget sikkert Resultat.

Jeg kan ikke give noget Bidrag til Løsningen af Spørgsmaalet, men fremsætter som Formodninger, at de fleste vistnok ikke ere Blodsugere, men snarere leve

af Dyrets Overhud. Nogle af de Former, der, som *Nerocila* og *Livoneca*, nærme sig til Ægide-Slægten *Rocinela*, leve maaske af Fiskeblod; der er jo ogsaa en Mulighed for, at de unge Stadier af *Cymothoa*, *Ceratothoa* og fl., hvis Munddele ligne *Nerocila*'s, som Unger tage anden Næring end som voxne.

Naar man ogsaa tager Hensyn til Ungerne af Cymothoerne, ere de Forskjelle, der findes i Mundbygningen mellem en Ægide (*Rocinela*) og en Cymothoide kun faa og smaa: hos Cymothoiderne rettes Kindbakkens bageste Halvdel lidt mindre skraat udad end hos Ægiderne, dens indad bøjede apicale Del har en noget anden Form og mangler ethvert Spor af *Lacinia mobilis*, der altid (*Syscenus*?) findes hos Ægiderne, endelig udspringer Kindbakkepalpen forholdsvis længere fremefter; Kjæbeføddernes Endeled er aflangt og længere end bredt hos Cymothoiderne, bredt, kort og ligesom afskaaret hos Ægiderne. Hos ægge bærende Hunner af Ægider dækkes Mundaabningen og Kjæbeføddernes Plader af første Par Æggeplader, hos Cymothoernes Hunner er derimod Mundaabningen og Spidserne af de bag denne liggende Munddele fri, og ligeledes ses (paa vel bevarede Stykker) en Brømme af Pladen fra Kjæbeføddernes andet Led udenfor Randen af første Par Æggeplader.

Med Undtagelse af den sidste Karakter, der jo kun gjælder det ene Køn i en bestemt (hos de fleste Æger oven i Kjøbet ikke iagttagen) Tilstand ere de andre Karakterer smaa og, som det forekommer mig, af ringe Værd. Imidlertid afvige de fleste Cymothoer som voxne adskilligt mere fra Ægerne, og særlig er deres ofte tykke Labrum-Clypeus og hos alle Former den opsvulmede Tilstand af første eller af de 2 første Led af Kindbakkepalpen tilstrækkelig til ved første Øjekast at kjende en Cymothoide baade fra Ægerne og fra alle andre her omtalte Isopoder.

Forøvrigt ere Cymothoiderne vel skilte fra Ægiderne ved Karakterer fra andre Organer; herom henvises til mine Bemærkninger i et tidligere og et senere Afsnit af denne Afhandling.

---

## Conspectus systematicus.

(Differentiæ inter feminam ovigeram et virgines et mares non commemoratæ sunt.)

### I. Cirolanidæ.

Partes oris universæ fornicem amplum, alte prominentem, formantes.

Clypeus amplus, latus, brevior, triangulus, subhorizontalis.

Labrum amplum, duplo vel triplo latius quam longius, subrectangulum, subhorizontale.

Mandibulæ per totam longitudinem latæ; pars dimidia posterior in situ visa postice paulum introrsum vergens; pars distalis introrsum directa, lata, sat longa, ex parte majore detecta; acies longa fere ad lineam symmetricam capitis sita, plus minusve trifida, apice posteriore quam apicibus ceteris semper majore; lacinia mobilis ampla, spinis compluribus instructa; pars molaris mobilis, elongato-triangularis, compressa, processulis triangulis, complanatis in margine anteriore tenui instructa. Condylus articularius anterior ad angulum posteriorem clypei et longe ante apicem anteriorem aciei productus.

Maxillæ primi paris robustæ; lacinia articuli primi apice inflato spinis 3 crassis ex parte pubescentibus instructo; lacinia articuli tertii ad apicem versus lata vel latissima, margine apicali longo, obliquo, spinis multis robustis instructo.

Maxillæ secundi paris bene evolutæ, magnitudine mediocri; lacinia articuli secundi parte libera lata, brevi, setis multis ornata; lacinia articulorum tertii et quarti multo longiores quam latiores, margine interiore ex parte setis longioribus instructo.

Maxillipedes bene evoluti; articulus secundus sat brevis, palpo multo brevior, lacinia ornatus; palpus 4-articulatus, mobilissimus, valde complanatus, latitudine mediocri vel magna, marginibus setis multis non uncis instructis.

Paragnatha longa, sat angusta, libera, a basi ad apicem versus sensim valde divaricata, parte apicali tamen paulum inflexa.

#### a. **Cirolana et Conilera.**

Maxillipedum lacinia articuli secundi uncis instructa.

#### b. **Eurydice.**

Maxillipedum lacinia articuli secundi uncis nullis.

### II. **Corallanidæ.**

Partes oris universæ aream latam occupantes, imprimis ad apicem mandibularum versus valde prominentes.

Clypeus latus, perbrevis, subtriangulus, interdum supinus visus mandibulis obtectus.

Labrum latum, perbreve, subhorizontale vel verticale, sæpius supinum visum mandibulis obtectum.

Mandibulæ perrobustæ; pars dimidia posterior lata, ad basin versus sensim nonnihil introrsum vergens; pars distalis ab articulatione palpi parte basali subito sat angustior, ante valde incurvata, detecta; pars incurvata longa, alte supra partes ceteras oris elevata, in processum longum vel longissimum, oblonge triangulum, acutum producta et interdum ante hunc processum processu singulo vel processibus duobus minoribus ornata; lacinia mobilis et pars molaris evanidæ. Condylus articularius anterior ad latus labri situs, non ante marginem anteriorem mandibularum porrectus.

Maxillæ primi paris robustæ; lacinia articuli primi apice inflato, inermi; articulus tertius propter articulationem valde mobilis, robustus, a medio ad apicem versus valde angustatus et nonnihil extrorsum curvatus, apice spina singula perlonga et perrobusta et introrsum curvata instructo.

Maxillæ secundi paris breviores, angustæ, debiles, apice laciniis liberis duabus fere rudimentariis, setis paucis ornatis, instructo.

Maxillipedes angusti, liberi, interdum in latere inferiore nodis ex parte acutis ornati; articulus secundus mediocris, palpo multo brevior, lacinia perparva ornatus; palpus 4-articulatus, valde mobilis, angustus, setis compluribus in marginibus instructus, articulo antepenultimo elongato, plus duplo longiore quam latiore.

Paragnatha longa, sat lata, a basi ad apicem versus valde divaricata, parte apicali in latere interiore valde angustata, inflexa.

### III. Alcironidæ.

Generibus tribus hujus familiæ inter se nonnihil discrepantibus characteres sequentes communes sunt.

Partes oris universæ aream satis latam occupantes, satis vel paulum prominentes.

Labrum minus vel parvum, transversum, subhorizontale.

Mandibulæ in situ visæ elongato-trigonæ, a basi ad marginem lateralem labri manifesto introrsum directæ et in anteriore saltem parte valde angustatæ; pars subapicalis angusta, sub clypeo-labro et paragnathis occulta; acies brevis, valde obliqua, processum triangulum formans et interdum etiam processu altero anteriore ornata; lacinia mobilis parva vel evanida; pars molaris sæpissime (vel semper?) evanida.

Maxillæ primi paris sat robustæ; lacinia articuli primi apice inermi; lacinia articuli tertii circiter a media ad apicem versus plus minusve angustata, apice spinis singulis vel binis semper validis, curvatis ornato.



Maxillæ secundi paris debiles, nudæ vel setis perparvis instructæ, interdum fere rudimentariæ, forma sat variabili.

Maxillipedes mediocres; articulus secundus lacinia evanida; palpus 4-articulatus plus minusve mobilis, aliquantum complanatus, latitudine mediocri, marginibus setis nonnullis vel multis non unciis instructis.

Paragnatha lata, sat crassa, per longitudinem majorem paulum vel vix inter se distantia, in anteriore modo parte interstitio manifesto separata.

#### a. *Alcirona*.

Partes oris universæ sat prominentes.

Clypeus permagnus, longus et perlatus, semi-lunaris, angulo laterali postice ultra mediam mandibulam fere ad articulationem palpi mandibularis attingente.

Labrum a clypeo bene definitum.

Mandibulæ in situ visæ a basi ad apicem angustatæ; acies bifida (vel in mandibula sinistra subtrifida); lacinia mobilis perparva vel nulla.

Maxillæ primi paris lacinia articuli tertii ad apicem versus paulum incurvata, spinis binis armata.

Maxillæ secundi paris minutæ, laciniis non distinctis, seta singula ornata.

Maxillipedum articulus secundus latior quam longior, non cum articulo tertio coalitus; palpus valde mobilis articulis ceteris palpi cunctis longior, marginibus setis sat multis ornatis.

#### b. *Lanocira*.

Partes oris universæ paulum prominentes.

Clypeus sat parvus, labro paulo latior, a basi ad marginem posteriorem versus altitudine valde crescens.

Labrum a clypeo bene definitum.

Mandibulæ parte basali in latere exteriori valde dilatata; acies bifida; lacinia mobilis mediocri, margine serrato-dentato (? pars molaris laciniam mediocrem, tenuem, ad marginem posteriorem lacinia mobilis sitam, formans).

Maxillæ primi paris lacinia articuli secundi prope mediam geniculata, parte proximali valde introrsum vergente, parte distali ante directa, apice spina una perlonga ornata.

Maxillæ secundi paris multo majores quam in *Alcirona*; lacinia articuli secundi sat magna, laminam obliquam in apice interiore paulum hirsutam formans; lacinia articuli tertii sat longa, angusta, seta perlonga instructa.

Maxillipedum articulus secundus longior quam latior, non cum articulo tertio concretus; palpus aliquantum mobilis articulis ceteris cunctis vix longior, marginibus setis compluribus instructis.

#### c. Tachæa.

Partes oris universæ perpaulum prominentes.

Clypeus minor, a basi ad marginem posteriorem versus altitudine valde crescens.

Labrum haud a clypeo definitum.

Mandibulæ sat angustæ; pars proximalis a basi ad mediam versus paulum latitudine crescens; acies in processum singulum trigonum, acutum producta; lacinia mobilis spinam singulam formans; pars molaris evanida.

Maxillæ primi paris lacinia articuli tertii subrecta, a media ad apicem versus valde angustata, spina singula robusta apicali instructa.

Maxillæ secundi paris perparvæ, fere rudimentariæ, nudæ, laciniis evanidis.

Maxillipedum articulus secundus elongatus cum articulo tertio concretus; palpus paulum mobilis articulis ceteris multo brevior, setis paucis instructus.

#### IV. Barybrotidæ.

Partes oris universæ aream angustiore occupantes, conum obliquum, aliquantum ante directum, obtusatum formantes.

Clypeus magnus, trigonus, a basi deorsum et ante directus.

Labrum parvum; pars dura perparva; ad latera partis duræ stria mollior inventa est.

Mandibulæ angustæ, a basi ad apicem versus angustatæ et nonnihil introrsum directæ; pars dimidia distalis, parte apicali excepta, obtecta; acies brevis, ante in processum parvum producta; pone partem brevissimam et incurvatam mandibulæ lamina longior et angustior, setis nonnullis brevibus ornata in margine interiore mandibulæ inventa est.

Maxillæ primi paris angustæ; lacinia articuli secundi debilior, spina longa apicali ornata; lacinia articuli tertii ubique angusta, apice et parte apicali marginis interioris spinis 2 robustis, curvatis et setis curvatis ornato.

Maxillæ secundi paris debiles, parvæ; lacinia articuli secundi brevior, nuda, cum lacinia articuli tertii confluens; lacinia articuli tertii longior, angustior, apice setis perpaucis instructo.

Maxillipedes per longitudinem maximam in linea symmetrica capitis concurrentes, postice carinam humilem formantes, ante conum e partibus oris ceteris formatum amplectentes et in lateribus et ante in superficie clypei; articulus secundus sat elongatus, lacinia nulla instructus; articuli quartus et quintus inter se coaliti, articulum unum perlongum, per longitudinem ad apicem versus subconvolutum, ad apicem versus prope marginem interiorem uncis instructum, formantes; articuli sextus et septimus brevissimi, ante clypeum siti, subverticales, supini visi margine superiore uncis excurvatis nonnullis instructo.

Paragnatha longiora, angustiora, tenuiora, ante in obliquum acuminata ibique ob eam causam nonnihil divaricata.

### V. *Ægidæ*.

Partes oris universæ aream mediocrem occupantes, in latere inferiore subplano capitis postice paulum prominentes, ante in conum breviora, obtusum productæ.

Clypeus sat magnus, latus, subverticalis.

Labrum mediocre vel minus, ex parte membranaceum, subverticale vel horizontale.

Mandibulæ parte subapicali vel apicali tertia obtecta, parte reliqua a basi vel a loco nonnihil ante basin ad angulum lateralem clypei versus aliquantum angustata et introrsum directa; pars quarta apicalis valde deorsum et plus minusve introrsum flexa, apice anteriore in processum angustum producto; lacinia mobilis parva; pars molaris aut evanida aut laminam parvam formans.

Maxillæ primi paris angustæ; lacinia articuli primi inermis; lacinia articuli tertii angusta, supina visa subrecta, apice spinis ornato.

Maxillæ secundi paris magnæ, elongatæ, per longitudinem majorem latitudine satis magna; pars apicalis laciniis binis, utraque uncis ornata, interiore parva, exteriori sat magna, lata, instructa.

Maxillipedes per longitudinem majorem concurrentes et carinam formantes, palpo conum e partibus apicalibus partium oris ceterarum formatum plus minusve amplectente; articulus secundus valde elongatus, articulis ceteris cunctis vix brevior, lacinia inermi ornatus; palpus in apice et interdum etiam in margine interiore uncis excurvatis ornatus.

Paragnatha breviora, crassa, ante interstitio angustiore separata, parte exteriori angustiore nonnihil introrsum flexa, subtereti, subacuta.

a. *Æga*.

Mandibulæ a basi angustatæ et valde introrsum vergentes; pars distalis valde introrsum flexa; lacinia mobilis laminam perparvam formans; pars molaris evanida.

Maxillæ primi paris lacinia articuli primi manifesta.

Maxillipedes 7-articulati; articulus secundus articulis 5 ceteris exterioribus cunctis paulo longior; palpus ex articulis quattuor (? vel interdum tribus) formatus, parte apicali ante superficiem clypei nonnihil incurvata, articulo nullo elongato, margine interiore per dimidiam longitudinem distalem et apice uncis instructis.

b. *Rocinela (Alitropus)*.

Mandibulæ a loco nonnihil a basi remoto angustatæ et aliquantum introrsum directæ; pars distalis paulum vel vix incurvata; lacinia mobilis processum parvum, squamosum formans; pars molaris laminam minorem formans.

Maxillæ primi paris lacinia articuli primi evanida.

Maxillipedes 4-articulati; articulus basalis perparvus; articulus secundus cum articulo tertio coalitus, articulis ceteris multo longior; palpus biarticulatus, articulis quarto et quinto inter se coalitis in margine interiore nudis, articulis sexto et septimo inter se coalitis, in margine anteriore sed non in margine interiore uncis instructis, neque ante superficiem clypei incurvatis.

VI. *Cymothoidæ*.

Genera nonnulla (*Nerocila*, *Livoneca*) hujus familiæ maximæ generi *Rocinela* supra commemoratæ structura oris valde affinia, sed imprimis forma partis distalis mandibularum, articulo basali saltem palpi mandibularis valde incrassato, palpo maxillipedum semper biarticulato cum articulo ultimo subacuto longiore quam latiore, diversa.

Pullus stadii secundi generum aliorum (*Cymothoæ*, *Ceratothoæ*, *Glossobii*) structura oris generi *Nerocilæ* valde similis; specimina adulta generum horum a pullo stadii secundi structura oris characteribus compluribus minoribus, ex parte tamen sat conspicuis differunt.

## Tabula analytica familiarum.

<p>Maxillipedum palpus liber, marginibus articularum duorum ultimorum plus minusve setosis, nunquam uncis instructis.</p> <p>Maxillæ primi paris lacinia articuli tertii saltem ad medium versus sat lata.</p>	<p>Mandibularum pars dimidia distalis robusta, detecta, vel margine anteriore solum oblecto, valde conspicua. Mandibulæ a basi ad medium versus ante et paulum extrorsum directæ.</p>	<p>Mandibulæ acie sat lata, plus minusve trifida, ad lineam symmetricam pone labrum amplum sita; lacinia mobilis et pars molaris singularis bene evolutæ.</p> <p>Maxillæ primi paris lacinia artic. primi spinis 3 armata, lacinia art. tertii spinis multis instructa.</p> <p>Maxillæ secundi paris mediocres, laciniiis 3 liberis copiose setosis.</p> <p>Maxillipedum palpus latior, copiose setosus.</p>	<p><i>Cirolanidæ.</i></p>
		<p>Mandibulæ parte distali alte prominente in processum longum, lineam symmetricam longe superantem, producta; lacinia mobilis et pars molaris evanidæ.</p> <p>Maxillæ primi paris lacinia artic. primi inermi, lacinia artic. tertii spina una perlonga instructa.</p> <p>Maxillæ secundi paris parvæ, debiles, laciniiis liberis fere rudimentariis, setis paucis instructa.</p> <p>Maxillipedum palpus angustatus, setis paucioribus instructus (articulo antepenultimo aliquantum elongato).</p>	<p><i>Corallanidæ.</i></p>
	<p>Mandibularum pars dimidia distalis angusta, ex parte majore vel omnino a labro et paragnathis oblecta. Mandibulæ a basi ad apicem versus sensim introrsum directæ.</p>	<p>Maxillæ primi paris lacinia articuli primi inermi, lacinia articuli tertii spinis 2 vel spina una instructa.</p> <p>Maxillæ secundi paris debiles, interdum perparvæ, lacinia una vel nulla instructæ, setis perpaucis vel nullis.</p> <p>Maxillipedum palpus latior, articulo nullo elongato.</p>	<p><i>Alciroidæ.</i></p>
<p>Maxillipedum palpus conum a partibus distalibus partium oris ceterarum formatum amplectens, margine intero-supiore et apice nunquam setosis, apice et interdum margine intero-supiore saltem in maribus et in virginibus uncis excurvatis instructo.</p> <p>Maxillæ primi paris lacinia articuli tertii ubique angusta.</p>	<p>Partes distales partium oris conum aliquantum ante directum formantes.</p> <p>Maxillæ secundi paris parvæ, debiles, uncis nullis instructæ.</p> <p>Maxillipedes articulo quarto et articulo quinto coalitis, articulum perlongum formantibus.</p> <p>Partes distales partium oris conum brevem subverticalem formantes.</p> <p>Maxillæ secundi paris magnæ, elongatæ, per longitudinem majorem latitudine sat magna, laciniiis binis apicalibus, uncis instructis, ornata.</p> <p>Maxillipedes articulo quarto et articulo quinto interdum coalitis, nunquam articulum longum formantibus.</p>	<p>Mandibulæ lacinia mobili sæpissime (? semper) manifesta; palpus articulo nullo inflato.</p> <p>Maxillipedes sæpius 7-articulati, interdum 4-articulati, articulo ultimo in hoc casu brevior, obtuso.</p> <p>Mandibulæ lacinia mobili nulla; palpus in adultis articulo basali inflato vel articulis binis basalibus inflatis.</p> <p>Maxillipedes semper 4-articulati, articulo ultimo longiore et angustiore, subacuto.</p>	<p><i>Barybrotidæ.</i></p>
			<p><i>Ægidæ.</i></p>
			<p><i>Cymothoidæ.</i></p>

## V. Systematisk Fremstilling af Familier, Slægter og Arter.

### Fam. I. **Cirolanidæ.**

Partes oris vid. p. 275—79 et p. 310—11.

Pedes omnes gressorii, sæpius etiam natatorii; articulus septimus mediocris, prope apicem seta vel setis instructus; unguis bene definitus, articulo septimo nonnihil vel multo brevior, paulum curvatus vel subrectus, non cum articulo septimo unicum verum formans.

#### Conspectus generum.

1. Antennulæ ex articulis compluribus vel numerosis compositæ. Oculi conspicui. Uropoda duriora, cum segmento ultimo caudæ flabellum formantia.
2. Oculi et in latere superiore et sæpiissime etiam in latere inferiore capitis siti. Branchiæ nullæ ad basin pleopodorum evolutæ.
  3. Pedunculus antennarum 5-articulatus. Maxillipedum lacinia articuli secundi uncis ornata. Scapus uropodorum angulo postero-interiore semper sat vel valde producto.
    4. Pleopoda primi et secundi parium longitudine subsimilia, ramo interiore saltem submembranaceo; scapus pleopodorum secundi paris aliquanto latior quam longior . . . . . 1. *Cirolana* Leach.
    4. Pleopoda primi paris ubique dura, operculum magnum formantia, scapo et ramo interiore elongatis; pleopoda secundi paris structura solita, scapo vix latiore quam longiore, ramis submembranaceis.
      2. *Conilera* Leach.
  3. Pedunculus antennarum 4-articulatus. Maxillipedum lacinia articuli secundi uncis nullis. Scapus uropodorum angulo interiore perpaulum producto. (Scapus pleopodorum secundi paris paulo vel vix latior quam longior.)
    3. *Eurydice* Leach.
2. Oculi solum in latere inferiore capitis evoluti. Branchiæ ad basin pleopodorum bene evolutæ . . . . . 4. *Bathynomus* A. Milne-Edw.
- (1. Antennulæ ex articulis binis compositæ. Oculi nulli. Uropoda ramis submembranaceis, respiratoriis, sub cauda occulta . . . . . 5. *Anuropus* Bedd.)

1. *Cirolana* Leach (1818).

Oculi mediocres vel parvi, in latere superiore et sæpissime etiam in latere inferiore capitis evoluti.

Pedunculus antennarum 5-articulatus; (flagellum brevius vel longius, rarissime medium corpus superans).

Maxillipedum lacinia articuli secundi unciis instructa.

(Cauda trunco sæpissime multo brevior.)

Pleopoda primi et secundi parium inter se sat similia, ramo interiore submembranaceo; scapus pleopodorum secundi paris aliquanto latior quam longior.

Scapus uropodorum angulo interiore sat vel valde producto.

Differentia sexualis fere nulla.

Conspectus specierum.<sup>1)</sup>

- |    |   |  |
|----|---|--|
| 1. | { | (2) Segmentum quintum caudæ angulis lateralibus liberis, non a segmento quarto obtectis. (Species duæ aliquantum aberrantes).  |
|    |   | (3) Segmentum quintum caudæ angulis lateralibus occultis, a segmento quarto obtectis.  |
| 2. | { | (*) <sup>a</sup> Corpus breve. Caput lateribus angulatis. Lamina frontalis ante bullam magnam, apicem capitis superantem, a processu frontali discretam, formans. Segmentum ultimum caudæ dorso alte tricarinato. Uropoda ramo interiore multo longiore quam exteriori . . . 14. <i>C. spheromiformis</i> n. sp. |
|    |   | (*) Corpus elongato-ovatum. Caput lateribus rotundatis. Caput ante in processum porrectum, truncatum, cum lamina frontali concretum, productum. Segmentum ultimum caudæ foveis duabus impressis ornatum. Uropoda ramo interiore multo brevior quam exteriori . . . . . 15. <i>C. orientalis</i> Dana.            |
| 3. | { | (4) Lamina frontalis et clypeus inermia, non cornuta; clypei margo anterior cum lamina frontali perspicue conjunctus.  |
|    |   | (13) Aut lamina frontalis postice aut clypeus ante in cornu, imprimis a latere visum manifestum, producta.   |
| 4. | { | (5) Lamina frontalis elongata, angusta, quadruplo vel sextuplo longior quam latior. Pedes parium duorum posteriorum setis permultis natatoriis (sæpius ex parte majore plumosis) instructi.  |
|    |   | (10) Lamina frontalis lata, brevis, pentagona (vel fere hexagona), vix dimidio longior quam latior. Pedes parium duorum posteriorum setis perpaucis vel nullis instructi.  |

<sup>1)</sup> Paa Grund af det store Antal af Arter har jeg her benyttet en anden Form af analytisk Tabel end den, der ellers anvendes i dette Arbejde.

5. { (6) Ramus interior uropodorum margine exteriori non emarginato. Epimera sexti paris epimeris septimi paris manifesto majora, vix angustiora. Pedes septimi paris articulo secundo plus duplo longiore et aliquanto latiore quam articulo tertio, valde dilatato, setis plumosis permultis in series dispositis instructo.
5. { (9) Ramus interior uropodorum margine exteriori prope apicem aliquantum emarginato. Epimera sexti paris epimeris septimi paris aliquanto angustiora. Pedes septimi paris articulo secundo quam articulo tertio paulo longiore et nonnihil angustiore setis paucioribus non plumosis instructo.
6. { (7) Epimera omnia trunci furca perspicua arcuata ornata.
6. { (\*) Epimera furca marginali solita; anteriora furca arcuata nulla, posteriora furca arcuata fere evanida ornata . . . . . 1. *C. borealis* Lilljb.
7. { (8) Uropoda ramo exteriori aliquanto breviora quam ramo interiori.
7. { (\*) Uropoda ramis inter se æquilongis . . . . . 2. *C. hirtipes* H. M.-Edw.
8. { (\*) Oculi fere inconspicue granulati. Clypeus ad medium glaber. 3. *C. neglecta* n. sp.
8. { (\*) Oculi imprimis in latere inferiore aliquantum granulati. Clypeus ad medium area biimpressa et pulchre sculpta ornatus. 4. *C. gracilis* n. sp.
9. { (\*) Segmentum ultimum caudæ apice acuto. Ramus exterior uropodorum setis apicalibus nonnullis perlongis instructus. Pedes trium parium anteriorum articulo quarto in latere exteriori in processum perlongum, medium articulum sextum attingentem, producto. . . . . 5. *C. eximia* n. sp.
9. { (\*) Segmentum ultimum caudæ apice emarginato. Ramus exterior uropodorum setis brevioribus solum instructus. Pedes trium parium anteriorum articulo quarto in processum minus longum, apicem articuli quinti attingentem, producto. . . . . 6. *C. concharum* (Stimps.)
10. { (11) Segmentum ultimum caudæ dorso subæqualiter convexo.
10. { (\*) Segmentum ultimum caudæ dorso ad mediam longitudinem profunde sulcato; sulcus carinis duabus elevatis circumdatus . . . . . 7. *C. sulcata* n. sp.
11. { (12) Segmentum ultimum caudæ margine posteriore spinis paucioribus, gracilioribus ornato. Rami uropodorum apicibus acutis vel subbifidis.
11. { (\*) Segmentum ultimum caudæ margine posteriore spinis multis (c. 26), robustis, dense sitis, ornato. Rami uropodorum apicibus rotundatis. 8. *C. californica* n. sp.



12. { (\*) Frons in processum defflexum, a fronte visum longum, sat angustum, inter pedunculos antennularum situm, cum lamina frontali conjunctum, producta. Pedes secundi et tertii parium articulo quarto sat gracili. 9. *C. parva* n. sp.  
 (\*) Frons superne ante angulum brevem formans, non in processum producta. Pedes secundi et tertii parium articulo quarto sat incrassato.  
 10. *C. Cranchii* Leach.
13. { (14) Pedes omnes fere nudi, spinis solum instructi; articulus secundus pedum septimi paris non dilatatus. Pedum trium parium anteriorum articuli tertius et quartus angulo exteriori paulum producto.  
 (\*) Pedes omnes setis longis natatoriis instructi; articulus secundus pedum septimi paris valde dilatatus. Pedum trium parium anteriorum articuli tertius et quartus in latere exteriori in processus perlongos producti.  
 11. *C. elongata* M.-Edw.
14. { (\*) Lamina frontalis brevior, ad apicem anteriorem versus angustata. Articulus ultimus pedunculi antennarum articulis ceteris pedunculi cunctis multo brevior. Segmentum ultimum caudæ perlate rotundatum . . . . . 12. *C. minuta* n. sp.  
 (\*) Lamina frontalis perlonga, a media ad apicem anteriorem versus dilatata. Articulus ultimus pedunculi antennarum articulis ceteris cunctis pedunculi vix brevior. Segmentum ultimum caudæ angustius rotundatum.  
 13. *C. japonica* n. sp.

### Sectio prima.

Lamina frontalis inermis, elongata, angusta, quadruplo vel sextuplo longior quam latior.

Clypeus inermis, non cornutus, ante perspicue cum lamina frontali, inermi conjunctus.

Antennulæ breviores et crassiores, pedunculo manifesto 3-articulato.

Pedes omnes et imprimis parium duorum posteriorum setis multis longis natatoriis instructi.

#### 1. *Cirolana borealis* Lilljeb.

(Tab. I, Fig. 1—1 v.)

*Cirolana borealis* Lilljeborg, Norg. Crust., l. c. p. 23 [1852].

?? — *hirtipes* Heller, Carcin. Beitr., l. c., p. 742.

— *spinipes* Sp. Bate & Westwood, Brit. Sess. Crust. Vol. II, p. 299.

— — Harger, Rep. Results of Dredg., op. cit. n° 5, p. 91, Pl. I, Fig. 2—2 d, Pl. II. Fig. 1—1 c.

**Mas adultus et femina ovigera.**

**Diagn.** *Oculi nigri, a latere visi paulo longiores quam latiores, ocellis sat numerosis, perpaulum convexis. Epimera anteriora æqua, solum furca marginali ornata, posteriora furca arcuata fere evanida. Pedes quinti paris articulo secundo fere duplo longiore quam latiore; pedes septimi paris articulo secundo valde dilatato,  $\frac{3}{4}$  longiore quam latiore. Segmentum ultimum caudæ postice sat late rotundatum, apice ipso subacuto, ibique spinis c. 8 armatum. Uropoda ramis angustis, lanceolatis; ramus interior ramum exteriorem et segmentum ultimum caudæ nonnihil superans. — Long. c. 27<sup>mm</sup> (33<sup>mm</sup>, Lilljeborg).*

**Descr.** Corpus vix triplo longius quam latius, elongato-ovatum, aliquantum convexum.

Frons prona (fig. 1) in processum brevior, trigonum, mediocrem producta.

Oculi minores, nigri, a latere visi paulo longiores quam latiores, margine superiore recto; ocelli sat numerosi, perpaulum convexi.

Lamina frontalis elongata, angusta, quadruplo vel quintuplo longior quam latior, ad apicem versus paulum dilatata, deinde brevius acuminata, apice acuto non cum processu frontis conjuncto; margines laterales laminæ elevati.

Clypeus ad medium æquatus, labro vix brevior, inermis.

Antennulæ pedunculo antennarum nonnihil breviores; pedunculus manifesto 3-articulatus, crassior, flagello nonnihil longior; flagellum crassum, ad apicem versus angustatum, ex articulis c. 15 brevibus difficile numeratis compositum.

Antennæ mediocres, vix marginem posteriorem segmenti quarti trunci attingentes; pedunculus brevior, articulus tertius articulo quarto nonnihil longior et articulo quinto paulo brevior; flagellum c. 30-articulatum.

Mandibulæ acie longa; acies mand. sinistræ dentibus duobus anterioribus fere evanidis.

Maxillipedes longiores et graciliores; articulus quintus (antepenultimus) vix latior quam longior, articulo sexto nonnihil major.

Segmenta trunci convexiora, longitudine sat inæqualia; segmentum primum capite paulo brevius et segmento quinto (corpore paulum curvato) non longius; segmentum septimum segmento sexto aliquanto brevius.

Epimera mediocria, parium 3 anteriorum æquata, modo linea impressa ad marginem exteriorem ornata, parium 3 posteriorum præterea furca brevi ad medium marginem interiorem instructa. Epimera sexti paris et imprimis septimi paris angulo posteriore paulum producto, acuto.

Pedes parium trium anteriorum (fig. 1 q) robusti; articulus secundus paulum incrassatus; articulus tertius æque latus ac longus; articulus quartus in margine interiore spinis

multis instructus, processu exteriore apicem articuli quinti attingente; articulus sextus longior; articuli 2—6 setis sat numerosis, simplicibus instructi.

Pedes parium quattuor posteriorum longitudine medioeri, mirabile constructi. — Pedes quinti paris (fig. 1 r) pedibus septimi paris vix breviores; articulus secundus nonnihil incrassatus et dilatatus, fere duplo longior quam lator, setis plumosis (ciliis) in series 3 minus dense dispositis instructus; articulus tertius a basi ad apicem versus sensim valde dilatatus, æque latus ac longus, spinis et setis multis instructus; articulus quartus aliquantum dilatatus, superficie spinis multis brevibus, in series dispositis, margine interiore spinis multis brevibus et longis et setis longis instructo; articulus quintus articulo quarto aliquanto angustior, spinis et setis paucioribus instructus; articulus sextus articulo quinto plus dimidio longior, gracilis. — Pedes quarti paris pedibus quinti paris breviores, vix tamen angustiores, structura subsimiles. — Pedes septimi paris (fig. 1 s) structura peculiari; articulus secundus sat elongatus, valde dilatatus et complanatus,  $\frac{3}{4}$  longior quam lator, setis plumosis in series 3 dense dispositis ornatus; articuli 3—5 angustiores quam in pedibus quinti paris, structura tamen sat similes; articulus sextus articulo quinto vix tertia parte longior. — Pedes sexti paris pedibus septimi paris nonnihil longiores; structura articularum medium tenet inter structuram articularum pedum quinti et septimi parium.

Segmenta 4 anteriora caudæ æqualiter arcuata. Segmentum quintum angulis lateralibus a segmento quarto tectum.

Pleopoda parium duorum anteriorum ramo exteriore prope basin angusto, ad medium versus valde dilatato.

Segmentum ultimum caudæ nonnihil latius quam longius, perpaulum convexum, prope basin in transversum leviter impressum; margo posterior sat late rotundatus, apice ipso subacuto, spinis c. 8 et ciliis mediocribus instructus.

Uropoda ramis angustis, lanceolatis, nonnihil elongatis; ramus interior fere triplo longior quam lator, ramum exteriorem et caudam nonnihil superans, apice subacuto, margine exteriore non emarginato spinis nonnullis et ciliis mediocribus instructo, margine interiore ciliis longis et spinis nonnullis (c. 3) instructo; ramus exterior margine exteriore spinis (c. 4) et ciliis brevioribus instructo, margine interiore setoso et spina una ornato. Scapus angulo interiore brevior, longe ante medium ramum interiorem desinente.

Color in speciminibus haud dudum in spiritu vini positus rubescens, parte dimidia posteriore segmenti cujusque punctis minutis numerosis nigris ornata.

Appendix masculina (fig. 1 t, a) ramo interiore perpaulo longior, prona carina alta per longitudinem ornata, paulum pone apicem acutum in latere exteriore in processum magnum, irregularem producta. (Appendix in mare juniore brevior, simplex, processu nullo (fig. 1 u)).

Forekomst. Af denne Art har jeg set et stort Antal Exemplarer, dels fra Norges Vestkyst, nemlig fra Thronhjemsfjord og Magerø (Krøyer), Manger (M. Sars) og V. N. V. f. Bergen, 90—150 Fv. (Sv. Lovén), dels fra Kattegat, hvor den er tagen gjentagne Gange paa 13—29 Fv. paa Slik eller Slik blandet med Grus eller Sand (Dr. phil. Joh. Petersen), endelig fra Neapel, c. 25 Fv., idet jeg har kjøbt 3 Exemplarer af denne Art sammenlagte med 3 Exemplarer af *C. neglecta* n. sp., alle under Navnet «*C. hirtipes* M.-Edw.» fra den Zoologiske Station i den nævnte By. (I Materialet fra Moskou fandtes 8 smukke Exemplarer, tagne ved Neapel af A. Bogdonoff.)

De Angivelser, jeg mener at kunne samle af Literaturen og med stor Sandsynlighed eller fuld Sikkerhed henføre til denne Art, ere følgende:  $64^{\circ} 48' N. B.$ ,  $6^{\circ} 32' \text{Ø. L.}$ , 155 Fv., Sandler (G. O. Sars, op. cit. n<sup>o</sup> 4, p. 29);  $61^{\circ} 52' 30'' N. B.$ ,  $1^{\circ} 42' 6'' \text{Ø. L.}$ , 130 Fv., fint Slik, 4 Ex. (Hoek, op. cit. p. 27); fra Norges Kyster: Bergen og Christianssund (Lilljeborg, op. cit. p. 23); Havbanke ud for Christianssund, 100 Fv., stenet og sandig Bund, og Stavanger, 50—60 Fv. (G. O. Sars, op. cit. n<sup>o</sup> 2, p. 82 og 91); fra Englands Kyster: Shetlands-Øerne (Norman, op. cit. n<sup>o</sup> 2, p. 288), dernæst Moray Frith, Yorkshire, Brighton, Belfast Bay, Dublin Bay (Sp. Bate & Westwood, op. cit. p. 301); fra Bretagnes Kyst: Concarneau, le Croisic, paa c. 40 Fv. (Bonnier, op. cit. p. 135); fra Nordamerikas Østkyst:  $32^{\circ} 43' 25'' N. B.$ ,  $77^{\circ} 20' 30'' V. L.$ , 233 Fv., 4 Ex., og  $32^{\circ} 7' N. B.$ ,  $78^{\circ} 37' 30'' V. L.$ , 229 Fv., 1 Ex. (Harger, op. cit. n<sup>o</sup> 5, p. 91).

Der findes endvidere i Literaturen en Række Angivelser, som muligvis eller med nogen Sandsynlighed kunne henføres til denne Art, men Angivelsernes Beskaffenhed gjør Henførelsen tvivlsom. Denne Art har, skjøndt den vist er den mest udbredte og hyppigste Form af Slægten ved den største Del af Europas Kyster, faaet en i høj Grad uheldig Behandling af Forfatterne og en fortvivlet Synonymi. Svenske, norske, danske og hollandske Forfattere (saaledes Lilljeborg, Sars, Schiødte, Meinert, Hoek, Max Weber) have nemlig antaget det ældste Navn: *C. borealis* Lilljb.; Englænderne Sp. Bate & Westwood og Norman, Amerikaneren Harger og Franskmanden Chevreux (op. cit., p. 519) have givet den Navnet *C. spinipes* B. & W.; endelig have Franskmanden Bonnier og Englænderne White (op. cit. n<sup>o</sup> 2, p. 79) og W. Thompson (op. cit. p. 246), Italienerne Stalio (op. cit. p. 1375) og Stossich (op. cit. p. 224) samt Tydskerne Heller og Carus givet den Navnet *C. hirtipes* M.-Edw., der imidlertid tilhører en Art, som med Sikkerhed kun er tagen ved Cap. Under Navnet *C. hirtipes* M.-Edw. har jeg ogsaa modtaget denne Art og *C. neglecta* m. sammenblandede, og Hellers ovenfor citerede lange Beskrivelse passer endda (med Hensyn til 6te Haleleds Tornvævning og Uropodernes Længde) hverken med *C. borealis* Lilljb. eller *C. neglecta* m., saa der er en større Mulighed for, at den af ham beskrevne Form (som sandsynligvis er identisk med den af Stossich og Stalio anførte) fra det Adriatiske Hav er en hidtil ukjendt Art, der bør

have et nyt Navn. Stalios Beskrivelse (l. c.) af Haleviften passer heller ikke godt paa nogen mig bekendt Art fra Middelhavet. Den af Carus (op. cit. p. 438) givne Diagnose er ikke god, og han henfører med et Spørgsmaalstegn *Nelocira Swainsonii* Leach til den som Synonym, hvilket (se senere) er aldeles fejlagtigt. Resultatet heraf er da ogsaa, at Lokalteterne for «*C. hirtipes* Edw.» og Lokalteten «Sicilien» for *Nelocira Swainsonii* [= *Cir. Cranchii*] anføres for denne Art. «*Eurydice Swainsonii?*» Grube (op. cit. p. 76) henføres af Bonnier (op. cit. p. 135) til hans *C. hirtipes*. Den af Valle (op. cit. p. 191) anførte *C. hirtipes* er snarere *C. neglecta*, paa Grund af sin ringe Størrelse.

Det fremgaar af ovenstaaende Liste, at denne Art, der, saavidt vides, aldrig er tagen pelagisk, men dog maa kunne svømme særdeles godt, er tagen paa meget forskellig Dybde. Om dens Færd kan følgende meddeles.

Strøm skriver (op. cit. p. 164) i Aaret 1762: «Fiske-Bjørn eller Krakku er et Søe-Insect, som plager Fiskene, idet den kryber ind ad Gadboret og æder om sig, ja kan, naar den faaer Tid dertil, fortære den hele Fisk.» Det er Schiødte, der (op. cit. n° 1, p. 180) først har henledt Opmærksomheden paa denne gamle Udtalelse, som ifølge den senere Beskrivelse, Dyrets Levevis og Lokalteten ikke kan gjælde andre Isopoder end denne Art. Sammesteds meddeler Schiødte en i flere Henseender interessant mundtlig Meddelelse af Krøyer, der udfør Throndhjem «havde truffet en stor Torsk vrimlende fuld af *Cirolana borealis*. Krebsen havde ædt saa store Huler i Kjødet, at der ikke var stort Mere tilbage af Fisken, end Skind og Been. I Hastværket med den rigelige Fangst vilde Prof. Krøyer hjælpe sig ved at holde nogle i den lukkede Haand, men de bedé saa glubsk om sig, og gnavede saa følelig, at han strax maatte slippe dem.» Det sidste Punktum giver en udmærket Illustration til min paa Side 277 (og 279) givne Fremstilling af Kindbakkernes Bygning og Bevægelse. Meinert (op. cit. n° 1, p. 90) meddeler af et efterladt Manuskript af Lyngbye: «Gilleleie. I større Antal. I Vintermaanederne i Aarene 1834 og 35.» Og dernæst: «In cavitate ventrali Rajæ Batis, magni voluminis, et in retibus mortuæ et in ejusdem appendicibus masculis multas, et in ipso stomacho, quem perforaverat, unam reperi, omnesque vivas — Voracissima est et bona natatrix, quin supra aquam altos dandi saltus compos. — Spiritui immersa vitæ tenax, et ex ore, quæ nuper devoraverat, ut tentacula Actiniæ, emisit.»

Will. Thompson skriver l. c.: «The first individuals which came under my notice were found in the midst of a mass of ova in a boiled cod-fish sent me from Portpatrick . . . . In September 1841, several found adhering to a skate (*Raja batis*) taken in Belfast bay, were brought to me by Mr. Hyndman. I have also procured it on the gills and once alive in the stomach of a holibut (*Hippoglossus*) from the lastnamed locality.»

Dr. P. Mayer i Neapel har skriftlig meddelt mig, at denne Art (og *C. neglecta*) levede sammen med *Conilera cylindracea* (Mont.) paa omtr. 25 Fv. Dybde, og at begge skeletterede Fiske.

2. *Cirolana hirtipes* M.-Edw.

(Tab. I, Fig. 2—2 g.)

*Cirolana hirtipes* H. Milne-Edwards, Hist. Nat. d. Crust. T. III, p. 236, Pl. 31, Fig. 25 [1840].

— — — Règne Animal, Ed. ill., Crust., Pl. 67, Fig. 6—6 i.

Species a cel. Heller et ab auctoribus ceteris descripta vel commemorata non ad hanc speciem pertinet.

**Mas verosimiliter adultus.**

**Diagn.** *Oculi nigri, ut in specie præcedente formati. Epimera omnia furcis binis (furca arcuata profunda et furca marginali) instructa. Pedes quinti paris articulo secundo paulo plus quam dimidio longiore quam latiore; pedes septimi paris articulo secundo pervalde dilatato, c.  $\frac{2}{3}$  longiore quam latiore. Segmentum ultimum caudæ postice angustius rotundatum ibique spinis sat numerosis (c. 16) armatum. Uropoda ramis sat angustis, lanceolatis, caudam aliquantum superantibus, inter se æquilongis. Long. 20<sup>mm</sup>.*

**Descr.** Speciei præcedenti valde similis, bene tamen distincta.

Corpus haud triplo longius quam latius, aliquantum convexum.

Frons, oculi, lamina frontalis a *C. boreali* perpaulum discrepant; laminae frontalis pars media per longitudinem alte convexa.

Clypeus ad medium æquatus, labro nonnihil brevior, inermis.

Antennulae fere ut in *C. boreali*, tamen paulo breviores, non ultra apicem articuli quarti antennarum pedunculi attingentes.

Antennae fere ut in *C. boreali*; articulus tertius pedunculi articulo quarto paulo longior et articulo quinto nonnihil brevior; flagellum paulo brevius, c. 24-articulatum.

Mandibulae et maxillipedes ut in specie præcedenti.

Segmenta trunci sat convexa; segmentum primum segmento quinto aliquanto longius, capite non brevius; segmenta cetera longitudine minus inæqualia.

Epimera trunci omnia furca arcuata sat profunda ornata; epimera parium 5 posteriorum a *C. boreali* imprimis latitudine nonnihil majore differunt.

Pedes parium trium anteriorum nonnihil breviores et robustiores quam in *C. boreali*, structura tamen valde similes. Articulus secundus brevior et magis ad apicem versus incrassatus; articulus sextus brevior et spinæ robustiores quam in specie præcedenti.

Pedes quattuor parium posteriorum item breviores et robustiores quam in *C. boreali*. — Pedes quinti paris (fig. 2 d) spinis robustioribus et ex parte brevioribus quam in *C. boreali* instructi; articulus secundus brevior et crassior, paulo plus quam dimidio longior quam latior, setis marginis posterioris solum plumosis, setis ceteris simplicibus; articulus quartus brevior, margine interiore inciso; articulus sextus articulo quinto vix dimidio

longior. — Pedes septimi<sup>1</sup> paris (fig. 2 e) a *C. boreali* imprimis differunt: articulo sexto brevior; articulo secundo brevior et magis dilatato, c.  $\frac{2}{3}$  longior quam latior, margine interiore ex parte majore nudo et modo in parte apicali setis multis perlongis plumosis instructo. — Pedes sexti paris pedibus ceteris nonnihil longiores; articulus secundus margine anteriore ubique setoso et in parte apicali setis longis ornato.

Segmenta anteriora caudæ et pleopoda fere ut in *C. boreali*.

Segmentum ultimum caudæ imprimis differt characteribus in diagnosi commemoratis.

Uropoda imprimis differunt ramis inter se æquilongis, utroque caudam superante, ramo interiore paulo brevior et latior, scapo angulo interiore plus producto, perpaulum ante medium ramum interiorem desinente.

Color in specimine vivo dilute rosaceus.

Appendix masculina simplex, styliformis, paulum curvata, ad apicem versus valde complanata, apice acuminato, acuto, ramum interiorem perpaulum superante.

Forekomst. Tafel Bay ved Cap, 1 Ex. (Strandgaard).

Da Milne-Edwards ligeledes angiver det Gode Haabs Forbjerg som Findested for Typen for sin 1 Tomme lange Art, og da hans Fremstilling passer ret godt med denne Form, har jeg ikke taget i Betænkning at optage det af ham givne Navn.

Den eller de Arter, som ere tagne i de europæiske Have og have faaet Navnet *C. hirtipes* M.-Edw., ere (se ovenfor under *C. borealis*) ikke identiske med den syd-afrikanske Form.

Cunningham skriver (op. cit. p. 500): «*Cirolana hirtipes* (?) Edw. An imperfect specimen of a *Cirolana*, which, I think, is referable to the above species, was taken on a fish at the Tyssen Islands, Falkland Sound.» Denne Bestemmelse er sandsynligvis ikke rigtig. Miers giver (op. cit. n<sup>o</sup> 6, p. 370—71) en Sammenligning mellem *Cir. hirtipes* og *Cir. Swainsonii* (Leach) fra Goree Island, Senegambien, men den giver ikke noget af Interesse med Hensyn til *C. hirtipes*.

### 3. *Cirolana neglecta* n. sp.

(Tab. I, Fig. 3—3 a; Tab. II, Fig. 1—1 b.)

**Mas adultus et femina non ovigera.**

Diagn. *Oculi brunnescentes, a latere visi paulo latiores quam longiores, ocellis minus numerosis, perpaulum convexis. Epimera omnia furca arcuata, profunda et furca marginali ornata. Pedes quinti et septimi parium articulo secundo longitudine et latitudine C. boreali subsimili, setis natatoriis tamen fere ut in C. hirtipede ornato. Segmentum ultimum caudæ postice marginibus valde in obliquum truncatis, spinis c. 10*

*ornatis, apice acuto. Uropoda ramis brevioribus et latioribus, acutis; ramus interior ramo exteriori aliquanto longior et caudam perpaulum superans. Long. specim. maximi femin. 14,8<sup>mm</sup>, long. maris 12,9<sup>mm</sup>.*

**Descr.** *C. boreali* et ipse affinis, structura oculorum, epimerorum, uropodorum primo visu diversa.

Corpus circiter duplo et tribus quartis partibus longius quam latius.

Frons ut in *C. boreali*.

Oculi paulo majores, brunnescentes, a latere visi paulo latiores quam longiores, margine superiore valde curvato; ocelli minus numerosi, perpaulum convexi.

Lamina frontalis et clypeus paulo breviores quam in *C. boreali*.

Antennulæ, antennæ, mandibulæ, maxillipedes fere ut in *C. hirtipede*; flagellum antennarum c. 22-articulatum.

Segmenta trunci sat convexa, longitudine sat inæqualia; segmentum primum capite vix brevius et segmento quinto nonnihil longius; segmentum septimum sat breve. Stria laterali a medio epimero nulla.

Epimera omnia furca arcuata profunda et furca marginali ornata, magnitudine a *C. boreali* paulum discrepantia; epimera ultimi paris angulo posteriore aliquantum producto, acuminato, acutissimo.

Pedes parium trium anteriorum a *C. boreali* imprimis differunt articulo sexto paulo brevior, spinis minus numerosis, ex parte longioribus.

Pedes parium quattuor posteriorum articulo secundo longitudine et latitudine *C. boreali* subsimili, setis natatoriis paulo minus numerosis tamen fere ut in *C. hirtipede* sitis ornato, articulis ceteris fere ut in *C. hirtipede*, spinis tamen gracilioribus, ex parte longioribus, paulo minus numerosis.

Segmenta anteriora caudæ et pleopoda fere ut in *C. boreali*.

Segmentum ultimum caudæ a *C. boreali* imprimis differt characteribus in diagnosi commemoratis.

Uropoda ramis brevioribus et latioribus, acutis, fere ut in *C. boreali* spinosis et ciliatis; ramus interior duplo longior quam latior, caudam perpaulum superans et ramo exteriori aliquanto longior, margine exteriori non emarginato; scapus angulo interiore aliquantum producto, medium ramum interiorem attingente.

Color in speciminibus diu in spiritu vini asservatis rufescente-flavus.

Appendix masculina ramum interiorem perpaulum superans, styliformis, nonnihil curvata, per totam longitudinem latitudine fere æquali, ad apicem versus complanata, apice rotundato.



Forekomst. Neapels Golf, 3 Exemplarer sammen med 3 Exemplarer af *C. borealis* under Navnet «*C. hirtipes*» fra den zoologiske Station; desuden et Exemplar (den største ♀) vistnok fra Nizza (samlet af Max Schultze og modtaget fra Museet i Bonn). (I Materialet fra Moskou fandtes 12 Exemplarer, tagne ved Neapel af A. Bogdanoff.)

Det er sandsynligvis, ifølge den opgivne Størrelse (4—15<sup>mm</sup>), denne Art, om hvilken Valle (op. cit. p. 191) meddeler, at den er tagen i *Thalassochelys corticata* Rond., og hvorom han skriver: «Tra le papille dell' esofago, che come è noto ad ognuno, raggiungono nelle testuggini marine dimensioni straordinarie, stava innicchiata un' enorme quantità di crostacei parassiti. Pare che codesti parassiti avessero scelto già da lungo tempo questa testuggine per loro pasto, dappoichè buona parte dei muscoli della testa erano stati rosi molto profondamente.» Nogle Stykker vare ogsaa tagne i en *Centrina Salviani* Riss.

#### 4. *Cirolana gracilis* n. sp.

(Tab. II, Fig. 2—2 g.)

##### Mas adultus.

Diagn. *Oculi brunnescentes, a latere visi fere æque lati ac longi, ocellis paucioribus, superioribus sat convexis, inferioribus aliquantum convexis. Clypeus ad medium area biimpressa et pulchre sculpta ornatus. Epimera omnia furca arcuata, manifesta et furca marginali ornata. Pedes quinti paris pedibus septimi paris nonnihil longiores, graciliores, articulo secundo circiter duplo longiore quam latiore. Pedes septimi paris graciliores, articulo secundo valde elongato et complanato circiter duplo et dimidio longiore quam latiore. Segmentum ultimum caudæ postice marginibus valde in obliquum truncatis, spinis c. 8 ornatis, apice acuto. Uropoda ramis valde inæqualibus; ramus interior haud duplo longior quam latior, caudam nonnihil superans, ramo exteriori parvo et angusto multo longior. — Long. specim. sing. 8<sup>mm</sup>.*

Descr. Corpus plus triplo longius quam latius, aliquantum convexum.

Frons prona in processum, paulo latiore et brevior quam in *C. boreali*, producta.

Oculi majores, brunnescentes, a latere visi fere æque lati ac longi, margine superiore brevior, recto; ocelli pauciores et majores, in latere superiore satis convexi, in latere inferiore aliquantum convexi.

Lamina frontalis angustissima, ad apicem versus angustata, marginibus lateralibus ante evanidis, postice manifestis.

Clypeus labro vix brevior, margine et ante et in lateribus et postice et costa media elevatis, areas duas impressas, reticulatas cingentibus.

Antennulæ paulo crassiores quam in *C. boreali*, paulum ultra apicem articuli quarti antennarum pedunculi prominentes.

Antennæ marginem posteriorem segmenti quarti trunci attingentes; pedunculus articulo tertio vix longiore quam quarto et paulo brevior quam quinto; flagellum c. 26-articulatum.

Mandibulæ et maxillipedes fere ut in *C. boreali*.

Segmenta trunci longitudine minus inæqualia; segmentum primum capite vix brevius et segmento quinto paulo longius; segmentum septimum longius.

Epimera paulo angustiora quam in *C. neglecta*, ceteroquin ut in illa specie formata et furcata.

Pedes parium trium anteriorum fere ut in *C. boreali* formati, tamen nonnihil graciliores, setis paucioribus et spinis paucioribus et ex parte longioribus instructi.

Pedes quattuor parium posteriorum graciliores quam in *C. boreali* et ab eis sat diversi. — Pedes quinti paris elongati, pedibus septimi paris nonnihil longiores et pedibus sexti paris perpaulo breviores; articulus secundus ut in *C. boreali* formatus; setis in series tres dispositis simplicibus; articuli ceteri aliquanto graciliores quam in *C. boreali*, setis et spinis minus numerosis ornati; articulus quartus sat dilatatus, articulus quintus perpaulum dilatatus, uterque in latere superiore spinis paucis ornatus. — Pedes quarti paris sat breves. — Pedes septimi paris sat aberrantes; articulus secundus complanatus et valde elongatus, circiter duplo et dimidio longior quam lator, margine exteriori setis densis plumosis, margine medio setis paucis simplicibus, margine interiore nudo, margine apicali setis compluribus perlongis, plumosis instructo; articuli ceteri simplices, vix dilatati, breviores, setis perpaucis instructi. — Pedes sexti paris a pedibus quinti paris paulum diversi.

Segmenta quinque anteriora caudæ et pleopoda structura solita.

Segmentum ultimum caudæ plus dimidio latius quam longius, ad medium prope basin magis in transversum impressum, postice marginibus valde in obliquum truncatis, spinis c. 8 et ciliis longis ornatis, apice acuto.

Uropoda sat brevia; ramus interior haud duplo longior quam lator, caudam nonnihil superans, ramo exteriori parvo et angusto multo longior, margine posteriore quam margine anteriore multo brevior, apice vix acuto; ramus uterque spinis parvis paucioribus et ciliis ex parte longis et longioribus quam in speciebus præcedentibus instructus; scapus angulo interiore valde producto, longe ultra medium ramum interiorem prominente.

Color in specimine vetere flavo-brunnescens.

Appendix masculina longa, fere semicirculariter curvata, ultra apicem rami interioris prominens, ubique latitudine et crassitudine fere æquali, apice rotundato.

Forekomst. Det eneste kjendte Exemplar er uden Lokaltet, men da det skyldes Hr. Apotheker Riise, kan man med stor Sandsynlighed antage, at det er taget ved St. Thomas i Vestindien.

5. *Cirolana eximia* n. sp.

(Tab. II, Fig. 3—3 g.)

**Mas adultus et femina non ovigera.**

**Diagn.** *Corpus semi-cylindraceum. Oculi minores, nigri. Epimera omnia furca arcuata ornata, epimera septimi paris inter omnia maxima, epimeris sexti paris multo latiora et vix breviora. Pedes parium trium anteriorum articulo quarto in latere exteriore in processum medium articulum sextum attingentem producto. Pedes septimi paris articulo secundo nec elongato nec dilatato, setis paucis instructo, articulo quarto magno, ad apicem versus valde dilatato et in angulo exteriore setis nonnullis plumosis instructo, articulo quinto ad apicem versus valde dilatato, æque lato ac longo, articulo sexto perbrevis. Segmentum ultimum caudæ apice paulum producto, acuto. Uropoda ramo interiore apice truncato et margine exteriore ad apicem profunde inciso-emarginato, ramo exteriore valde angustato ramum interiorem et caudam multo superante, setis nonnullis apicalibus longissimis ornato. — Long. maris c. 23<sup>mm</sup>, long. feminae 19,5<sup>mm</sup>.*

**Descr.** Corpus circiter triplo et tribus quartis partibus longius quam latius, semi-cylindraceum, ubique latitudine fere æquali, alte convexum.

Frons prona visa ante emarginata, a fronte visa processu brevi, ad basin latissima, incurvata instructa.

Oculi minores, nigri, fere æque lati ac longi, a margine acuto, elevato capitis in partes duas divisi; ocelli sat numerosi, per paulum convexi.

Lamina frontalis sextuplo fere longior quam latior, ad apicem versus nonnihil dilatata, apice subacuto, a latere visa parte subapicali sat incurva.

Clypeus labro perpaulo brevior, marginibus elevatis, in transversum paulum furcatus.

Antennulæ fere ut in *C. boreali* constructæ, pedunculo tamen brevior et paulo brevior quam flagello c. 13-articulato.

Antennæ circiter medium segmentum secundum trunci attingentes; pedunculus fere ut in *C. boreali*, articulo tertio tamen fere brevior quam articulo quarto; flagellum c. 28-articulatum.

Mandibulæ acie nonnihil brevior quam in *C. boreali*.

Maxillipedes articulo quinto aliquanto majore quam in *C. boreali*, articulis duobus ultimis minoribus.

Segmenta trunci alte convexa, longitudine nonnihil inæqualia; segmentum primum capite et segmento quinto nonnihil longius; segmentum septimum sat longum segmento sexto nonnihil brevius.

Epimera postice per paria latitudine crescentia, omnia præter furcam marginalem furca arcuata ornata; epimera septimi paris epimeris sexti paris vix breviora et postice multo latiora, in obliquum valde producta.

Pedes parium trium anteriorum sat breves et robusti; articulus tertius nonnihil elongatus, æque latus ac longus, processu exteriori longitudine insolita; articulus quartus processu exteriori perlongo medium articulum sextum attingente; articulus sextus brevior et crassior; spinæ et setæ fere ut in *C. boreali*.

Pedes quattuor posteriorum parium articulo secundo neque elongato neque dilatato vel complanato, setis paucioribus simplicibus imprimis in margine exteriori et in margine apicali ornato. — Pedes quinti paris breves pedibus septimi paris paulo breviores; articulus tertius fere ut in *C. boreali*, articulus quartus sat dilatatus, articulus sextus articulo quinto quarta parte longior, apice longe setoso. — Pedes septimi paris structura valde peculiari; articulus tertius elongatus articulo secundo paulo brevior, ad apicem versus nonnihil dilatatus, angulo exteriori setis nonnullis longis simplicibus ornato; articulus quartus nonnihil elongatus et ad apicem versus valde dilatatus, angulo exteriori setis compluribus longis ex parte majore plumosis instructo; articulus quintus quoque ad apicem versus valde dilatatus, æque latus ac longus, margine apicali setis et spinis mediocribus instructo; articulus sextus perbrevis, articulo quinto brevior. — Pedes sexti paris pedibus septimi paris nonnihil longiores et eis structura sat similes.

Segmenta quattuor anteriora et imprimis duo anteriora caudæ prona visa magis arcuata quam in speciebus præcedentibus, «epimeris» structura aberrante.

Pleopoda anteriora nonnihil breviora et latiora quam in *C. boreali*, ramis forma nonnihil aberrante.

Segmentum ultimum caudæ aliquantum latius quam longius, perpaulum convexum, ad basin vix impressum; margo posterior ciliis brevioribus, spinis nullis ornatus, minus late rotundatus, parte media apicali tamen sat producta, acuta.

Uropoda (fig. 3 g) structura mirabili. Ramus interior segmento ultimo caudæ perpaulo brevior, duplo longior quam latior; margo posterior subrecte truncatus, spinis nonnullis instructus; margo exterior per longitudinem majorem rectus, parte apicali profunde incisa; margo anterior perlongus. Ramus exterior valde angustatus et elongatus, ramum interiorem longe superans; margines exterior et interior non spinosi, ciliis mediocribus plumosis instructi, apex subtruncatus setis nonnullis perlongis, ex parte longioribus quam ramo, non plumosis ornatus. Scapus angulo interiore perlongo,  $\frac{2}{3}$  marginis interioris ramo interioris explente.

Color in speciminibus diu in spiritu vini asservatis albidus, dorso ubique punctis minutis, nigris, crebrius sparsis, ornato.

Appendix masculina ramum interiorem nonnihil superans, nonnihil curvata, in latere inferiore setis permultis perminutis ornata, a basi ad apicem versus sensim valde complanata, a basi et per duas tertias partes longitudinis sensim sat dilatata, deinde ad apicem versus angustata, apice producto, acuto.

Forekomst. De to kjendte Exemplarer ere mærkede: Brasilia, Prof. Selenka.

#### 6. *Cirolana concharum* (Stimps.).

(Tab. II, Fig. 4—4 f.)

*Æga concharum* Stimpson, Mar. Invert. Grand Manan, l. c. p. 42 [1854].

*Cirolana concharum* Harger, Mar. Isop. New Engl., op. cit. n° 4, p. 378, Pl. IX, Fig. 58, Pl. X, Fig. 59—63.

— — Harger, Rep. of Dredg. by „Blake“, op. cit. n° 5, Pl. I, Fig. 4, Pl. II, Fig. 4—4 c.

#### Femina non ovigera.

Diagn. *Corpus vix semi-cylindraceum. Oculi minores, nigri. Epimera omnia præter furcam marginalem æquata; epimera septimi paris epimeris sexti paris nonnihil breviora et latiora. Pedes septimi paris sat longi, articulo secundo nec elongato nec dilatato, articulis tertio, quarto, quinto elongatis, sat dilatatis, in angulo exteriori setis non plumosis ex parte longissimis instructis. Segmentum ultimum caudæ apice truncato-emarginato. Uropodorum ramus interior margine exteriori ad apicem profunde emarginato, caudam perpaulum superans, ramus exterior ramum interiorem perpaulum superans, valde angustatus, in apice spina una robusta, non setis elongatis instructus. — Long. 22<sup>mm</sup>. (interdum 32<sup>mm</sup>, Harger).*

Descr. Corpus plus triplo (interdum triplo et dimidio) longius quam latius, aliquantum convexum, vix semi-cylindraceum.

Frons fere ut in *C. boreali*, processu tamen nonnihil brevior.

Oculi minores, nigri, subtrigoni, angulis rotundatis, æquati, ocellis sat numerosis.

Lamina frontalis fere ut in *C. eximia*.

Clypeus fere ut in *C. eximia* formatus, parte media tamen convexa.

Antennulæ pedunculum antennarum paulum superantes; flagellum sat crassum, pedunculo paulo longius, c. 15-articulatum.

Antennæ breves, marginem posteriorem segmenti primi trunci non attingentes; pedunculus brevis, articulis tribus ultimis inter se æquilongis, articulis quattuor prioribus

incrassatis, articulis tertio et quarto in parte exteriori marginis posterioris setis multis perlongis ornatis; flagellum c. 17-articulatum.

Mandibulæ et maxillipedes fere ut in *C. eximia* constructa.

Segmenta trunci sat convexa, longitudine sat inæqualia; segmentum primum capite nonnihil brevius et segmento quinto paulo longius vel non longius; segmentum septimum segmento sexto aliquanto brevius.

Epimera sat lata, postice per paria latitudine nonnihil crescentia, omnia præter furcam marginalem æquata; epimera septimi paris epimeris sexti paris nonnihil breviora et latiora, postice in obliquum valde producta.

Pedes trium parium anteriorum fere ut in *C. boreali* constructi, nonnihil tamen graciliores.

Pedes quattuor parium posteriorum structura medium quasi tenent inter *C. borealem* et *C. eximiam*, articulo secundo nec elongato nec dilatato vel complanato, setis paucioribus simplicibus imprimis in margine exteriori et in margine apicali instructo. — Pedes quinti paris sat longi, pedibus septimi paris nonnihil breviores; articulus secundus brevis; articulus tertius per dilatatus longior quam latior; articuli quartus et quintus fere ut in *C. boreali* constructi et spinosi, tamen nonnihil angustiores; articuli tertius et quartus et quintus setis multis longis non plumosis instructi; articulus sextus valde elongatus, articulis duobus prioribus junctis vix brevior. — Pedes septimi paris elongati; articuli tertius et quartus et quintus nonnihil elongati et ad apicem versus sat dilatati, angulo posteriore setis multis ex parte longis, non plumosis instructi; articuli quartus, quintus, sextus inter se longitudine æquales. — Pedes sexti paris pedibus septimi paris nonnihil longiores, pedibus quinti paris structura sat similes.

Segmenta anteriora caudæ et pleopoda fere ut in *C. boreali*.

Segmentum ultimum caudæ nonnihil latius quam longius, paulum convexum, ad marginem lateralem versus impressione longitudinali ornatum, a medio ad apicem versus sensim sat angustatum, apice latius truncato-emarginato, spinis 4 a medio sat remotis ornato.

Urópoda structura insigni. Ramus interior caudam perpaulum superans, margine posteriore brevi, obliquo, spinis nonnullis ornato, margine anteriore perlongo, margine exteriori nonnihil arcuato ad apicem sat profunde emarginato-inciso. Ramus exterior ramum interiorem perpaulum superans, valde angustatus, apice acuto spina singula robusta et setis nullis longis instructo, marginibus lateralibus non spinosis ciliis mediocribus ornatis. Scapus angulo interiori valde producto, duplo longiore quam margine posteriore rami interioris.

Color in speciminibus diu in spiritu vini asservatis brunnescente-flavus, punctis nigris crebrius conspersus.

Forekomst. Harger skriver (op. cit. n° 4, p. 381): «This species was described by Stimpson from Charleston, S. C. Most of the specimens in the collection are from Vineyard Sound!, where it occurs sometimes in great abundance, and is common especially during the winter. It is found swimming about in shallow water; and may be taken by a scoop-net, and it is found also in lobster pots. It was dredged in 45 fathoms off Block Islands! near the eastern end of Long Island Sound, in 1874, but has not yet been found north of Cape Cod.» Derpaa giver Harger en speciellere Liste, hvortil henvises. — De to af mig undersøgte Exemplarer ere tilbyttede fra A. M. Norman, der vist har faaet Arten fra Nordamerika.

Sammesteds skriver Harger: »Length of large specimens 32<sup>mm</sup>, breadth 10<sup>mm</sup>, but usually smaller; 22<sup>mm</sup> long, 7<sup>mm</sup> broad. The ground color in life is yellowish, with reddish brown on the anterior margin of the head and on the posterior margins of the segments, especially in the dorsal region, where the segments are also marked with black dots. In the life the body is somewhat translucent in the thinner parts.» — Harger har ogsaa i op. cit. n° 4 sammenstillet Artens rigtige Synonymi indtil 1878.

Leidy meddeler (op. cit. n° 1), at han, gaaende ved Strandbredden ved Beach Haven, New Jersey, fandt «here and there a dead crab, *Callinectes hastatus*, lying on the sand, near the last high tide mark. The crabs observed happened to be all females and they appeared to have died recently, as some were quite fresh and showed no signs of decomposition. Others, broken open by removing the carapace, were found to have the body cavity swarming with a living isopod, the *Cirolana concharum*, which had preyed upon the organs and were variously colored by the food with which they were gorged. From a single crab there were taken 108 of the *Cirolana* ranging from 15 to 22 mm. in length by 5 to 7 mm. in breadth.» — Den samme Forfatter anfører i op. cit. n° 2, at han senere ogsaa har fundet den samme *Cirolana* i døde Stykker af *Platyonichus ocellatus*.

Lockwood (op. cit. n° 1, her refereret efter Science, II, 1883, p. 664) meddeler et interessant Fund af denne Art. I en voxen Hun af Krabben *Callinectes hastatus* Ordway, funden ved New Jersey, fandtes 23 <sup>3</sup>/<sub>4</sub> Tomme lange Exemplarer af *Cir. concharum* (bestemte af Harger) i Dyrets venstre Side. «The ovaries and the tissues on the left side were completely honeycombed.» «With these predaceous wolves, literally consuming its (Krabbens) inwards, it surely would soon succumb.» Resten af Lockwoods Antagelser forbigaas, da de dels ere usikre, dels utvivlsomt fejlagtige.

Denne Art er kun kjendt fra den af Harger omtalte Kyststrækning. Naar G. O. Sars (op. cit. n° 3, p. 61) skriver, at den af ham «først paa Storeggen observerede og nylig af Dr. Hoek fra den hollandske Nordpolexpedition beskrevne Form (nemlig *C. microphthalmalma* Hoek) . . . . stemmer fuldstændig overeens med den amerikanske Form», nemlig *C. concharum*, saa er dette urigtigt. Sars har ogsaa senere (op. cit. n° 4, p. 29) optaget

Navnet *C. concharum* Stimps. for den paagjældende arktiske Art og er heri bleven fulgt af Max Weber (op. cit. p. 7), men i 1886 fik jeg ved Hr. Prof. Colletts Velvillie Lejlighed til at sammenligne et Exemplar af den nordamerikanske Form med Stykkerne fra den norske Nordhavsexpedition, og overbeviste baade mig selv og Prof. Sars om, at det er 2 vel adskilte Arter (hvilket ogsaa kan skjønnes ved en Sammenligning mellem de af Harger og Hoek givne Figurer), af hvilken den ved Storeggen, i Havet Øst for Vardø og i Barents-Søen tagne Art bør bære Navnet *C. microphthalma* Hoek. Denne vil senere blive nævnet mellem de Arter, som ikke ere beskrevne her.

De nu beskrevne 6 Arter, der ligne hverandre særdeles meget i Habitus og i en Række Bygningsforhold, give, forekommer det mig, en lang Række interessante og paa-faldende Forskjelligheder i Bygningen af deres Svømmeredskaber, nemlig Benene og sidste Haleled med Uropoderne, hvis Grene og Skaft vise saa store og mærkelige Forskjelle i Form m. m. De 2 af Harger (op. cit. n° 5) godt fremstillede Arter *C. polita* (Stimps.) og *C. impressa* Harg. vise andre interessante Kombinationer i de samme Organers Bygning, og naar man engang faar gode Fremstillinger af *C. microphthalma* Hoek, *C. Rossii* Miers, *C. Schiodtei* Miers, *C. tenuistylis* Miers og muligvis andre ubekjendte, til denne Gruppe hørende Arter, vil man faa nye Bygningstræk og Kombinationer af Karakterer i de oven-nævnte Svømmeredskaber. Særlig med disse Forhold for Øje antager jeg, at de oven-staaende lange Beskrivelser skulle vise sig ikke at være for lange.

#### Sectio secunda.

Lamina frontalis inermis, lata, brevis, pentagona (rarius fere hexagona), vix dimidio longior quam latior.

Clypeus inermis, non cornutus, ante perspicue cum lamina frontali conjunctus.

Antennulæ pedunculo obscure triarticulato (primo visu biarticulato), flagello semper satis gracili.

Pedes omnes setis perpaucis vel nullis instructi.

#### 7. *Cirolana sulcata* n. sp.

(Tab. II, Fig. 5—5 e.)

#### Mas adultus et specimen junius.

Diagn. Antennulæ pedunculo antennarum breviores. Antennæ marginem posteriorem segmenti secundi trunci non attingentes. Epimera mediocria, omnia præter furcam marginalem furca arcuata profunda, epimera parium quattuor posteriorum præterea furca



*debiliore ornata. Pedes robustiores, simplices. Segmentum ultimum caudæ subtrigonum, apice rotundato, in medio dorso per longitudinem sulco magno carinis duabus crassis, ante conjunctis, circumdato, ornatum. Uropoda ramis latioribus, in apice bifidis, ramo interiore caudam et ramum exteriorem nonnihil superante. — Long. maris c. 8,5<sup>mm</sup>.*

**DESCR.** Corpus circiter duplo et  $\frac{3}{4}$  partibus longius quam latius, sat convexum. Frons prona ante æque rotundata, a fronte visa processu brevissimo instructa.

Oculi minores, nigri, paulo latiores quam longiores, fere æquati, ante a margine laterali acuto capitis in partes duas divisi.

Lamina frontalis vix dimidio longior quam latior, pentagona, ante non cum apice frontis conjuncta, nonnihil convexa, marginibus lateralibus elevatis.

Clypeus labro paulo brevior, marginibus lateralibus aliquantum incrassato-elevatis, area media convexa, in media iterum paulum impressa.

Antennulæ breves, pedunculo antennarum paulo breviores; pedunculus 3-articulatus, articulis binis basalibus tamen ægre inter se distinctis. Flagellum pedunculo paulo brevius, sat gracile, 7-articulatum.

Antennæ breviores, marginem posteriorem segmenti secundi trunci non attingentes; pedunculus articulo tertio brevi fere duplo brevior quam articulo quarto, articulo quarto fere longior quam articulo quinto; flagellum c. 18-articulatum.

Mandibulæ acie angustiore.

Maxillipedes fere ut in *C. eximia*.

Segmenta trunci sat convexa; segmentum primum capite paulo longius et segmento quinto multo longius; segmenta 6 posteriora longitudine minus diversa; segmenta 4 posteriora stria transversali a margine posteriore sat remota instructa.

Epimera medioeria, fere ut in *C. parva* formata, omnia præter furcam marginalem furca arcuata profundissima ornata, segmenta 4 posteriora præterea furca alia leviter impressa; epimera septimi paris epimeris sexti paris paulo breviora et vix latiora, medio-criter producta.

Pedes trium parium anteriorum sat robusti; articulus quartus processu exteriori apicem articuli quinti attingente; articulus sextus brevior et crassior.

Pedes quattuor parium posteriorum breviores et crassiores, setis perpauca ornati. Pedes septimi paris pedibus quinti paris nonnihil longiores et pedibus sexti paris paulo breviores.

Segmenta anteriora caudæ structura solita; segmenta tertium, quartum, quintum imprimis ad marginem posteriorem versus nodulis compluribus minutis ornata.

Pleopoda primi paris ramo exteriori lato et sat duro.

Segmentum ultimum caudæ aliquanto latius quam longius, subtrigonum, apice rotundato spinis 6 armato, in medio dorso per longitudinem sulco magno et profundo carinis duabus crassis, ante conjunctis, circumdato ornatum, in areis lateralibus nonnihil excavatum; superficies imprimis ad basin versus et in dorso carinarum nodulis minutis sat multis ornata.

Uropoda ramis latioribus, spinis sat numerosis et ciliis mediocribus plumosis ornatis; apex rami utriusque bifidus ibique setis nonnullis longioribus instructus; ramus interior caudam et ramum exteriorem nonnihil superans, vix duplo longior quam latior, margine intero-posteriore nonnihil excurvato; ramus exterior sat latus; scapus angulo postero-interiore circiter medium ramum interiorem attingente.

(Color in specimine vetere brunneus.)

Appendix masculina nonnihil ultra apicem rami interioris prominens, paulum curvata, ubique latitudine æquali, styliformis.

Forekomst. Af denne let kjendelige Art har jeg set 3 Exemplarer, tagne i Simons Bay ved Cap (Hansen & Thalbitzer, 1863). De 2 Exemplarer ere mindre vel konserverede Hanner, det tredie Exemplar er betydelig mindre end de andre og befinder sig nærved Hudskifte, de 3 sidste Kropsegmenter ere nemlig betydelig højere og bredere end de foranliggende.

Hos denne og de fleste nærmest følgende Arter ses det meget smukt, hvorledes Antennulernes oprindeligt meget tydelig 3-leddede Skaft ved svag Udvikling af Ledføjningen mellem de 2 Grundled nærmer sig til at blive 2-leddet, thi disse Arter danne netop i saa Henseende en Melleform mellem de foregaaende Arter og *Cir. minuta* samt de til *Corallanidæ* og *Alcironidæ* hørende Former, hvor Antennulskafte kun er 2-leddet.

#### 8. *Cirolana californica* n. sp.

(Tab. III, Fig. 2—2 f.)

##### Femina ovigera.

Diagn. *Antennulæ pedunculo antennarum perpaulo longiores. Antennæ longæ, ultra marginem posteriorem segmenti quinti trunci productæ. Epimera postice sensim latitudine sat crescentia, furca marginali et furca arcuata profundissima instructa. Pedes graciliores, simplices. Segmentum ultimum caudæ late trigonum, dorso nonnihil convexo, margine posteriore spinis c. 26 robustis, dense sitis, et setis paucis brevioribus ornato. Uropoda ramis sat latis; ramus uterque spinis multis ornatus, apice rotundato; ramus interior caudam et ramum exteriorem nonnihil superans. — Long. femine 9,7<sup>mm</sup>.*

Descr. Corpus circiter duplo et dimidio longius quam latius, nonnihil convexum. Frons et oculi fere ut in *C. sulcata*.

Lamina frontalis dimidio longior quam latior, pentagona, paulum convexa, marginibus lateralibus angustis, paulum elevatis.

Clypeus labro paulo brevior, parte media æquata.

Antennulæ longiores, paulo ultra apicem pedunculi antennarum prominentes, graciles; pedunculus 3-articulatus, articulo basali brevi, articulo tertio nonnihil elongato, gracili; flagellum pedunculo longitudine æquale, c. 14-articulatum.

Antennæ longæ, ultra marginem posteriorem segmenti quinti trunci prominentes; pedunculus articulo tertio multo brevior quam articulo quarto, articulo quinto paulo longiore et aliquanto graciliore quam articulo quarto; flagellum c. 38-articulatum.

Mandibulæ et maxillipedes ut in specie præcedente.

Segmenta trunci longitudine fere ut in *C. sulcata*; segmentum septimum segmento sexto vix brevius; segmenta 4 posteriora stria transversali nulla.

Epimera postice sensim latitudine crescentia, furca marginali et furca arcuata profundissima ornata; epimera septimi paris postice aliquantum producta.

Pedes trium parium anteriorum graciliores. Pedes secundi et tertii parium pedibus primi paris nonnihil graciliores; articulus quartus processu exteriore circiter medium articulum quintum attingente; articulus sextus longior, sat gracilis.

Pedes parium quattuor posteriorum manifesto graciliores quam in specie præcedente, postice per paria longitudine crescentes, setis nullis ornati.

Segmenta anteriora caudæ et pleopoda structura solita.

Segmentum ultimum caudæ aliquanto latius quam longius, subtrigonum, apice rotundato; dorsum sat convexum, furca media fere obsoleta; margo posterior spinis c. 26 robustis et ad apicem segmenti versus robustioribus armatus, setis paucis brevioribus inter spinas instructus.

Uropoda ramis sat latis; ramus interior  $\frac{2}{3}$  longior quam latior, caudam et ramum exteriorem nonnihil superans, margine postero-interiore sat excurvato, spinis c. 10 robustis ornato, angulo posteriore late rotundato; ramus exterior apice rotundato, margine utroque spinis densius armato; cilia natatoria in ramo utroque partim breviora, partim longiora, ubique spisse disposita. Scapus angulo interiore nonnihil ultra medium ramum interiorem producto.

Color in specimine diu in spiritu vinu asservato pallidus; in dorso trunci puncta multa picea inventa sunt.

Forekomst. San Diego, Californien, 1 Ex. (Prof. Esmark).

9. *Cirolana parva* n. sp.

(Tab. II, Fig. 6—6 b et Tab. III, Fig. 1—1 d.)

**Mas adultus et femina ovigera.**

**Diagn.** *Frons in processum a fronte visum longum, sat angustum, inter pedunculos antennularum situm, circumflexum, producta. Antennulæ pedunculo antennarum paulo longiores. Antennæ longæ, circiter marginem posteriorem segmenti quinti trunci attingentes. Epimera postice latitudine paulum crescentia, furca marginali et furca arcuata profunda ornata. Pedes graciliores, simplices. Segmentum ultimum caudæ latum, subtrigonum, apice latius rotundato, spinis c. 8 minoribus armato. Uropoda breviora; ramus interior latus, caudam paulum superans et ramum exteriorum aliquantum superans, apice bifido; ramus exterior angustior, apice bifido. — Long. maris maximi 7,2<sup>mm</sup>, long. feminae ovigeræ 5,7<sup>mm</sup>, long. feminae alius ovigeræ 8,3<sup>mm</sup>, long. feminae maximæ non ovigeræ 7,7<sup>mm</sup>.*

**Descr.** Corpus circiter duplo et  $\frac{2}{3}$  longius quam latius, elongato-ovatum, sat convexum.

Frons prona ante late rotundata, processu medio paulum manifesto, a fronte visus processu longo, a basi ad apicem versus sensim angustato, inter antennulas sito, circumflexo, æquato, cum lamina frontali conjuncto instructa.

Oculi fere ut in *C. sulcata*.

Lamina frontalis sat magna, fere hexagona, angulo anteriore truncato, cum processu frontis conjuncto; ceterum fere ut in *C. californica*.

Clypeus brevis, labro multo brevior, ceteroquin structura solita.

Antennulæ longiores, pedunculo antennarum paulo longiores; pedunculus obscure triarticulatus, flagello multo longior; flagellum gracile, c. 11-articulatum.

Antennæ longæ, circiter marginem posteriorem segmenti quinti trunci attingentes; pedunculus articulo quarto multo longiore quam articulo tertio et paulo brevior quam articulo quinto; flagellum 27—31-articulatum.

Mandibulæ et maxillipedes fere ut in *C. eximia*.

Segmenta trunci fere ut in *C. californica*.

Epimera mediocria, postice paulum latitudine crescentia, furca arcuata et furca marginali ornata.

Pedes omnes fere ut in *C. californica*; pedes sexti et septimi parium inter se fere æquilongi.

Segmenta anteriora caudæ et pleopoda structura solita.

Segmentum ultimum caudæ aliquanto latius quam longius, subtrigonum, paulum et æqualiter convexum, apice latius rotundato, spinis c. 8 minoribus et setis brevioribus instructo.

Uropoda ramis brevioribus; ramus interior caudam paulum superans et ramum exteriorem nonnihil superans, latus, circiter  $\frac{2}{3}$  longior quam latior, margine postero-interiore valde excurvato, spinis nonnullis et setis mediocribus ornato, apice bifido; ramus exterior minus latus, mediocriter spinosus, apice bifido. Scapus angulo interiore nonnihil ultra medium ramum interiorem attingente.

Color in speciminibus diu in spiritu vini asservatis pallide-brunnescens, punctis nigris densius sparsis mixtus.

Appendix masculina aliquantum ultra apicem rami interioris attingens, ad apicem versus complanata, parte apicali acuminata, nonnihil incurvata, apice ipso acuto.

Forekomst. Jeg har set ialt 12 Exemplarer, som jeg har maattet henføre til denne Art. Deres Lokalteter ere følgende: St. Thomas, Vestindien, 5 Ex. (Krebs, 1867); St. Croix, Vestindien, 2 Ex. (Ørsted); Vestindien, 1 Ex. (Krøyer); uden Lokaltet, men sandsynligvis Vestindien, 1 Ex.;  $25^{\circ}$  N. B.,  $34^{\circ}$  V. L., 2 Ex. (Hygom); Samoa-Øerne, 1 Ex. (Mus. Godeffroy).

Jeg har, paa Grund af Lokalteten, næret stor Betænkelighed ved at henføre det ene Stykke, der skal stamme fra Samoa-Øerne, til denne Art, men da jeg ingen Forskjelle kunde opdage, har jeg alligevel foretaget Henførelsen. Det nævnte Stykke laa i Glas sammen med den senere beskrevne *Alcirona insularis* n. sp., men om Lokaltetsangivelsen er rigtig faar staa hen. — Det er meget interessant, at denne Art, der ifølge sin Bygning maa staa adskilligt tilbage i Svømmedygtighed for en Mængde andre Arter, er tagen pelagisk 1 Gang, thi saa kan man ogsaa med en vis Sandsynlighed slutte, at adskillige af de andre smaa Arter ogsaa af og til maa kunne forekomme pelagisk.

#### 10. *Cirolana Cranchii* Leach.

(Tab. III, Fig. 3—3 i.)

*Cirolana Cranchii* Leach, Diet. d. Sc. Nat., Vol. XII, p. 347 [1818].

*Nelocira Swainsonii* Leach, — — — —

— — Desmarest, Consid. Crust., p. 302, Pl. 48, Fig. 2.

*Cirolana Cranchii* — — — — p. 303.

— — H. Milne-Edwards, Hist. Nat. d. Crust., T. III, p. 236.

*Eurydice Swainsonii* — — — — — p. 238.

*Cirolana Cranchii* Sp. Bate & Westwood, Brit. Sess.-eyed Crust., Vol. II, p. 296.

— *Swainsonii* Miers, Crust. fr. Goree-Island, op. cit. n° 6, p. 369.

**Mas adultus et femina non ovigera et specimina juniora.**

**Diagn.** *Frons processu brevi cum lamina frontali non conjuncto. Antennula pedunculo antennarum perpaulo longiores. Antennæ longæ, circiter marginem posteriorem segmenti quinti trunci attingentes. Epimera postice per paria latitudine sat crescentia, furcis binis solitis instructa. Pedes robustiores, simplices. Segmentum ultimum caudæ nonnihil latius quam longius, subtrigonum, apice breviter rotundato, margine posteriore spinis 10—12 et ciliis multis instructo, dorso in speciminibus junioribus manifesto convexo, in speciminibus adultis ex parte majore plano. Uropoda mediocria; ramus interior caudam sat superans et ramum exteriorem paulum superans, utroque margine sat excurvato, apice integro, acuto; ramus exterior apice acuto. — Long. 15<sup>mm</sup>.*

**DESCR.** Corpus imprimis in adultis brevius et latius, duplo et dimidio vel fere triplo longius quam latius, oblongo- vel elongato-ovatum, in speciminibus junioribus fere semi-cylindraceum, triplo vel triplo et tertia parte longius quam latius.

Frons prona late rotundata, a fronte visa processu brevior, ad basin lato, acuto, incurvato, non cum lamina frontali conjuncto, instructa.

Oculi minores, nigri, paulo latiores quam longiores, subæquati, a margine laterali capitis prominente in partes duas divisi.

Lamina frontalis dimidio longior quam latior, pentagona, paulum convexa, marginibus lateralibus paulum elevatis.

Clypeus labro paulo brevior, marginibus lateralibus aliquantum incrassato-elevatis, area media paulum convexa, æquata.

Antennulæ mediocres, paulum ultra apicem pedunculi antennarum productæ; pedunculus obscure triarticulatus (primo visu biarticulatus, articulis binis basalibus ægre inter se distinctis), vix longior quam flagellum; flagellum minus gracile, c. 15-articulatum.

Antennæ longæ, fere usque ad vel interdum ultra marginem posteriorem segmenti quinti trunci productæ; pedunculus articulo quarto multo longiore quam articulo tertio, vix brevior quam articulo quinto; flagellum c. 36—41-articulatum.

Mandibulæ et maxillipedes fere ut in *Cir. eximia*.

Segmenta trunci structura solita; segmentum primum longum, capite aliquanto longius, segmenta 6 posteriora longitudine inter se subæqualia.

Epimera postice per paria sensim latitudine sat crescentia, fere ut in *Cir. californica* formata et furcata.

Pedes robustiores; pedes secundi et tertii parium articulo quarto in latere exteriori apicem articuli quinti non attingente, articulo sexto longitudine et crassitudine mediocri; pedes septimi paris pedibus sexti paris paulo longiores.

(Segmentum primum et ex parte segmentum secundum interdum superne occulta, interdum segmenta omnia detecta.)

Pleopoda structura solita.

Segmentum ultimum caudæ in diagnosi commemoratum.

Uropoda mediocria; ramus interior paulo plus duplo longior quam latior; scapus angulo interiore manifesto ultra medium ramum anteriorem attingente; characteres ceteri in diagnosi commemorati.

Color flavo-brunnescens vel rufo-brunneus, cum punctis et maculis irregularibus minutis, nigris, densius vel rarius sparsis, mixtus.

Appendix masculina ramum anteriorem nonnihil superans, gracilis, parte apicali attenuata, gracillima, paulum curvata, apice ipso acuto.

Forekomst. Villafranca, 1 Ex. [den afbildede Han] (G. Winther, <sup>29/11</sup> 78); Nizza, 1 Ex. [det afbildede lille Ex.] (Mørch, 1869). Desuden fandtes i Materialet fra Museet i Moskou 9 Ex. (tagne af A. Bogdanoff ved Villafranca).

Under Forudsætning af, at Synonymi-Listen er rigtig (se nedenfor), har denne Art en meget anselig Udbredelse. Leach har opstillet «*Cir. Cranchii*» paa Exemplarer fra Falmouth; Sp. Bate & Westwood have desuden haft 1 Ex., taget paa 6 Favne Vand ved Plymouth og have modtaget Arten fra Cumbraë. Bonnier har ved Frankrigs Kyst skrabet Arten paa 80 Fv., og efter egne lagttagelser (op. cit. p. 135) og efter Delage (op. cit. p. 156), Chevreux (op. cit. p. 519) og Koehler (op. cit. p. 25 og 61) opgiver han følgende Lokalteter: de anglo-normanniske Øer, Roscoff, Concarneau, le Croisic. Leach har (l. c.) opstillet «*Nelocira Swainsonii*» paa 1 Ex. fra Sicilien, og Miers nævner den (l. c.) fra Goree-Island, Senegambien.

Arten nævnes dernæst af White (op. cit. n<sup>o</sup> 1, p. 106 og n<sup>o</sup> 2, p. 79) samt af Gosse (op. cit. p. 230). Den af G. O. Sars (op. cit. n<sup>o</sup> 2, p. 83 og 91) nævnte *Cir. Cranchii* er ikke denne Art, men *Cir. microphthalmia* Hoek (se senere). Risso opstiller (op. cit. p. 122) en Art, som han kalder *Cirolana ferruginosa*; Beskrivelsen kan godt passe paa denne Art, men er forøvrigt af den Beskaffenhed, at man ikke kan drage nogensomhelst sikker Slutning af den; jeg antager derimod, ifølge mit Materiale, at Arten maa være ret almindelig ved Nizza og Villafranca, der netop er den Lokaltet, Risso undersøgte, saa han med adskillig Sandsynlighed maa have stødt paa den, hvorfor en Henførelse af hans tvivlsomme Art til *Cir. Cranchii* Leach har ikke ringe Sandsynlighed for at være rigtig. Risso skriver om den: «Long. 0,020. Séj. Sur la leiche. App. Août, septembre». En Del af Rissos Text er udskreven af Carus, op. cit. p. 438.

Ved et Tilfælde vare de 2 Exemplarer, jeg besad, da denne Afhandling blev udarbejdet, meget forskellige i Størrelse, det ene dernæst bredt, det andet særdeles lang-

strakt, og der fandtes desuden smaa Forskjelle i 6te Haleleds Form og i Uropodernes Form og Haarklædning. Jeg antog da med lidt Tvivl, at jeg havde at gjøre med 2 distinkte Arter, og at disse Arter vare identiske med de af Leach opstillede *Cir. Cranchii* og *Nelocira Swainsonii*, samt at det lille, slanke Exemplar var den førstnævnte Art. Jeg bestyrkedes yderligere i denne Mening ved at læse Bemærkningerne af Miers, l. c. p. 370 og 371; denne Forfatter havde ogsaa undersøgt Leach's Original Exemplarer. Et nøjere Studium af det senere modtagne Materiale fra Moskou viste mig imidlertid, at Forskjellene mellem mine 2 Stykker kun vare Alders- og Sammentrækningsdifferenser. Hos unge Exemplarer er Legemet i det Hele slankere og sidste Haleled lidt mere hvælvet og lidt bredere afrundet end hos voxne Stykker; dernæst har man her et slaaende Exempel paa, at den Omstændighed, at et Haleled mere eller mindre er skjult under sidste Kropled ofte ikke har den ringeste Betydning, ligesom man ogsaa ser, at den Grad, i hvilken Kroppens Led kunne være skudte kikkertagtig sammen, kan variere meget og derved give nogle Exemplarer af samme Art Udseende af at være kortere og bredere med de 6 bageste Kroplede forholdsvist kortere, medens andre Exemplarer derimod ere længere og smallere med længere Kroplede. Disse Forskjelle samt de nævnte Differenser i Halens og Uropodernes Form oplyses ret skarpt af mine paa Tab. IV meddelte Figurer.

Med Hensyn til Artens øvrige Synonymi henvises til Listen og Bemærkningerne i det citerede Arbejde af Miers. Senere har den samme Forfatter (op. cit. n<sup>o</sup> 7, p. 303) atter kort omtalt denne Art.

### Sectio tertia.

Lamina frontalis postice in cornu magnum, valde deorsum directum producta.  
Clypeus inermis.

Species duæ adhuc pertinentes inter se valde dissimiles.

(Medens den ene af Arterne, *C. elongata* M.-Edw., er meget ejendommelig i flere Henseender, nærmer den sig dog adskilligt til Dyrene i første Afdeling, som *C. borealis* og *C. eximia*; den anden Art nærmer sig derimod betydelig til den til anden Afdeling hørende *C. parva*. Jeg har imidlertid paa Grund af den ypperlige Karakter i *Lamina frontalis* foretrukket at stille dem sammen i én Gruppe.)



11. *Cirolana elongata* H. Milne-Edw.

(Tab. III, Fig. 4—4 I.)

*Cirolana elongata* H. Milne-Edwards, Hist. Nat. d. Crust., Tome III, p. 236 (1840) (Verosimiliter).**Mas adultus et femina ovigera.**

**Diagn.** *Corpus semi-cylindraceum. Frons prona profunde emarginata. Antennulæ pedunculo antennarum aliquanto breviores; pedunculus 3-articulatus. Antennæ circiter medium truncum attingentes. Epimera angulo posteriore rotundato. Pedes trium parium anteriorum articulo tertio processu exteriori perlongo, angustiore ornato, articulo quarto processu exteriori longissimo ultra medium articulum sextum attingente instructo. Pedes septimi paris articulo secundo aliquantum dilatato, setis natatoriis numerosissimis instructo. Segmentum ultimum caudæ uropoda superans, dorso valde convexo, margine posteriore rotundato, non spinoso. Uropoda ramo interiore multo longiore quam ramo exteriori, margine postero-interiore pervalde excurvato. — Long. maris 19,5<sup>mm.</sup>; long. fem. ovig. 20<sup>mm.</sup>.*

**Descr.** Corpus circiter triplo et dimidio longius quam latius, semi-cylindraceum, ubique alte convexum.

Caput supra in medio sat convexum, ad latera versus prope oculos et ante impresso-excavatum.

Frons prona visa profunde emarginata, margine anteriore incrassato-elevato; a fronte visa processu minuto, fere occulto instructa.

Oculi minores, nigri, fere æque lati ac longi; ocelli sat numerosi, aliquantum convexi.

Lamina frontalis circiter triplo longior quam latior; pars anterior valde angustata, per longitudinem sulcata; pars posterior ad basin versus sensim valde dilatata, parte basali in cornu perlongum, deorsum et nonnihil ante directum, producta; cornu ad apicem versus angustatum, postice et in lateribus convexum, ante subplanum, marginibus lateralibus acutis, apice acuto, nonnihil ante flexo.

Clypeus labro multo brevior, ante emarginatus, peralte convexus.

Antennulæ breves, pedunculo antennarum aliquanto breviores; pedunculus flagello paulo brevior, 3-articulatus, articulis inter se subæque longis; flagellum per totam fere longitudinem crassitudine æquali, circiter 13-articulatum.

Antennæ circiter medium truncum attingentes; pedunculus brevior, articulo quarto nonnihil brevior quam articulo tertio, duplo brevior et duplo latiore quam articulo quinto; flagellum 31—34-articulatum.

Labrum foveis duabus lateralibus, transversis, profundis, sat longis ornatum.

Mandibulæ acie angustiore; acies mandibulæ sinistrae trifida (fig. 4 c).

Maxillipedes articulo quinto aliquanto majore quam articulo sexto.

Segmenta trunci longitudine paulum inæqualia; segmentum primum capite paulo longius et segmento quinto nonnihil longius; segmentum quodque per longitudinem convexum.

Epimera mediocria, postice per paria latitudine sat crescentia, furcis solitis ornata, angulo posteriore rotundato.

Pedes trium parium posteriorum *C. eximia* structura valde similes, nonnihil tamen graciliores; articulus tertius processu exteriori perlongo, ad medium valde angustato, ad apicem versus iterum nonnihil dilatato; articulus quartus processu exteriori ultra medium articulum sextum attingente, in margine exteriori spinis multis longis armato.

Pedes quattuor parium posteriorum sat graciles, structura peculiari. — Pedes quinti paris pedibus septimi paris paulo breviores, fere ut in *C. eximia* constructi, articulis tribus mediis imprimis tamen aliquanto gracilioribus, setis sat multis ex parte minore plumosis ornati. — Pedes septimi paris fere ut in *C. neglecta* formati, articulis tribus mediis tamen nonnihil gracilioribus et ex parte longioribus; articulus secundus circiter  $\frac{3}{4}$  longior quam latior, aliquantum complanatus, margine exteriori setis plumosis ex parte longis, spissis instructo, superficie setis minus longis in series duas dispositis ornata, parte dimidia distali marginis anterioris et margine apicali setis longis plumosis instructis; articulus tertius margine interiori setis plumosis longis dense sitis ornato, margine exteriori setis plumosis nonnullis longis; articulus quartus margine utroque setis longis instructo. — Pedes sexti paris pedibus septimi paris nonnihil longiores, pedibus quinti paris structura subsimiles.

Segmenta 5 anteriora caudæ alte convexa, omnia detecta.

Pleopoda breviora, structura solita.

Segmentum ultimum caudæ alte convexum, prope basin in transversum profundius et prope margines laterales levius impressum, paulo latius quam longius, postice late rotundatum, margine posteriore non spinoso, ciliis plumosis mediocribus instructo.

Uropoda cauda breviora; ramus interior a basi ad apicem versus sensim dilatatus, margine postero-interiore pervalde excurvato, ciliis plumosis longis et spinis 2 ornato, angulo apicali angulum obtusum (plus quam  $100^\circ$ ) formante; ramus exterior ramo interiori multo brevior, ubique latitudine fere æquali, apice subrotundato. Scapus angulo interiori brevior, paulo plus quam tertiam partem basalem rami interioris occupante.

Color in speciminibus diu in spiritu vini asservatis brunnescens vel flavo-rubescens, pedibus dilutioribus, ubique (et in corpore et in antennis pedibusque) punctis nigris numerosis, in dorso corporis sæpius densissimis, ornatus.

Appendix masculina apicem posteriorem rami interioris non attingens, ubique latitudine fere æquali, ad apicem versus sat complanata, parte distali paulum excurvata, apice ipso rotundato.

Forekomst. Bengalske Bugt,  $20\frac{1}{12} 45$ , 4 smaa Ex. (Galathea-Exped., Reinhardt);  $2^{\circ} 0' N. B.$ ,  $106^{\circ} 30' O. L.$ , 4 Ex. (Andréa, 1869);  $1^{\circ} 0' N. B.$ ,  $106^{\circ} 40' O. L.$ , 1 Ex. (Andréa, 1869);  $0^{\circ} 14' N. B.$ ,  $107^{\circ} 6' O. L.$ , 1 Ex. (Andréa, 1869);  $0^{\circ} 40' S. B.$ ,  $107^{\circ} 10' O. L.$ , 3 Ex. (Andréa, 1869);  $4^{\circ} 40' N. B.$ ,  $107^{\circ} 30' O. L.$ , 1 Ex. (Andréa, 1869);  $5^{\circ} 20' N. B.$ ,  $107^{\circ} 30' O. L.$ , 1 Ex. (Andréa, 1869);  $9^{\circ} N. B.$ ,  $109^{\circ} O. L.$ , 7 Ex.,  $21\frac{1}{5} 68$  (Andréa, 1869);  $9^{\circ} 40' N. B.$ ,  $109^{\circ} 20' O. L.$ , 5 Ex. (Andréa, 1869);  $6^{\circ} 20' S. B.$ ,  $112^{\circ} O. L.$ , 2 Ex. (Andréa, 1870);  $24^{\circ} N. B.$ ,  $119^{\circ} 20' O. L.$ , 1 Ex. (Andréa, 1869); Yeddo-Bugt, 2 Ex.,  $19\frac{1}{8} 46$  (Galathea-Exped., Reinhardt).

H. Milne-Edwards opgiver «l'embouchure du Gange» som Lokalitet for *C. elongata*, og skjøndt hans Beskrivelse er alt andet end udtømmende, har jeg ment, at den og Lokaliteten passede saa godt paa denne særdeles ejendommelige Art, at der er stor Sandsynlighed for Rigtigheden af min Henførelse.

Denne Art, der i Bygningen af Ben og Svømmehale frembyder flere interessante Forhold, er, som ovenstaaende Liste udviser, kun (muligvis med Undtagelse af Lokaliteten Yeddo-Bugten) tagen pelagisk og det et betydeligt Antal Gange.

## 12. *Cirolana minuta* n. sp.

(Tab. III, Fig. 5—5 d; Tab. IV, Fig. 1—1 f.)

### Mas adultus et femina non ovigera.

Diagn. *Corpus oblongo-ovatum. Frons in processum, a fronte visum longiorem, sat angustum, nonnihil circumflexum, cum lamina frontali conjunctum, producta. Lamina frontalis fere oblongo-hexagona, parte basali cornu instructa. Antennulæ pedunculo antennarum nonnihil longiores; pedunculus biarticulatus. Antennæ circiter medium truncum attingentes. Epimera mediocria, furcis solitis instructa. Pedes graciliores, simplices. Segmentum ultimum caudæ uropoda perpaulum superans, lingulatum, paulum et æqualiter convexum, margine posteriore late rotundato, spinis c. 8 ornato. Uropoda brevia, lata; ramus interior ramo exteriori multo longior, margine postero-interiore valde excurvato, apice bifido angulum subrecto formante. — Long. maris  $4,3^{mm}$ , long. feminae  $4,8^{mm}$ .*

Descr. *Corpus oblongo-ovatum, circiter duplo et tertia parte longius quam latius, nonnihil convexum.*

*Frons fere ut in C. parva formata.*

Oculi mediocres, majores quam in speciebus ceteris, brunnescentes, fere latiores quam longiores, ocellis sat numerosis, nonnihil convexis.

Lamina frontalis circiter duplo et dimidio longior quam latior, oblongo-pentagona vel fere hexagona, apice anteriore truncato, parte basali cornu mediocri, acuminato instructa.

Clypeus parvus, labro multo brevior.

Antennulæ nonnihil elongatæ, pedunculum antennarum nonnihil superantes; pedunculus flagello paulo longior, biarticulatus; flagellum gracilius, 7-articulatum.

Antennæ marginem posteriorem segmenti quarti trunci non attingentes; pedunculus gracilior, articulo quarto fere duplo longiore quam articulo tertio, paulo brevior quam articulo quinto; flagellum 17- vel 18-articulatum.

Mandibulæ acie ex parte a labro tecta, prino visu sat angusta.

Maxillipedes breves, articulo quinto maximo, latiore quam longiore, aliquanto majore quam articulis ambobus ultimis (fig. 1 c).

Segmenta trunci fere ut in *C. parva*.

Epimera mediocria, magnitudine paulum inter se discrepantia, furcis binis solitis instructa; epimera posteriora postice paulum producta, apice acuto.

Pedes graciliores, articulo secundo nonnihil elongato; pedes primi paris pedibus secundi paris manifesto crassiores; pedes secundi et tertii parium articulo quarto in latere exteriori haud ad medium articulum quintum producto; pedes quinti et septimi parium æquilongi, pedibus secundi paris nonnihil longiores et pedibus sexti paris paulo breviores.

Segmenta anteriora, caudæ et pleopoda fere ut in *C. parva*.

Segmentum ultimum caudæ nonnihil latius quam longius; cetera in diagnosi commemorata.

Uropoda brevia, lata. Ramus interior plus quam dimidio longior quam latior; margo postero-interior valde excurvatus, ciliis mediocribus plumosis et spinis nonnullis instructus; apex angulum subrectum formans, bifidus, setis nonnullis longis, simplicibus instructus; margo exterior aliquantum excurvatus. Ramus exterior brevis, apice bifido, setis longis, simplicibus instructo. Scapus angulo postero-interiore paulum ultra medium ramum interiorem attingente.

Color in speciminibus diu in spiritu vini asservatis pallide brunnescens.

Appendix masculina ramum interiorem longe superans, recta, angusta, sat compressa, apice acuminato, acuto.

Forekomst. 3 Exemplarer fandtes uden Lokaltet i Glas med 1 Ex. af *C. parva*, hvoraf det med en stor Sandsynlighed kan sluttes, at de hidrøre fra Vestindien og rimeligvis fra St. Thomas.

### Sectio quarta.

Lamina frontalis valde elongata, parte media angustata, ante frontem paulum porrecta.

Clypeus a basi in cornu trigonum, liberum productus.

Pedunculus antennarum articulo quinto elongato non brevior quam articulis 4 ceteris cunctis.

Pedes parium quattuor posteriorum elongati; graciles.

Cauda elongata, trunco paulo brevior.

Pleopoda parium anteriorum setis ex parte longissimis ornata.

(Hi characteres omnes præter characterem primum etiam in genere *Eurydice* inventi sunt.)

#### 13. *Cirolana japonica* n. sp.

(Tab. IV, Fig. 2—21.)

#### Mas adultus.

**Diagn.** *Corpus circiter duplo et dimidio longius quam latius, ad basin caudæ constrictum. Lamina frontalis a media ad apicem versus aliquantum dilatata, apice paulum ante apicem frontis recte truncato. Antennulæ flagello c. 6-articulato. Antennæ medium corpus attingentes. Epimera omnia subæque lata, angulo posteriore producto, acuto. Segmentum ultimum caudæ lingulatum, perpaulo latius quam longius, uropoda nonnihil superans, postice minus late rotundatum, margine posteriore serrato, non spinoso, breviter setoso, dorso per totam longitudinem sat convexo. Uropoda brevia, latissima; ramus uterque apice acuto, margine exteriori ex parte serrato; ramus interior dimidio longior quam latior, ramum exteriorem multo superans. — Long. maris 3,6<sup>mm</sup>.*

**Descr.** Corpus in specimine singulo circiter duplo et dimidio longius quam latius, oblongo-ovatum, ad basin caudæ tamen constrictum, minus convexum; truncus cauda perpaulo longior.

Frons ante in processum parvum, triangulum producta.

Oculi minores, nigri, a latere visi latiores quam longiores, ocellis paucioribus aliquantum convexis.

Lamina frontalis perlonga, parte media valde constricta; ad basin versus dilatata et ex parte a clypeo oblecta, ad apicem versus altitudine crescens et aliquantum dilatata, apice ipso ante processum frontalem paulum prominente, recte truncato.

Clypeus brevissimus, a basi in cornu breve, late trigonum, deorsum et porro directum, productus.

Antennulæ medium articulum quintum pedunculi antennarum non attingentes; pedunculus triarticulatus, articulo secundo longiore quam articulis ceteris; flagellum pedunculo paulo brevius, c. 6-articulatus, articulis ex parte multo longioribus quam in speciebus ceteris.

Antennæ circiter marginem posteriorem segmenti sexti trunci attingentes; pedunculus articulo quinto fere longiore quam articulis 4 ceteris cunctis; flagellum c. 11-articulatum, articulis ex parte majore elongatis, sat crassis.

Mandibula sinistra acie manifesto trifida.

Maxillipedes mediocres, articulo quinto sat magno, multo majore quam articulo sexto.

Segmenta trunci longitudine paulum inæqualia; segmentum primum capite multo brevius et segmento quinto perpaulo longius; segmenta 4 posteriora longitudine subæqualia, quodque stria transversa nonnihil ante medium instructum.

Epimera omnia mediocria, subæque lata, furcis binis solitis instructa, postice producta, angulo posteriore acuto.

Pedes parium trium anteriorum graciles; articulus quartus in latere exteriori apicem articuli quinti attingens; articulus sextus elongatus, crassior.

Pedes parium quattuor posteriorum nonnihil elongati, graciles vel fere gracillimi, setis perpauca instructi; pedes septimi paris pedibus quinti paris paulo longiores et nonnihil graciliores, pedibus sexti paris nonnihil breviores.

Segmenta 5 anteriora caudæ sat longa; segmentum primum detectum, segmentis tribus sequentibus aliquanto angustius; segmentum secundum parte laterali in processum oblongum, acutum, prominentem producta; segmenta tertium et quartum ad marginem anteriorem versus nonnihil depressa, marginibus lateralibus subtruncatis.

Pleopoda angustiora; rami parium anteriorum setis plumosis ex parte majore longissimis præditi.

Segmentum ultimum in diagnosi commemoratum.

Uropoda brevia, latissima. Ramus interior circiter dimidio longior quam latior, non spinosus, apice acuto, margine postero-interiore aliquantum excurvato et leviter serrato, margine exteriori nonnihil excurvato, ex parte serrato, ciliis natatoriis paucioribus, ex parte brevibus instructus. Ramus exterior ramo interiori multo brevior, apice acuto, margine exteriori ex parte serrato. Scapus processu interiori circiter medium ramum anteriorem attingente.

Color brunneus, maculis multis parvis, nigris ornatus.

Appendix masculina perlonga, ramum anteriorem multo superans, recta, a basi ad apicem acutum versus sensim angustata.

Forekomst. Yeddo-Bugten, 1 Ex. (Galathea-Exped. <sup>19</sup>/<sub>8</sub> 46, Reinhardt). Der er betydelig Sandsynlighed for, at Arten er tagen pelagisk, da den er tagen samme Dag og maaske sammen med 2 Ex. af *Cir. elongata* (se ovenfor Side 347), og der findes i Museet ogsaa saadanne pelagiske Dyr som *Squilla*-Larver tagne i Antal paa samme Dag.

#### Sectio quinta.

Pars anterior laminæ frontalis libera, producta, ante frontem porrecta.

Clypeus perbrevis, in cornu latum, brevius productus.

Antennulæ pedunculo triarculato.

Pedes omnes setis perpaucis instructi.

Segmentum quintum caudæ angulis lateralibus non a segmento quarto tectis.

Species duas a speciebus supra descriptis valde diversas et inter se aliquantum diversas in hac sectione colloco.

#### 14. *Cirolana sphaeromiformis* n. sp.

(Tab. IV, Fig. 3—3 g.)

##### Femina non ovigera, ?adult.

Diagn. *Corpus breve, duplo longius quam latius. Caput et in lateribus et ante angulatum. Lamina frontalis ante bullam magnam, apicem capitis paulo superantem, formans. Epimera majora, per paria postice plus producta et altius carinata, angulo posteriore subacuto. Segmenta 5 anteriora caudæ perbrevia. Segmentum ultimum caudæ uropoda vix superans, subtrigonum, apice subtruncato, dorso alte tricarinato et inter carinas excavato. Uropoda brevia, lata; ramus uterque margine exteriori valde excurvato ibique fere angulato, parte distali irregulariter inciso-serrata, margine postero-interiore valde excurvato; ramus interior ramo exteriori multo longior. — Long. 4,25<sup>mm</sup>.*

Descr. Corpus subovatum, duplo longius quam latius, sat convexum.

Caput in lateribus angulum prominulum formans, ante in processum frontalem angustiolem sat longum productum, margine inter angulum lateralem et basin processus frontalis subrecto, in superficie capitis carinam manifestam formante.

Oculi minuti, solum in latere superiore capitis in processu angulato inventi, ex ocellis paucis, sat convexis formati.

Lamina frontalis parte basali valde angustata, ex parte sub cornu clypei oblecta, ad apicem versus valde dilatata, alte prominens, parte apicali inflata, ante late rotundata, ultra processum frontalem nonnihil prominente et cum hoc processu conjuncta.

Clypeus perbrevis, a basi in cornu brevius, acutum productus.

Antennulæ pedunculo antennarum aliquanto breviores; pedunculus flagello duplo longior, 3-articulatus, articulo basali brevi; flagellum c. 4-articulatum, articulo basali elongato, articulis 3 ultimis perminutis.

Antennæ paulo ultra marginem posteriorem segmenti secundi trunci prominentes; pedunculus crassior, articulo quarto multo longiore quam articulo tertio et nonnihil brevior quam articulo quinto; flagellum c. 12-articulatum.

Mandibulæ acie latiore.

Maxillipedes fere ut in *C. japonica*.

Segmenta trunci longitudine minus inæqualia; segmentum primum capite nonnihil brevius et segmento quinto nonnihil longius; segmenta sextum et septimum longitudine subæqualia, stria transversa prope marginem anteriorem ornata.

Epimera majora, postice producta, in obliquum carinata (carina furca imprimis in epimeris posterioribus latissima et profundissima, excavationem formante, definita), postice per paria latiora, plus producta, altius carinata, angulo posteriore subacuto; epimera septimi paris segmenta quattuor anteriora caudæ longitudine expleantia.

Pedes trium parium anteriorum sat robusti, articulo secundo elongato, quarto brevissimo angulo exteriori ultra apicem articuli quinti prominente; pedes secundi et tertii parium articulo sexto multo latiore quam in speciebus ceteris, longo, duplo longiore quam latiore.

Pedes parium quattuor posteriorum breves, sat robusti; pedes sexti et septimi parium inter se subæque longi, pedibus quinti paris paulo longiores.

Segmenta quinque anteriora caudæ detecta, brevissima, alte convexa, segmentum quintum angulis lateralibus non a segmento quarto tectis.

Pleopoda parium anteriorum setis longis instructa.

Segmentum ultimum caudæ aliquanto latius quam longius, subtrigonum, apice brevius, subrecte truncato, non spinoso, alte convexum, dorso alte tricarinato et inter carinas profunde et æqualiter excavato; carinæ duæ laterales postice paulum divergentes, paulum arcuatæ.

Uropoda brevia, lata, caudam non superantia. Ramus interior plus duplo longior quam latior; margo exterior valde excurvatus, paulum ante medium subangulatus, parte distali irregulariter serrata, non spinosa; margo postero-interior iterum valde excurvatus, fere angulatus, setis nonnullis brevissimis instructus; apex angulum valde obtusum formans, setis nonnullis longioribus instructus. Ramus exterior ramo interiore multo brevior, huic forma similis. Scapus angulo interiore minus productus, non ad medium ramum interiorem prominente.

Color flavo-brunnescens, nonnihil grisescens.



Forekomst. St. Thomas, Vestindien, 1 Ex. (Krebs).

Denne interessante Art, der ifølge Bygningen af Mund og Uropoder er en god *Cirolana*, afviger i Habitus stærkt fra alle andre kjendte Arter og ligner meget visse Sphæromer.

15. *Cirolana orientalis* Dana.

(Tab. IV, Fig. 4—4 h.)

*Cirolana orientalis* Dana, Un. St. Expl. Exped., Crust., p. 773, Pl. 51, Fig. 7 a—d (1852).

**Femina subadulta** (lam. ovig. in evolut.).

**Diagn.** *Corpus elongato-ovatum. Caput ante in processum magnum, porrectum, ad apicem versus dilatatum, cum lamina frontali concretum, ante truncatum, productum. Antennulæ pedunculo antennarum fere duplo longiores; pedunculus brevior, 3-articulatus. Segmentum ultimum caudæ ad basin versus foveis duabus majoribus ornatum, subtriangulum, apice angustius rotundato, bispinoso. Uropoda structura singulari; ramus interior caudam paulum superans, in margine exteriori emarginatus, ramo exteriori aliquanto brevior; ramus exterior magnus, elongatus, margine exteriori nudo. — Long. 10,8<sup>mm</sup>.*

**Descr.** Corpus plus quam duplo et dimidio longius quam latius, elongato-ovatum, aliquantum convexum.

Frons in processum longum, porrectum, ad apicem versus nonnihil dilatatum, prope apicem truncatum, in transversum impressum, cum lamina frontali coalitum, producta.

Oculi minores, nigri, latiores quam longiores, margine anteriore profunde incurvo.

Lamina frontalis non discreta, partem inferiorem processus frontalis formans, nonnihil longior quam ad apicem latior.

Clypeus brevissimus, in cornu brevius, subrotundatum, productus.

Antennulæ elongatæ, pedunculo antennarum fere duplo longiores; pedunculus 3-articulatus, articulis inter se subæque longis; flagellum pedunculo duplo longius, 15-articulatum, gracile, nudum.

Antennæ circiter marginem posteriorem segmenti tertii trunci attingentes; pedunculus articulo quarto nonnihil longiore quam articulo tertio et aliquanto brevior quam articulo quinto; flagellum 21-articulatum.

Segmenta trunci longitudine nonnihil inæqualia; segmentum primum capite aliquanto brevius et segmento quinto fere brevius; segmentum septimum segmento sexto nonnihil brevius.

Epimera mediocria, postice per paria latitudine sat crescentia, furcis binis solitis instructa; segmenta primi et secundi parium angulo posteriore non producto; epimera parium trium posteriorum postice aliquantum producta, apice acuto.

Pedes parium trium anteriorum fere ut in *C. Cranchii* formati.

Pedes parium quattuor posteriorum robustiores; pedes sexti et septimi parium æquilongi, pedibus quinti paris nonnihil longiores. Spinæ ex parte majore ad apicem versus complanatæ, sæpius in latere seta perparva instructa, apice acuto vel rotundato (fig. 4 f).

Segmenta quinque anteriora caudæ longitudine solita; segmentum quintum angulis lateralibus liberis, non a segmento quarto tectis.

Pleopoda primi paris pleopodis secundi paris aliquanto angustiora, angusta, ramis breviter setosis, ramo exteriori a basi ad apicem angustius rotundatum versus angustato.

Segmentum ultimum caudæ circiter quarta parte latius quam longius, subtrian-gulum, in dorso sat convexo, foveis duabus majoribus, rotundis, ad basin versus situs ornatum, margine posteriore breviter setoso, apice angustius rotundato, spinis 2 ornato.

Uropoda latiora, structura singulari. Ramus interior vix duplo longior quam latior, caudam perpaulum superans; margo exterior paulum excurvatus, prope apicem manifesto emarginatus ibique nudus; margo postero-interior ad basin excurvatus, ciliis medio-cribus et spinis compluribus instructus; apex subrotundatus, angulum parvum formans. Ramus exterior ramo interiore aliquantum superans, plus quam triplo longior quam latior; margo exterior nudus; apex truncatus et margo interior ad apicem versus ciliis multis et spinis c. 4 instructis. Scapus angulo interiore brevior, medium ramum interiorem non attingente.

Color in specimine diu in spiritu vini asservato albescens.

Forekomst. Nangkøvry, en af Nicobar-Øerne, 1 Ex. (Galathea-Exped., Reinhardt).

Dette Exemplar har kun Æggeplader paa 3die, 4de og 5te Kropring, men jeg antager, at de forreste endnu ikke ere udviklede.

Arten stemmer i Formen af sidste Halering og Benene ikke ganske med Dana's Fremstilling, men da den forøvrigt er saa ejendommelig, den nævnte Forfatters Fremstillinger som Regel ikke synderlig nøjagtige i mange Enkeltheder, og Lokaliteten tilmed ikke lægger Vanskeligheder i Vejen, har jeg antaget min Art for at være identisk med den af Dana fremstillede. Hans Exemplar var fra Soooloo-Havet.

1. Arter, som med betydelig Sikkerhed eller med Vished kunne henføres til denne Slægt.
1. *Cirolana microphthalmalma* Hoek, op. cit. p. 28, Taf. II, Fig. 13—17. Denne Art hører til min Sectio I<sup>ma</sup>, er meget karakteristisk og er opstillet paa et 23<sup>mm.</sup> langt Exemplar, taget paa 73° 13' 5" N. B., 30° 42' Ø. L., 166 Fv. G. O. Sars har taget den paa Storeggen paa 50 Fv., fint Sand og Grus, og kaldte den først (op. cit. n° 2, p. 83 og 91) *C. Cranchii*, senere bemærker han (op. cit. n° 3, p. 61), at den ikke er identisk med *C. Cranchii* Leach, men med *C. concharum* (Stimps.), og anfører at have taget nok et Exemplar ved Hvitingsø og et i Havet Øst for Vardø. I op. cit. n° 4, p. 29 fremsætter han en lignende Bemærkning og oplyser, at det sidstnævnte Exemplar er taget paa 148 Fv. Max Weber følger (op. cit. p. 7) Sars's Nomenklatur, men hans Meddelelse indeholder intet nyt. — Som jeg allerede ved Fremstillingen af *C. concharum* (Stimps.) har udtalt, er Sars's Identificering af *C. microphthalmalma* og *C. concharum* urigtig (jeg har undersøgt og sammenlignet de af Sars undersøgte Exemplarer af begge Arter), og Arten bør derfor bære det Navn, der er bleven tildelt den af Hoek.
2. *Cirolana polita* (Stimps.). Denne Art hører ligeledes til Sectio I<sup>ma</sup>. Den beskrives først under Navnet *Æga polita* af Stimpson (op. cit. p. 41), nævnes under samme Navn af Lütken (op. cit. n° 1, p. 77) og Verrill (op. cit. n° 1, p. 16); dernæst henføres den af Harger til Slægten *Conilera* (op. cit. n° 2, p. 3 og 22), og nævnes af Verrill (op. cit. n° 2, p. 411); endelig henføres den af Harger til Slægten *Cirolana* (op. cit. n° 3, p. 161), beskrives af ham (op. cit. n° 4, p. 381), og tilsidst giver den samme Forfatter i op. cit. n° 5, Pl. I, Fig. 1—1 c, Pl. II, Fig. 2—2 b en Række gode Figurer, efter hvilke den med Lethed maa kunne gjenkjendes. — Den er tagen ved Nord-Amerikas Østkyst i Bay of Fundy, Cape Cod Bay, Salem, og flere Steder mellem 40° 36' N. B. og 42° 11' N. B. paa 7—190 Fv. (Se herom nærmere Harger, op. cit. n° 4.)
3. *Cirolana impressa* Harger, op. cit. n° 5, p. 93, Pl. I, Fig. 3—3 d, Pl. II, Fig. 3—3 c. Denne ligeledes til Sectio I<sup>ma</sup> hørende, vel beskrevne og afbildede Art er tagen paa 4 Stationer ved omtr. 40° N. B., 69<sup>2</sup>/<sub>3</sub>—70<sup>1</sup>/<sub>3</sub> V. L. paa 100—321 Fv. (Se nærmere Harger l. c.)
4. *Cirolana armata* Dana, op. cit. n° 2, p. 771, Pl. 51, Fig. 5 a—e. Et 4 Lin. langt Exemplar er taget ved Rio de Janeiro. Ifølge Dana's ufuldstændige Fremstilling kan jeg ikke danne mig nogen bestemte Mening om den; den maa afvige betydelig fra alle her fremstillede Arter.
5. *Cirolana Rossi* (White 1847, M. S.) Miers, op. cit. n° 1, p. 228. Denne Art, der hører til min Sectio I<sup>ma</sup> og skal kunne blive omtr. 1 Tomme lang, angives fra

New Zealand og Auckland Islands. Den omtales og afbildes senere af Miers, op. cit. n° 2, p. 109, Pl. 3, Fig. 3 og nævnes af ham i op. cit. n° 7, p. 303. Senere nævnes den af Thomson og Chilton, op. cit. p. 154 og i Pfeffers Liste op. cit. n° 2, p. 97.

6. *Cirolana arabica* Kossmann, op. cit. p. 114, Taf. VIII, Fig. 7—12. Et 8<sup>mm</sup>. langt Exemplar af denne til Sectio II<sup>da</sup> hørende Art blev taget i det røde Hav. Den omtales af Miers, op. cit. n° 7, p. 303.
7. *Cirolana latistylis* Dana, op. cit. n° 2, p. 772, Pl. 51, Fig. 6 a—e. Et Exemplar, 3 Lin. langt, blev taget i Balabac Strædet Nord for Borneo. Om dens Affinitet tør jeg ikke have nogen Mening. Den nævnes af Miers, op. cit. n° 7, p. 303 og 304.
8. *Cirolana tenuistylis* Miers, op. cit. n° 7, p. 303, Pl. XXXIII, Fig. B og b. Et Exemplar fra Wales Channell, 2 Ex. uden Lokaltet; det største Exemplar er 15<sup>mm</sup>. langt. Arten hører sikkert til min Sectio I<sup>ma</sup>.
9. *Cirolana Schiodtei* Miers, op. cit. n° 7, p. 302, Pl. XXXIII, Fig. A og a. 2 Ex. fra «Arafura-Sea», flere fra Torres-Strædet. Det største Ex. er 31<sup>mm</sup>. Arten er meget interessant, men Fremstillingen desværre defekt. Ifølge Afbildningen har den Svømmeben. Ifølge Texten har Pandepladen en noget lignende Form som i min Sectio II<sup>da</sup>, men afviger dog ved, at Sidehjørnerne bære en stærk Tand.
10. *Cirolana laevis* Studer, op. cit. n° 2, p. 21, Taf. II, Fig. 8, a—b. Arten blev tagen østlig for Queensland paa 90 Fv., er 10<sup>mm</sup>. lang og staar ifølge Forf. nærmest ved *C. Rossii* Miers, hovedsagelig afvigende ved Formen af Antennerne.
11. *Cirolana lata* Haswell, op. cit. n° 1, p. 192, Pl. IV, Fig. 1 og op. cit. n° 2, p. 286. Jeg kan ikke danne mig nogen klarere Forestilling om denne ved New South Wales («off Broughton Islands, near Port Stephens») paa c. 25 Fv. tagne, <sup>5</sup>/<sub>8</sub> Tomme lange Art, da jeg ikke kjender Haswells 1ste Publikation med Afbildningen, og da Diagnosen i op. cit. n° 2 ikke nævner Pandeplade og Clypeus, ligesom Skildringen af Antenner og Kroplemmer er meget ufuldstændig. — Miers har op. cit. n° 7, p. 304 beskrevet kort en Form, som han kalder *Cir. lata* Hasw., var. *integra*, efter nogle smaa Exemplarer, tagne paa 3—4 Fv. ved Albany Island; efter Beskrivelsen af Panden og Pandepladen synes den at være beslægtet med min *C. parva*; om den er identisk med eller artsforskjellig fra *C. lata* Haswell kan jeg selvfølgelig ikke afgjøre.
12. *Cirolana Cookii* Filhol, op. cit. n° 2, p. 455. Da jeg ikke har kunnet opdrive Filhols citerede Arbejde, har jeg anført Citatet efter Aarsberetningen (for 1886) i Wiegmanns Archiv og har selvfølgelig ingen Mening om Arten.

## 2. Tvivlsom Art.

*Æga Harsfordi* Lockington, op. cit., er ifølge Miers, op. cit. n° 5, p. 78 sandsynligvis en *Cirolana*; Arten er fra «Sta Rosa Isl.» (Bertkaus Berichte). Lockingtons Arbejde har jeg ikke set, saa jeg kan kun referere Miers' Udtalelse om Dyrets systematiske Stilling.

## 3. Ubeskreven Art.

*Cirolana magellanica* Pfeffer M. S., op. cit. n° 1, p. 58 opgives uden Beskrivelse fra Magelhaens-Strædet. Den anføres atter af Pfeffer op. cit. n° 2, p. 97 i hans Navneliste over antarktiske Dyr.

## 4. Arter, som sikkert ikke høre til denne Slægt.

*Cirolana truncata* Norman, op. cit. n° 1, p. 421, Pl. XXIII, Fig. 12—15 (ogsaa omtalt to Gange senere af samme Forfatter) er en *Eurydice*; se nærmere under denne Slægt.

*Cirolana longicornis* Studer, op. cit. n° 1, p. 28, Taf. II, Fig. 15—15 c, er en *Eurydice* og omtales under denne Slægt.

*Æga multidigita* Dana, op. cit. n° 2, Vol. II, p. 768, Pl. 51, Fig. 3 a—f, opstillet efter et 3 Lin. langt Exemplar fra Balabac-Strædet Nord for Borneo, er senere af Miers, op. cit. n° 3, p. 511 paany beskrevet og henført til *Cirolana*. Dana's Art er sandsynligvis et Dyr, der staar nær ved min *Alcirona insularis* n. sp.; Miers har haft flere Exemplarer af en Art, som naaede næsten 1 Tommes Længde og som lever i *Meyerina claviformis* Gray fra Zebu, Philippinerne, men jeg anser det for meget tvivlsomt, at Dana's og Miers' Dyr skulle tilhøre samme Art. Miers' Art er meget tvivlsom (se senere), men den er i hvert Tilfælde ikke en *Cirolana*.

*Cirolana rosacea* Risso (op. cit. p. 122), der tidligere af Artens Opstiller er beskrevet under Navnet *Cymothoa rosacea*, er af Schiødte & Meinert (op. cit. n° 3, pars I, p. 354) sikkerlig fuldstændig rigtig henført til Slægten *Æga*.

## 5. Arter, som ere ufuldstændig fremstillede, men som næppe tilhøre denne Slægt.

*Cirolana sculpta* H. Milne-Edwards, op. cit. n° 1, p. 237, er, som jeg senere har søgt at vise, sandsynligvis en *Corallana*. Opstillerens Exemplar var fra Malabar-Kysten, men Krauss og Herklots have senere henført en ved Tafelbai (Cap) tagen Form til samme Art (se senere under *Corallana*).

*Cirolana rugicauda* Heller, op. cit. n° 1, p. 497 og op. cit. n° 3, p. 142, Taf. XII, Fig. 13. Arten er tagen ved St. Paul og er 12<sup>mm</sup> lang. Ifølge Fremstillingen har sidste Haleled en dorsal Midtknude og er beklædt med en fin Filt; «Die drei Vorderfüsse haben ein stark gekrümmtes, schwarzliches Klauenglied». Efter dette kan Arten næppe være en *Cirolana*, men er muligvis en *Corallana*, snarere maaske en *Alcionide* (se under denne Familie).

(*Nelocira Desmarestii* Perty, op. cit. p. 211, Pl. 40, Fig. 12. Denne Form, 3½ Lin. lang, er tagen «prope Sebastianopolin». Antennuler og Antenner ere omtrent lige lange og knap halvt saa lange som Legemet. Forf. har dernæst ikke fundet Uropoder. Dyret er næppe nogen *Cirolanide*; om den hører til nogen her behandlet Familie er endda tvivlsomt.)

## 2. *Conilera* Leach (1818).

Oculi minores, in latere utroque capitis evoluti.

Pedunculus antennarum 5-articulatus.

Maxillipedes lacinia articuli secundi uncis instructa.

Pleopoda primi paris structura singulari (Tab. V, fig. 1 b); scapus elongatus, nonnihil longior quam latior, durus, latere interiore uncis c. 9 ornato; ramus interior sat elongatus, angustus, durus, margine interiore recto, incrassato, fere nudo, margine exteriori setis mediocribus ornato; ramus exterior ramo interiore brevior, ovatus, durus, furca longitudinali instructus, margine posteriore setis mediocribus ornato; pleopoda ita formata operculum magnum, pleopoda cetera tegens, formant. Scapus pleopodorum secundi paris vix latior quam longior; rami structura solita.

Scapus uropodorum angulo postero-interiore sat producto.

Differentia sexualis fere nulla.

Man kjender med Sikkerhed kun 1 Art af denne Slægt, der væsentlig kun afviger fra *Cirolana* ved Bygningen af første Par Pleopoder.

### 1. *Conilera cylindracea* (Mont.).

(Tab. IV, Fig. 5—5 c; Tab. V, Fig. 1—1 d.)

*Oniscus cylindraceus* Montagu, Descr. several Mar. Animals, l. c. p. 71, Tab. VI, Fig. 8 [1803].

*Conilera Montagu* Leach, Diction. d. Scienc. Natur., T. XII, p. 348.

— — Desmarest, Consid. Crust., p. 304.

— — H. Milne-Edwards, Hist. Nat. d. Crust., Tome III, p. 242.

— *cylindracea* Sp. Bate & Westwood, Brit. Sess.-eyed Crust., Vol. II, p. 304.

**Mas adultus et femina ovigera.**

**Diagn.** *Corpus cylindraceum, vix quintuplo longius quam latius. Lamina frontalis fere triplo longior quam latior, parte anteriore sat dilatata, subrotunda. Antennulæ pedunculo antennarum breviores; pedunculus 3-articulatus. Antennæ marginem posteriorem segmenti primi trunci vix attingentes. Epimera omnia angusta, subæque lata. Pedes parium 4 posteriorum per paria postice longiores et graciliores. Segmentum ultimum caudæ longius quam latius, triangulum, margine posteriore serrato, apice brevi, truncato. Uropoda caudam paulum superantia; ramus interior margine exteriori late emarginato, irregulariter dentato et serrato; ramus exterior ramo interiore multo brevior, margine exteriori bidentato, margine interiore serrato. — Long. maris adulti 20,5<sup>mm.</sup>; long. feminae ovigeræ 19,3<sup>mm.</sup>*

**Descr.** Corpus valde elongatum et angustatum, cylindraceum, vix quintuplo longius quam latius, peralte convexum.

Frons prona in processum brevior, trigonum, minorem producta.

Oculi parvi, nigri, latiores quam longiores, subæquati, ocellis paucioribus.

Lamina frontalis fere triplo longior quam latior, fere ut in *Cir. boreali* constructa, parte dimidia anteriore aliquantum magis dilatata.

Clypeus fere ut in *Cir. boreali*.

Antennulæ pedunculo antennarum nonnihil breviores; pedunculus 3-articulatus, crassior, flagello nonnihil longior; flagellum crassum, c. 12-articulatum.

Antennæ breves, marginem posteriorem segmenti primi trunci vix attingentes; pedunculus brevior, articulis tribus ultimis inter se subæquilongis; flagellum 14—15-articulatum.

Mandibulæ et maxillipedes fere ut in *Cir. eximia*.

Segmenta trunci longitudine sat inæqualia; segmentum primum capite et segmento quinto paulo longius.

Epimera omnia angusta, subæque lata, furcis binis solitis instructa; epimera ultimi paris postice nonnihil producta.

Pedes trium parium anteriorum robusti, setis sat numerosis et spinis brevibus instructi, postice per paria breviores et aliquantum debiliores; pedes secundi paris articulo tertio aliquantum dilatato, articulo quarto in latere exteriori ad apicem articuli quinti nonnihil elongati producti, articulo sexto sat brevi.

Pedes quattuor parium posteriorum graciliores, postice per paria graciliores et longitudine aliquantum crescentes, setis simplicibus compluribus instructi, articulo quinto plus elongato quam in genere *Cirolanæ*; pedes septimi paris graciles, articulis secundo et tertio sat brevibus, articulis tribus sequentibus elongatis.

Segmenta quinque anteriora caudæ alte convexa.

Pleopoda in descriptione generis commemorata.

Segmentum ultimum caudæ elongatum, perpaulo longius quam latius, nonnihil convexum, subtriangulum, margine posteriore serrato, dentibus ad apicem versus majoribus, ciliis plumosis, non spinis ornato, apice brevi, truncato, serrato.

Uropodorum rami ciliis sat longis, plumosis, non spinis in marginibus ornati. Ramus interior caudam nonnihil superans, plus duplo et dimidio longior quam latior; margo interior paulum excurvatus; apex longe productus, bifidus; margo exterior vix dimidia parte posteriore aliquantum incurva et irregulariter serrato-dentata, parte media densius et subtilius serrata. Ramus exterior ramo interiore multo brevior; margo interior serratus; apex productus, bifidus; margo exterior irregulariter impressus, bidentatus, ex parte subtiliter serratus. Scapus angulo interiore sat elongato, medium ramum interiorem paulum superante.

Color in speciminibus diu in spiritu vini asservatis flavidus, in dorso interdum rosaceus.

Forekomst. Jeg har undersøgt 6 Exemplarer, tagne i Neapels Golf, hvor Arten, ifølge skriftlig Meddelelse fra Dr. P. Mayer, lever paa omtrent 25 Fv. Dybde.

Arten er ifølge Literaturen forøvrigt kjendt fra Englands vestlige og sydlige Kyster og fra Frankrigs Nordkyst. Bate & Westwood samle (l. c. p. 306) en Række Angivelser om dens Forekomst ved England (f. Ex. ved Frith of Clyde og Plymouth) og omtale dens Forekomst ved Guernsey. Den blev paa én Lokalitet tagen paa 6 Fv. Vand; ved Guernsey blev der taget «a dozen specimens feeding together within the orbit of the eye of a whiting, the eye-ball of the fish being nearly detached from the surrounding parts. The fish did not seem to be out of condition.» — Fr. Day giver (op. cit. p. 44) et interessant Bidrag til denne Arts Optræden. Et af ham undersøgt, ved Mevagissey fisket Exemplar af *Acanthias vulgaris* paa 27 Tommers Længde var indvendig fuldstændig opædt, saa at det kun bestod af Huden og Skelettet. Omtrent 20 Exemplarer af *Conilera*'en blevne tagne ud af det, og Day skriver: «the spiracles, vent and an orifice behind each pectoral fin appeared as if the had been enlarged or made by these parasites, which had devoured the whole of the soft parts of the fish». Day's Korrespondent havde fanget *Acanthias*'en i et Mulle-Net udsat omtr.  $\frac{1}{2}$  (engelsk) Mil fra Land; han havde taget c. 100 *Acanthias* paa én Gang, men næsten hver Fisk var bleven spist paa en lignende Maade. Og senere: «These lice in the summer months are found from 15 to 20 miles from land, generally on soft and sandy bottom.» — «When the lice are abundant, they drive away the Congers and other fish. Often a shoal of Bream will come and eat them up. As these parasites devour fish in a few hours . . . .»



S. Lo Bianco giver (op. cit. p. 408) ogsaa nogle Meddelelser om dette Dyr. Han skriver: «Moltissimi ♀ con embrioni in diversi stadii III [det vil sige i Marts Maaned]. — Quest' Isopodo voracissimo vive in compagnia della *Cirolana hirtipes* M.-Edw. dai 20 sino a quasi 100 metri di profondità. Assaltano insieme i pesci impigliati nelle reti, ed io stesso ho potuto vedere uno *Scyllium stellare* L. della lunghezza di 50 cm. ed un *Merluccius vulgaris* Flem. lungo 35 cm., oltre molte altre piccole specie, ridotte solamente in pelle ed ossa, in modo che il più abile preparatore non avrebbe potuto fare.»

Bonnier har (op. cit. p. 136) sammenstillet et Par andre franske Forfatteres og sine egne Iagttagelser om denne Arts Forekomst ved Frankrigs Kyster; han angiver, at den er tagen ved de Anglo-Normanniske Øer, Roscoff, Concarneau, le Croisic og tilføjer: «Ce petit crustacé est un des animaux qu'on rencontre le plus fréquemment dans les lieux où l'on drague l'*Amphioxus*; je ne l'ai jamais trouvé que dans ces parages bien délimités et qui présentent une faune très spéciale.» Imidlertid have 2 af de af Bonnier citerede Forfattere, nemlig Y. Delage (op. cit. p. 156) og Koehler (op. cit. p. 25) fremsat nogle Bemærkninger om, at de ved de 2 først nævnte Lokaliteter tagne Exemplarer ikke passede ganske med Sp. Bate & Westwoods Fremstilling og afvege «par les antennes, par les appendices natatoires du sixième anneau abdominal et par les ponctuations rouges, dont les auteurs anglais spécifient l'absence». Muligvis have altsaa de to Forfattere undersøgt Dyr af en anden affin Art, thi Koehler tilføjer, at han «possède des Conilera de Naples dont les caractères s'accordent absolument avec la description des auteurs anglais».

Med Sikkerhed kjender man kun den nys beskrevne Art af denne Slægt, men forskellige andre Isopoder ere med Urette henførte til den. Saaledes findes *Cirolana concharum* (Stimps.) og *Cir. polita* (Stimps.) af Harger og Verrill i tidligere Publikationer (se ovenfor) henførte til Slægten *Conilera*. — Af E. v. Martens: Ueber einige ostasiatische Süßwasserthiere (l. c. p. 58, Taf. I, Fig. 3 (3 a—c)) opstilles en «*Æga (Conilera) interrupta*» Mart. Denne Form er ifølge Afbildningen en god Ægide, og naar v. Martens henfører den til *Conilera* som Underslægt, saa har dette sandsynligvis sin Grund i, at H. Milne-Edwards i Hist. nat. d. Crust. T. III, p. 242 stiller *Conilera* mellem *Æga* og *Rocinela*, kun støttende sig til Leach's fejlagtige og defekte Fremstilling. Den første ganske gode Fremstilling af *Con. cylindracea* (Mont.) skyldes Bate & Westwood (1868), som ogsaa angive Dyrets systematiske Stilling rigtig.

3. **Eurydice** Leach (1815).

Oculi mediocres vel majores, in lateribus superiore et inferiore capitis evoluti.

Pedunculus antennarum 4-articulatus. (Flagellum longum, semper ultra medium corpus prominens.)

Maxillipedes lacinia articuli secundi uncis nullis instructa.

Pleopoda primi et secundi parium structura subæqualia; scapus paulo vel vix latior quam longior; ramus uterque submembranaceus (margine posteriore setis longissimis, plumosis instructo).

Scapus uropodorum angulo postero-interiore perpaulum producto.

Differentia sexualis interdum magna, interdum parva.

**Conspectus specierum.**

1. Segmentum ultimum caudæ postice manifesto truncatum.
2. Clypeus supinus visus aream totam inter palpos mandibularum explens, in cornu longum productus. Uropoda segmentum ultimum caudæ paulum superantia.
  3. Pedunculus antennarum articulo ultimo dimidio longiore quam articulo penultimo. Epimera parium duorum anteriorum angulo posteriore subrecto, parium ceterorum paulum producto, acuminato, acuto. Segmentum ultimum caudæ margine posteriore subrecto, dimidiam latitudinem segmenti explente; margo posterior angulis lateralibus in processum spiniformem, parvum, acutum productis, spinis affixis nullis instructus.
    1. *Eur. elegantula* n. sp.
  3. Pedunculus antennarum articulo ultimo plus duplo longiore quam articulo penultimo. Epimera omnia angulo posteriore in processum acuminatum, acutum producto. Segmentum ultimum caudæ margine posteriore ex parte majore sat profunde emarginato, paulo plus quam tertiam partem latitudinis segmenti explente; margo posterior angulis rotundatis, spinis binis affixis majoribus (spina interiore multo majore quam exteriori) instructus.
    3. *E. spinigera* n. sp.
2. Clypeus supinus visus partem minorem areæ inter palpos mandibularum explens, in cornu brevius productus. Segmentum ultimum caudæ uropoda superans.
  3. Antennulæ pedunculo antennarum multo breviores. Segmentum ultimum caudæ uropoda multum superans; margo posterior profunde et æqualiter serratus, non spinosus . . . . . 2. *E. inermis* n. sp.

3. Antennulæ saltem maris pedunculo antennarum paulo longiores. Segmentum ultimum uropoda paulum superans; margo posterior subtilissime serratus, angulis lateralibus in processum triangulum, acutum productis, spinis affixis nullis. . . . . 4. *E. orientalis* n. sp.
1. Segmentum ultimum caudæ postice late rotundatum (prope apicem spinis 4 armatum).  
5. *E. pulchra* Leach.

Species 5 mihi cognitæ generis hujus structura inter se valde similes. Præter characteres in diagnosi commemoratos characteres sequentes speciebus descriptis communes sunt.

Corpus elongatum, sat convexum; cauda semper sat longa, robusta, interdum etiam trunco paulo longior.

Lamina frontalis in partem basalem et partem apicalem divisa. Pars basalis ex parte a clypeo oblecta, sat longa, latitudine mediocri; pars apicalis ante in cornu porrectum, liberum, acutum, longum, inter partes basales antennularum situm, producta.

Clypeus brevis, a basi in cornu prominens et porro directum productus.

Antennulæ pedunculo 3-articulato, articulo primo porro directo, crasso, in latere exteriori cupuliformi, articulo secundo crasso, cum articulo primo angulum rectum formante.

Antennæ articulo ultimo pedunculi elongato, multo longiore quam articulo penultimo.

Mandibula sinistra acie sat profunde trifida.

Maxillipedes palpo fere elongato-ovato, articulis penultimo et antepenultimo magnitudine subæqualibus.

Segmenta trunci longitudine aliquantum inæqualia; segmentum primum breve, capite multo brevius et segmento quinto nonnihil vel multo brevius.

Epimera parva vel mediocria; furca arcuata nunquam bene definita impressionem formans, in epimeris anterioribus evanida; angulus posterior nunquam rotundatus, sæpius productus.

Pedes parium trium anteriorum non elongati, graciliores, setis sat numerosis, simplicibus instructi; articuli tertius et quartus minus incrassati; articulus sextus interdum longitudine et crassitudine mediocri, interdum aliquantum elongatus et incrassatus.

Pedes quarti paris longitudine mediocri.

Pedes parium trium posteriorum elongati, graciliores vel graciles; pedes septimi paris pedibus quinti paris nonnihil vel aliquanto longiores, pedibus sexti paris nonnihil breviores; articulus secundus postice per paria pedum gracilior; articuli quattuor sequentes

postice per paria plus complanati, setis longis, simplicibus, in series breves, transversas digestis imprimis in latere exteriori articularum ornati.

Segmentum quintum caudæ angulis lateralibus liberis, non a segmento quarto tectis.

Uropoda tenuia; ramus interior ramo exteriori multo longior, subtrigonus, margine interiore fere nudo, margine posteriore recto vel paulum curvato, ciliis longis, plumosis et interdum prope angulum exteriorem spinis nonnullis, parvis instructo, margine exteriori ciliis paucioribus instructo; ramus exterior ramo interiore nonnihil angustior, subtrigonus, margine exteriori ad basin versus excurvato, angulo exteriori manifesto, sæpius acuto, ciliis fere ut in ramo interiore digestis.

Color brunneus vel griseus, punctis et maculis valde ramosis, nigris, imprimis in dorso corporis crebre conspersis, ornatus.

Appendix masculina ad medium ramum interiorem versus affixa, nonnihil curvata, complanata, sat lata, ramum superans.

#### 1. *Eurydice elegantula* n. sp.

(Tab. V, Fig. 2—2 t.)

#### Mas adultus et femina ovigera.

**Diagn.** *Corpus maris plus triplo longius quam latius, cauda longiore quam trunco, corpus feminae duplo et dimidio longius quam latius, cauda aliquanto brevior quam trunco. Clypeus supinus visus aream totam inter palpos mandibularum occupans, in cornu longum productus. Antennulae articulo primo flagelli circiter triplo et dimidio longiore quam articulis ceteris cunctis. Antennae articulo ultimo pedunculi dimidio longiore quam articulo penultimo. Epimera parium duorum anteriorum angulo posteriore acuto, vix in processum productum, parium posteriorum angulo posteriore in processum perparvum productum. Segmentum ultimum caudæ margine posteriore dimidiam latitudinem segmenti explente, subrecto, angulis lateralibus non spinosis, in processum triangulum, brevem, spiniformem productis. Uropoda caudam paulum superantia. — Long. maris adulti 6,4<sup>mm</sup>, long. feminae ovigerae 7<sup>mm</sup>.*

**Descr.**<sup>1)</sup> Corpus maris elongatum, angustatum, plus triplo longius quam latius; truncus brevior et paulo latior quam cauda. Corpus feminae fere elongato-ovatum, duplo et dimidio longius quam latius; truncus ovatus, aliquanto longior et circiter  $\frac{3}{4}$  latior quam cauda.

<sup>1)</sup> Characteres in diagnosi speciei et in descriptione generis commemorati ex parte majore non in hac descriptione repetiti sunt.

Frons ante in processum brevem producta, in utroque latere processus nonnihil emarginata.

Oculi nigri, latiores quam longiores, in mare aliquanto majores quam in femina; ocelli in utroque sexu numero æquantes, nonnihil convexi.

Antennulæ circiter medium articulum ultimum pedunculi antennarum attingentes, articulo basali ultra articulum secundum non prominente, in mare et in femina valde dissimiles. — *Mas*: Pedunculus valde incrassatus, articulo secundo valde abbreviato, articulo tertio item abbreviato, in latere posteriore ob receptionem flagelli valde excavato; flagellum articulo basali perlongo, multo longiore quam pedunculo, per longitudinem majorem dilatato, compresso, ad apicem versus attenuato, setis sensilibus permultis et perlongis, barbam longam formantibus, in latere posteriore instructo, articulis quattuor ultimis brevissimis. — *Femina*: Pedunculus minus incrassatus, articulo secundo longiore, articulo tertio longiore quam latiore, in latere posteriore non excavato; flagellum articulo basali paulo brevior et minus incrassato quam pedunculo, setis paucioribus sat brevibus instructo, articulis tribus ultimis brevissimis.

Antennæ in mare ultra marginem posteriorem segmenti quinti caudæ attingentes, in femina circiter marginem posteriorem trunci attingentes; flagellum in mare c. 42-articulatum, in femina c. 30-articulatum.

Segmenta quartum, quintum, sextum, interdum etiam septimum trunci stria transversa, e striis brevibus et punctis formata, instructa.

Pedes parium trium anteriorum articulo sexto aliquantum elongato et incrassato.

Pedes parium trium posteriorum elongati, graciles; pedes septimi paris non in latere inferiore spinosi, articulis quarto—sexto aliquantum elongatis, articulo quarto  $\frac{2}{3}$  longiore quam latiore.

Cauda in mare multo longior, robustior, latior quam in femina.

Segmentum ultimum caudæ fovea vel impressione transversa brevior ad basin versus instructum, in mare aliquanto majus quam in femina, ciliis in margine posteriore tamen in femina aliquanto longioribus quam in mare.

Uropoda ramis in mare multo majoribus quam in femina, ciliis marginalibus tamen in femina multo longioribus quam in mare; ramus interior angulo exteriori acuto, angulum sat acutum formante.

Color in speciminibus diu in spiritu vini asservatis brunnescens vel dilute griseus, punctis et maculis ramosis nigris imprimis in dorso corporis crebre vel creberrime conspersis ornatus.

Appendix masculina ramum interiorem sat superans, ad apicem versus non dilatata, apice subrotundato, margine exteriori brevissime setoso.

Forekomst.  $59^{\circ} 7' N. B.$ ,  $13^{\circ} 32' V. L.$ , 3 Ex. af en *Beroë* (Moberg);  $59^{\circ} N. B.$ ,  $17^{\circ} 50' V. L.$ , 14 Ex. (Lundbeck,  $^{20/4} 89$ );  $58^{\circ}-59^{\circ} N. B.$ ,  $13^{\circ}-15^{\circ} V. L.$ , 1 Ex. (Rink);  $58^{\circ}-60^{\circ} N. B.$ , [?]  $5^{\circ}-14^{\circ} V. L.$ , c. 45 Ex. (Krøyer);  $56^{\circ} N. B.$ ,  $18^{\circ} V. L.$ , 6 Ex. (Hygom); «Atlantehavet», 40—50 Ex. (Hedemann).

Jeg har saaledes haft et meget anseligt Materiale, og alt er taget pelagisk, skjøndt det hidrører fra 6 forskellige Kilder. De 5 nærmere angivne Lokalteter ligge i Havet vest for det nordligste Skotland.

Som det fremgaar af Beskrivelse og Afbildninger udmærker denne Art sig ved at besidde meget stor Kjønssforskjel i Legemets Form, i Kroppens Længde i Forhold til Halen, i Øjnenes Størrelse, i Antennulernes Form og Udstyr med Sandsebørster og i sidste Haleleds og Uropodernes Størrelse og Randhaarenes Længde.

Arten staar temmelig nær ved *Eur. truncata* (Norm.), men Afbildningerne af denne Art (Ann. et Mag. Nat. Hist. 4 ser., Vol. II, Pl. XXIII, Fig. 12—15) vise flere ret væsentlige Forskjelle, saaledes er første Led i Antennulernes Svøbe forholdsvis langt kortere og spinklere, Pandeprocessen er betydelig længere, sidste Haleleds Bagrand maaler kun  $\frac{1}{3}$  af Leddets Brede og har 2 stærke Spidser paa hver Side, den inderste størst, endelig ere Uropoderne kortere end Haleledet. Under Forudsætning af, at Normans Afbildninger ere nogenlunde korrekte, kunne vore Arter ikke være identiske, hvilket var at vente, da de ere tagne i samme Farvand, og Slægten synes at være temmelig fattig paa Arter. Normans Art kan heller ikke være identisk med nogen af de 2 andre Arter, der kan være Tale om, nemlig *E. inermis* og *E. spinigera*.

Den er meget nærstaaende til *Eur. Grimaldii* Dollfus (se senere), men denne Forfatters Beskrivelse af Antennulerne passer ikke, og Lokalteternes Fjernhed gjør ogsaa Identiteten mindre sandsynlig.

## 2. *Eurydice inermis* n. sp.

(Tab. V, Fig. 3—3 f.)

### Femina ovigera et specimina juniora.

Diagn. *Corpus circiter triplo longius quam latius; cauda trunco nonnihil (in femina) vel vix brevior. Clypeus partem minorem areæ inter palpos mandibularum occupans, in cornu breviusculum productus. Antennulæ articulo primo flagelli circiter duplo longiore quam articulis ceteris cunctis. Epimera primi paris angulo posteriore non producto, parium ceterorum angulo posteriore in processum perparvum producto. Segmentum ultimum caudæ margine posteriore vix quartam partem latitudinis segmenti explente, recto, profunde et æqualiter serrato, dentibus c. 9, spinis nullis. Uropoda cauda aliquanto breviora. — Long. feminae adultæ 5,2<sup>mm</sup>.*

Descr. Speciei præcedenti affinis et similis.

Corpus nonnihil longius quam in femina speciei præcedentis; truncus minus dilatatus; cauda robustior.

Frons ut in specie præcedente.

Oculi paulo majores quam in *E. elegantula*, forma subæquali.

Antennulæ nonnihil graciliores et paulo breviores quam in femina *E. elegantulæ*; flagellum sat gracile, setis sensilibus paucioribus sat longis instructum, articulo basali circiter duplo longiore quam articulis 3 ultimis cunctis.

Antennæ circiter marginem posteriorem trunci attingentes; pedunculus fere ut in *E. elegantula* formatus; flagellum ex articulis c. 17 vel 18 elongatis formatum, apice seta perlonga instructo.

Segmenta 6 posteriora trunci stria transversa interdum in segmentis anterioribus interrupta, e striis brevibus et punctis impressis formata.

Pedes parium trium anteriorum articulo sexto brevior, paulum incrassato.

Pedes parium trium posteriorum minus elongati, sat graciles; pedes septimi paris non in latere inferiore spinosi, articulis quarto—sexto paulum elongatis, articulo quinto paulo longiore quam quarto et perpaulo brevior quam sexto, articulo quarto paulo longiore quam ad apicem latiore.

Segmentum ultimum caudæ prope basin impressione transversa longa instructum; reliqua in diagnosi commemorata.

Uropoda sat parva; ramus interior angulo exteriori acuto, angulum paulum acutum formante.

Color fere ut in specie præcedente.

Førekømt. 3 Exemplarer (1 ægge. Hun og 2 yngre Ex.) bleve fundne i et Glas, indeholdende Hyperiner, Calanider og andre pelagiske Dyr, og mærket: Cap Lizard. Man maa altsaa antage, at Dyrene ere tagne pelagisk.

### 3. *Eurydice spinigera* n. sp.

(Tab. V, Fig. 4—4 c; Tab. VI, Fig. 1—1 c.)

#### Mas adultus.

Diagn. Corpus paulo plus quam triplo longius quam latius; cauda truncum longitudine subæquans. Clypeus aream totam inter palpos mandibularum occupans, in cornu longum productus. Antennulæ articulo primo flagelli circiter duplo et dimidio longiore quam articulis 3 ceteris cunctis. Antennæ articulo ultimo pedunculi plus duplo longiore quam articulo penultimo. Epimera omnia angulo posteriore in processum conicum, acutum

*producto. Segmentum ultimum caudæ margine posteriore paulum ultra tertiam partem latitudinis segmenti explente, in medio late emarginato, angulis in obliquum truncatis, spinis binis (interiore multo longiore quam exteriori), robustis, affixis ornatis. Uropoda caudam paulum superantia. — Long. maris adulti 9<sup>mm</sup>.*

DESCR. *E. elegantulæ* sat similis.

Corpus minus angustatum quam in mare *E. elegantulæ*; truncus sat multo latior et non brevior quam cauda.

Frons ante perpaulum emarginatus, processu medio evanido.

Oculi ut in mare *E. elegantulæ*.

Antennulæ paulo crassiores quam in femina *E. elegantulæ*; pedunculus articulo primo angustiore, ante articulum secundum manifesto prominente, articulo tertio paulo latiore quam longiore; flagellum setis sensilibus sat numerosis, brevioribus instructum.

Antennæ truncum paulum superantes; flagellum c. 20—24-articulatum, articulis exterioribus ex parte majore longis, seta apicali nulla.

Segmenta anteriora trunci stria transversa brevi, media, profunda ornata; segmenta 4 posteriora saltem stria transversa longa instructa.

Epimera structura in diagnosi commemorata a speciebus omnibus mihi cognitis valde diversa; epimera sexti paris processu conico inter omnes longissimo; epimera septimi paris processu inter omnes brevissimo.

Pedes parium trium anteriorum fere ut in *E. elegantula*, setis tamen pluribus instructi.

Pedes parium trium posteriorum perpaulo breviores et latiores quam in *E. elegantula*; setis tamen pluribus instructi. Pedes septimi paris articulis tertio—sexto in latere inferiore ad marginem interiorem versus spinis multis brevioribus instructi, ad marginem exteriorem versus setis multis ornati; articulus quintus perpaulo brevior quam sextus, multo longior quam quartus; articulus quartus paulo longior quam latior.

Segmentum ultimum caudæ ad basin versus impressione media brevior et profunda et utrinque excavatione laterali profunda et sat magna instructum; impressio media in fundo bicarinata; reliqua in diagnosi commemorata.

Uropoda majora, fere ut in mare *E. elegantulæ* formata, margine exteriore rami interioris tamen paulum incurvo.

Color brunneus, maculis irregularibus et ramosis nigris minus crebre conspersis.

Appendix masculina ramum interiorem minus superans, ad apicem versus valde dilatata, apice late rotundato, integro.



Forekomst. 47 Exemplarer (alle ♂) i et Glas uden Lokalitetsangivelse, men ifølge Etiketten givne af Hr. Apotheker, Etatsraad A. H. Riise og som Følge deraf sandsynligvis fra Vestindien.

#### 4. *Eurydice orientalis* n. sp.

(Tab. VI, Fig. 2—2 h.)

##### Mas adultus.

**Diagn.** *Corpus ubique latitudine subæquali, triplo et dimidio longius quam latius. Clypeus partem minorem aræ inter palpos mandibularum occupans, in cornu brevius, acuminatum productus. Antennulæ articulo primo flagelli plus duplo et dimidio brevior quam articulis 5 ceteris cunctis. Antennæ articulo ultimo pedunculi c. dimidio longiore quam articulo penultimo. Epimera 4 parium anteriorum angulo posteriore non producto, epimera posteriora angulo perpaulum producto. Segmentum ultimum caudæ margine posteriore circiter  $\frac{2}{7}$  latitudinis segmenti explente, subtilissime serrato, angulis in processus triangulos, acutos productis. — Long. maris adulti 4,2<sup>mm</sup>.*

**Descr.** Speciebus ceteris gracilior et characteribus compluribus ab illis diversa. Corpus plus elongatum quam in speciebus ceteris; cauda perrobusta, trunco paulo longior et perpaulo angustior.

Frons ante perpaulum emarginata, processu medio perminuto.

Oculi magni, aliquanto majores quam in speciebus ceteris, nigri, latiores quam longiores; ocelli sat magni, aliquantum convexi.

Antennulæ structura singulari (fig. 2 c). Pedunculus articulis duobus basalibus pervalde inflatis, aliquanto crassioribus quam in mare *E. elegantulæ*, articulo tertio brevior, in latere postero-inferiore valde excavato. Flagellum valde elongatum, pedunculum antenarum paulum superans; articulus basalis pedunculo antennularum paulo brevior, minus incrassatus, setis sensilibus multis brevioribus instructus; articuli ceteri graciles, ad apicem versus sensim graciliores; articulus quartus longus; articulus sextus brevissimus, seta apicali longissima, flagello toto vix brevior (fig. 2), et setis nonnullis brevioribus instructus.

Antennæ valde elongatæ, ultra marginem posteriorem segmenti quinti caudæ prominentes; pedunculus paulo gracilior quam in speciebus ceteris; flagellum c. 26-articulatum, seta apicali longissima ornatum, articulis exterioribus elongatis.

Segmenta quartum, quintum, sextum trunci stria transversali interdum ex parte evanida ornata.

Pedes trium parium anteriorum articulo sexto paulo brevior quam in *E. elegantula*.

Pedes trium parium posteriorum paulo graciliores et minus setosi quam in *E. elegantula*. Pedes septimi paris in latere inferiore non spinosi; articulus quintus perpaulo longior quam sextus, nonnihil longior quam quartus; articulus quartus circiter duplo longior quam latior.

Segmentum ultimum caudæ ad basin versus impressione media brevi profunda instructum; margo posterior setis 9 brevissimis instructus.

Uropoda ramis latis; ramus interior angulo exteriori rotundato.

Color ut in *E. elegantula*.

Appendix masculina ramum interiorem paulum superans, lata, a media ad apicem versus paulum dilatata, apice ex parte majore rotundato, angulo ad ramum vergente in processum angustum producto.

Forekomst. 2 Exemplarer, begge Hanner, ere tagne i Java-Søen, 3° 25' S. B., 106° 50' Ø. L., 8 Fv. (Andréa, 1869).

#### 5. *Eurydice pulchra* Leach (1815).

(Tab. VI, Fig. 3—3 i.)

*Agat-Pissebet*, *Oniscus*, Slabber, Natuurk. Verlust. p. 149, Pl. XVII, Fig. 1—2 [1778].

— (*Oniscus Achatus*) Slabber, Physik. Belust. p. 85, Tab. XVII, Fig. 1—2.

*Eurydice pulchra* Leach, A tabul. view of the extern. Charact., l. c. p. 370.

— — Leach, Diction. d. Scienc. Natur. p. 347.

— — Desmarest, Consid. Crust. p. 302.

— — H. Milne-Edw., Hist. Nat. d. Crust., T. III, p. 238.

*Slabberina agata* Van Beneden, Recherches sur l. Crust., l. c. p. 89, Pl. XV, Fig. 1—10.

— *agilis* G. O. Sars, Beretning om en i Sommeren 1865 foret. zool. Reise, l. c. p. 117.

*Eurydice pulchra* Sp. Bate & Westwood, Brit. Sess.-eyed Crust., Vol. II, p. 310.

— — Ritzema Bos, Bijdr. tot de kennis van de Crust. Hedr., p. 34 og 56—57, Pl. I, Fig. 1—11.

— — Metzger, Crust. aus d. Ordn. Edriopht. und Podopht., l. c. p. 285 og 301.

— — Lenz, Die wirbellos. Thiere d. Travemünder Bucht, l. c. p. 15, Taf. II, Fig. 10—17.

*Slabberina gracilis* Borallius, New or imperfectly known Isop., l. c. p. 12, Pl. II, Fig. 20—26.

#### Mas adultus et femina magna (non ovigera).

Diagn. *Corpus elongato-ovatum, duplo et duabus tertiis partibus vel triplo et quarta parte longius quam latius. Clypeus aream totam inter palpos mandibularum occupans, in cornu longum productus. Antennulæ articulo primo flagelli circiter dimidio longiore quam articulis 4 ceteris cunctis. Antennæ articulo ultimo pedunculi duplo longiore quam articulo penultimo. Epimera parium trium anteriorum angulo posteriore*

*non producto, parium duorum posteriorum saltem angulo posteriore in processum breviorum producto. Segmentum ultimum caudæ postice late rotundatum, parte media marginis posterioris subtilissime serrata, spinis 4 brevibus et setis c. 12 minus longis instructa. Uropoda cauda paulo breviora. — Long. maris adulti 4,2<sup>mm</sup>; long. feminae magnæ non ovigeræ 7<sup>mm</sup>.*

Descr. Species insignis, facile dignota.

Corpus plus ovatum quam in speciebus ceteris, alte convexum, in mare et in femina habitu subsimili; truncus feminae sat vel aliquanto longior quam cauda, maris fere brevior.

Frons ante non emarginata, processu medio perparvo.

Oculi fere ut in *E. elegantula*.

Antennulae nonnihil ultra apicem articuli penultimi pedunculi antennarum prominentes, in mare et in femina paulum dissimiles; pedunculus minus incrassatus quam in femina *E. elegantulae*, articulo primo paulum ante articulum secundum prominente, articulo tertio in utroque sexu paulo longiore quam latiore; flagellum articulo primo in mare nonnihil longiore et latiore quam in femina, setis brevioribus, in mare sat numerosis, in femina paucioribus instructo.

Antennae maris fere marginem posteriorem segmenti quinti caudae attingentes, feminae marginem posteriorem trunci haud attingentes; pedunculus articulo penultimo in latere anteriore ad apicem versus spinis compluribus longis, gracilibus instructo; flagellum in mare ? articulatum<sup>1)</sup>, in femina c. 18—19-articulatum, in utroque sexu seta apicali breviori ornatum.

Segmenta quattuor anteriora stria brevi media, profunda instructa; segmenta sex posteriora striis sublateralibus brevibus instructa; segmentum nullum stria transversa longa ornatum.

Pedes trium parium anteriorum nonnihil crassiores quam in *E. elegantula*, articulo secundo nonnihil breviori et aliquanto crassiore quam in hac specie.

Pedes trium parium posteriorum manifesto breviores et latiores quam in speciebus ceteris; pedes septimi paris articulis quarto et quinto et in latere deorsum vergente et prope marginem interiorem et prope marginem exteriorem spinis nonnullis armatis, articulis quarto, quinto, sexto paulum elongatis, articulo quinto vix breviori quam articulo sexto et paulo longiore quam articulo quarto, articulo quarto perpaulo longiore quam latiore.

<sup>1)</sup> Blandt de talrige (53) Exemplarer, jeg har set og undersøgt, fandtes, mærkelig nok, kun én eneste voksen, temmelig lille Han. Ved et Uheld gik denne Han tabt, før jeg ved Udfærdigelsen af Texten fik talt og nedskrevet Antallet af Led i dens Antenne-Svøbe.

Segmentum ultimum caudæ impressione media brevi, profunda et utrinque excavatione laterali minore, sat profunda ornatum.

Uropoda mediocria, in mare et in femina subsimilia; ramus interior angulo exteriori rotundato, spinoso.

Color in speciminibus in spiritu vini asservatis flavescens, maculis ramosis sæpius ex parte confluentibus in dorso crebre conspersis.

Appendix masculina ramum interiori longè superans, perpaulum curvata, ad apicem versus sat dilatata, apice in latere ad ramum vergente profunde incisa, ut processus angustus, paulum curvatus, acutus formetur.

Forekomst. Alle de af mig undersøgte, meget talrige Exemplarer ere tagne ved Danmarks Kyster, baade ved Kysterne af Kattegat og Østersøen samt i Øresund. Om de tidligere Fund henvises til Meinert, op. cit. n<sup>o</sup> 1, p. 90 og n<sup>o</sup> 2, p. 472. Det kan herefter særlig fremhæves, at den er tagen paa 16 Fv. og paa 1½—2 Fod, frit svømmende mellem Tangbuske paa Sandbund. — Senere er den tagen i Antal pelagisk om Natten ved Hellebæk, 17 yngre Ex. af begge Kjøen (Dr. H. Jungersen og Dr. Joh. Petersen) samt pelagisk om Natten ved Anholt, 14 Ex., alle ♀ (Dr. Joh. Petersen). Lenz angiver den fra Lolland (1 Ex. paa 6 Fv.) og fra Travemünde; Moebius<sup>1)</sup> fra den ydre Del af Kieler-Bugt.

Arten kjendes forøvrigt fra det sydlige og vestlige Norges (Sars, op. cit. n<sup>o</sup> 3, p. 61 og Bovallius, l. c.), samt fra Englands, Hollands, Belgiens og Nord-Frankrigs Kyster, og da man har en Del biologiske Oplysninger om den, skal jeg her levere nogle Uddrag.

Den første Iagttager, Slabber, har holdt den levende i Fangenskab, og meddeler, at den bevægede sig meget hurtigt som Gyriener «auf der Oberfläche des Wassers» (den tyske Oversættelse p. 87).

Van Beneden skriver (l. c.): «Nous l'avons trouvé dans le port d'Ostende et assez abondamment le long de la plage, dans les flaques d'eau pendant la marée basse. Ce joli crustacé nage avec une célérité incroyable. Placé dans un aquarium où un bocal, il s'élançait d'un bout du vase à l'autre comme une flèche, s'élève à la surface, plonge ensuite jusqu'au fond et se livre aux mêmes évolutions que certains insectes d'eau douce.» Sp. Bate & Westwood give op. cit. p. 312 Meddelelser om dens Forekomst paa det egentlige Englands (ikke Skotlands) østlige, vestlige og sydlige Kyster, meddele lignende Iagttagelser om dens Findesteder og Svømning som Van Beneden og fortælle dernæst

<sup>1)</sup> K. Moebius: Nachtrag zu d. im Jahre 1873 ersch. Verzeichniss der wirbellosen Thiere der Ostsee (Vierter Bericht d. Commission zur wiss. Untersuchung d. deutschen Meere in Kiel f. die Jahre 1877 bis 1881, p. 61). — Bogen er glemt i min tidligere Literatur-Liste; *Eurydice* nævnes p. 69.

følgende af en Korrespondent meddelte, interessante Iagttagelser: «If you are a moment still in the water while bathing, dozens will fasten upon you and nip most unpleasantly. I have had to jump into the water again after coming out from bathing and splash violently to get rid of the hosts that had stuck to me while clinging to the side of the boat preparatory to getting in. They continue to bite after you are out of the water. I once put a wretched *Hyperia* . . . into a small bottle with two *Eurydices*; the blood-thirsty little brutes attacked him at once like tigers, and soon sucked the shell clean.»

Ritzema Bos giver op. cit. p. 64 en Del biologiske Meddelelser, væsentlig stammende med mine øvrige Udskrifter af Forfattere, og Bates interessante Meddelelse bekræftes. «Als men gaat baden, dan hechten zij zich graag op de huid vast, en bijten vrij gevoelig.» — Metzger skriver p. 301: «Ein alles Lebende und Todte angreifender, äusserst lebhaft schwimmender Räuber, während der Ebbezeit auf dem von Wasser verlassenen Strande der ostfriesischen Inseln unter angespülten Seesternen, Quallen und todten Fischen zurückbleibend, oder in Fluthrillen und selbst in der Brandung nach Beute eifrig umherjagend.» — Dollfus giver (op. cit. n° 2, p. 4) en Sammenstilling af Lokalteter for dens Forekomst ved Hollands Kyster, men føjer ikke nye biologiske Iagttagelser til. — Hallez har fundet den i uhyre Masser ved Portel (ikke langt fra Boulogne) og skriver: «Il est impossible de ramasser une poignée de sable et de la jeter dans l'eau sans en voir sortir de nombreux individus». Han kalder den «l'agent principal de la salubrité de la plage», fordi den fortærer alle døde Dyr ved Strandbredden.

Sars har (op. cit. n° 1, p. 118 og op. cit. n° 3, p. 61) kun truffet den i det Indre af Thronbhjemsfjorden og ved Listerland. Bovallius' 2 Exemplarer ere fra Christianiafjorden og angives at være tagne paa c. 100 Fv. Dybde, men de ere sandsynligvis komne i Skraberens under Ophalingen. Norman angiver den (op. cit. n° 2, p. 288) fra St. Magnus Bay (Shetlands-Øerne). Bonnier (op. cit. p. 437) giver ogsaa et ret interessant Bidrag til dens Biologi. «Ce joli petit Isopode est très fréquent sur les plages de sable, surtout au moment où la mer remonte. Il est très vorace, et on le voit souvent recouvrir par milliers les débris organiques qui se trouvent sur la grève. Aussi ne doit on jamais en laisser, même un seul individu, dans des vases où se trouvent des pêches pélagiques ou des embryons. On le rencontre aussi nageant à la surface, très loin des côtes, et quand la drague le ramène c'est qu'elle le capture ainsi en remontant du fond.» Her er jeg nu desværre ikke vis paa, om Bonnier muligvis ikke har sammenblandet denne Art med *E. elegantula* eller endnu snarere med den ved Cap Lizard pelagisk fiskede *E. inermis*.

Angaaende denne Arts fortvivlede Synonymi skal jeg indskrænke mig til et Par Bemærkninger. I min ovenstaaende Liste har jeg samlet de vigtigere Publikationer, og Resten af den forøvrigt lange Synonymi kan efterslaas hos Bonnier l. c. Bovallius

har afgjort opstillet sin nye Art *Stabb. gracilis* paa 2 ikke udvoxne Exemplarer, ja efter hans Afbildning Fig. 21 paa Pl. II og hans Udtalelser paa Side 16 tør jeg endog paastaa, at 7de Benpar hos det afbildede Dyr endnu ikke havde opnaaet fuld Størrelse og Udvikling. Jeg tør ogsaa nok paastaa, at Bate & Westwoods Angivelse (l. c. p. 308): «The eyes under a strong lens are not faceted» er ganske urigtig, thi Øjnene ere altid facetterede, selv om de enkelte Oceller ikke have nogen tydelig særlig Hvælving; Leach skriver da ogsaa op. cit. n° 1: «Oculi . . . non granulati» og i op. cit. n° 2: «yeux lisses». Denne Bate & Westwoods Angivelse og Antenne-Svøbernes større Længde efter Leach's Diagnose bruges nu af Bovallius til at adskille Slægterne *Eurydice* Leach og *Slabberina* Van Ben. fra hinanden, idet den sidste Slægt skal have «oculi reticulati». At bruge saadanne Slægtsmærker er selvfølgelig forkasteligt, thi Antenne-Svøbernes Længde varierer efter Kjøen, og Bovallius' Udsagn, at Øjnene ere «reticulati», giver ingensomhelst Oplysning, men hvad der var mere værd at vide, var, hvorvidt hver Ocelle var hvælvet. Der er ingen Tvivl om, at Slægten *Slabberina* er uholdbar, men et andet Spørgsmaal er, hvorvidt Bovallius' Art *Sl. gracilis* er identisk med *E. pulchra*, thi hans Beskrivelse og Afbildninger af Antennulerne, Øjnenes Størrelse og Halens Bagrand m. m. passe ikke godt med de af mig undersøgte Stykker<sup>1)</sup>, men jeg antager indtil videre, at det væsentligste af Differentserne skriver sig fra, at hans Fremstilling ikke er ganske korrekt.

Hesse giver (op. cit.) en længere Række til Dels interessante Oplysninger om en *Eurydice*-Art, der efter hans Beskrivelse maaske ikke er *E. pulchra*, men jeg har alligevel fundet det passende her at udskrive et lille Stykke, da det supplerer det Ovenstaaende. Efter at have meddelt, at de svømme saa højt som mulig under Vandfladen skriver han: «Leur manière de progresser a quelque rapport avec celle des Gyr[ic]jniens, si ce n'est qu'elle est incomparablement plus prompte. Lorsqu'ils s'élancent d'un point à un autre, ils vont en zigzag, de droite à gauche [comme pour visiter l'espace qu'ils parcourent]; mais ces déviations de la ligne droite sont très-courtes, et sont franchies avec une extrême vivacité. C'est ordinairement du fond et du centre de la flaque, dans laquelle ils se tiennent, qu'ils sortent pour venir sur les bords; lorsqu'ils les ont atteints, ils

<sup>1)</sup> Antennulernes Svøbe er efter Fig. 22 paa Pl. II hos Bovallius for slank og Endeledet for langt, dernæst er efter samme Figur 2det og især 3die Led i Antennernes Skaft for lange og for smalle; ifølge Fig. 20 ere Øjnene for lange fremefter, men dette modsiges forøvrigt af Fig. 21; ifølge Fig. 20 er 6te Haleled for bredt, med Haar paa for lang en Strækning af Bagranden; endelig er ifølge Fig. 21 de forreste Epimerer for smalle og alle Epimererne uden Stribning. — Midtpartiet af Fig. 22 med den store Afstand mellem Roden af Antennuler og Antenner er forøvrigt afgjort højest unaturligt, ligefrem umuligt, og Erkjendelsen heraf taler imod at lægge synderlig Vægt paa Afvigelser som dem, der lige ere blevne fremhævede.

s'enfoncent légèrement dans le sable, et, à la manière des Courtilières, *Grillotalpa*, y tracent de petits sillons, dont on aperçoit facilement les saillies à la surface.» Et Par formentlige Urigtigheder i dette Citat har jeg sat i Klammer.

1. Arter, som med Sikkerhed kunne henføres til denne Slægt.

1. *Eurydice truncata* (Norman), beskrevet under Navnet *Cirolana truncata* i op. cit. n° 1, p. 421, Pl. XXIII, Fig. 12—15 og op. cit. n° 2, p. 288. Arten, hvis Affinitet er omtalt ovenfor, blev skrabet i St. Magnus Bay, Shetland, paa 40—60 Fv., Mudderbund. Senere er den (Norman, op. cit. n° 3, p. 659 og 683) tagen ved 59° 12' N. B., 5° 57' Ø. L., 53 Fv., og rigtig henført til *Eurydice*.
2. *Eurydice Grimaldii* Dollfus, op. cit. n° 1, p. 6. Denne Art er kun ufuldstændig fremstillet, opstillet paa Hanner af 7—8<sup>mm</sup>. Længde. Sjette Haleled er bygget som hos *Eur. elegantula*, men: «antennæ primi paris flagello uni-articulato». Arten er tagen: «Au large de Ponta Delgada, ile San Miquel, 8 juillet 1887, 9 heures 30 soir, surface. — Nombreux exemplaires.» Paa Grund af denne sydlige Lokalitet, Dyrenes noget større Længde, den mærkelige Beskrivelse af Antennulerne og den forøvrigt defekte Fremstilling vil jeg indtil videre antage den for en fra *Eur. elegantula* forskjellig Form; i hvert Fald forekommer der mig ikke at være Anledning til at antage Dollfus's Artsnavn efter en meget tvivlsom Identificering.
3. *Eurydice longicornis* (Studer). Arten, der er henført til Slægten *Cirolana*, beskrives af Studer i op. cit. n° 1, p. 28, Taf. II, Fig. 15—15 c. Den opgives at have en Længde af 7<sup>mm</sup>. og at være tagen foran Tafel Bay paa 50 Fv. Dybde; ifølge Afbildningen er den en typisk *Eurydice*.

2. Art, hvis Henførelse er tvivlsom.

*Eurydice* (?) *pontica* Czerniavsky, op. cit. p. 81, Pl. 6, Fig. 4—6 (citeret efter v. Martens; Arbejdet har jeg ikke set), beskrevet under Navnet *Helleria*.

3. Ubeskrevet Art.

*Eurydice polydendrica* Norman & Stebbing (M. S.). — Norman op. cit. n° 3, p. 665 og 684, funden ved 59° 37' N. B., 7° 19' V. L., paa 530 Fv.

4. **Bathynomus** A. Milne-Edw. (1879).

Denne Slægts Affinitet er afhandlet ovenfor paa Side 252—53.

Man kjender kun 1 Art, *B. giganteus* A. Milne-Edw., opstillet paa 1 Exemplar, 230<sup>mm</sup>. langt, taget paa 955 Fv. i det caraibiske Hav.

Forøvrigt henvises til A. Milne-Edwards, op. cit. n<sup>o</sup> 1, p. 21 samt til Afbildningerne i Filhol op. cit. p. 147 og Agassiz op. cit. Fig. 252 (paa et Blad indskudt mellem Side 48 og 49).

(5. **Anuropus** Beddard (1886).

Hvorvidt denne Slægt hører til *Cirolanida* eller bør opstilles som en særegen Familie kan jeg efter Beddards Fremstilling ikke afgjøre.

Slægtens Ejendommeligheder ere nærmere omtalte ovenfor paa Side 254—55.

Man kjender kun 1 Art, *An. branchiatus* Beddard, opstillet paa 1 Exemplar, 70<sup>mm</sup>. langt, taget i det Stille Hav ved 2° 33' S. B., 144° 4' Ø. L. paa 1070 Fv. Forøvrigt henvises til Beddard op. cit. n<sup>o</sup> 1, p. 112 og op. cit. n<sup>o</sup> 2, p. 152, Pl. VII, Fig. 1—5.)

Fam. II. **Corallanidæ.**

Partes oris vid. p. 280—285 et p. 311—312.

Pedes parium trium anteriorum mediocres; articulus septimus brevior, prope apicem setis instructus; unguis bene definitus, articulo septimo paulo brevior, nonnihil curvatus.

Pedes parium quattuor posteriorum præcipue gressorii, paulum vel nonnihil natatorii; articulus septimus brevior, paulo vel nonnihil longior quam unguis nonnihil curvatus.

Genus solum mihi cognitum ad hanc familiam referendum est.

**Corallana** Dana (1852).

Corpus elongato-ovatum, ad apicem posteriorem versus sæpius plus minusve hirsutum et foveis et nodulis et carinis instructum; truncus cauda longior.

Oculi mediocres vel permagni.



Antennulæ pedunculo antennarum nunquam longiores; pedunculus biarticulatus (articulis duobus basalibus coalitis), articulo basali semper aliquanto crassiore quam articulo secundo, interdum producto.

Antennæ medium truncum nunquam attingentes; pedunculus 5-articulatus, articulo tertio aliquanto vel duplo brevior quam articulo quarto; flagellum multiarticulatum.

Epimera omnia furcis binis solitis bene evolutis instructa; epimera parium duorum anteriorum postice rotundata; epimera ultimi paris postice sat producta, angulo acuto, epimeris segmenti sexti minora.

Pedes trium parium anteriorum mediocres vel robustiores, setis paucis et spinis nonnullis, in latere interiore brevibus, instructi; articulus quartus in latere exteriori circiter ad apicem articuli quinti prominens.

Pedes quattuor parium posteriorum mediocres vel sat robusti, nonnihil compressi; articulus tertius angulo exteriori plus minusve producto, articuli quartus—sextus sensim longiores et graciliores. Pedes omnes setis plumosis nullis, tamen setis trifidis (test. Sch. & Mein.) vel multifidis, mirabile constructis ornati; hæ setæ imprimis in margine apicali interiore et exteriori articuli quinti bene evolutæ, etiam tamen nonnullæ subsimiles in margine articulorum et tertii et quarti et interdum sexti (test. Sch. & Mein.) inventæ sunt. Pedes sexti et septimi parium longitudine subæquales, pedibus quinti paris manifesto longiores.

Segmentum quintum caudæ in lateribus ab angulis lateralibus segmenti quarti tectum.

Pleopoda parium anteriorum fere ut in Cirolanis sectionis I<sup>mæ</sup> formati; rami ciliis densis, brevioribus vel brevibus instructi.

Segmentum ultimum caudæ parte laterali basali subquadrata, prominente, sæpius utrinque prope medium incisum.

Species 7 mihi cognitæ et omnes novæ ad insulas Indiæ occidentalis et in mari Atlantico captæ sunt.

I ovenstaaende Slægtsbeskrivelse har jeg taget saa meget Hensyn som muligt til de af Schiødte & Meinert beskrevne 6 Arter, af hvilke jeg ikke har set noget Exemplar. (Et Par af andre Forfattere beskrevne Arter har jeg ikke her kunnet tage Hensyn til paa Grund af Beskrivelsernes Korthed.) Imidlertid er de to nævnte Forfatteres Fremstilling ofte noget ufuldstændig, og da tilmed nogle af deres Slægtskarakterer ikke forekomme mig sandsynlige, maa jeg fremsætte et Par Bemærkninger.

Naar der (op. cit. n<sup>o</sup> 2, p. 286) siges «Lamina frontalis aut detecta aut evanida (in feminis pluribus)», saa troer jeg ikke, at Lamina frontalis nogensinde er «evanida», og

det forekommer mig ogsaa, at Tegningerne vise det modsatte. Naar den hos *Corallana nodosa* ♀ skal være «evanida», hos samme Arts ♂ «transversa, perbrevis . . . .», hos «Virgo» atter «evanida», saa troer jeg ikke ret paa, at den er «evanida» og antager ogsaa, at Hannen og Hunnen høre til forskjellige Arter, hvilket Afbildningerne (Tab. V, Fig. 7 og 8) i høj Grad tyde paa.

Naar der om Antennulæ staar «scapus articulo tertio evanido», saa troer jeg ikke, at den Tydning er rigtig; hos flere *Cirolana*-Arter ser man, at Scapus nærmer sig til at blive og hos *Cir. minuta* virkelig bliver toledet ved, at de 2 Rodled af det oprindeligt 3-leddede Skaft smelte sammen, og baade Form og Størrelse af Rodledet hos *Corallana* tyde paa, at det paa samme Maade er dannet af 2 Led. Den forøvrigt af Forf. angivne Kjønsskjel i Skaftet passer ikke paa mine Arter.

Flere af de øvrige Karakterer forekomme mig ikke aldeles tiltræffende. Ifølge Afbildningerne kunne Øjnene egentlig aldrig kaldes «minuti»; om de forreste Haleringe ere mere eller mindre skjulte, er i det mindste ikke her nogen Slægtskarakter, ofte ikke en Kjønsskarakter, oftere ikke engang en Artskarakter.

#### Conspectus specierum.

1. Oculi mediocres vel magni, in medio vertice aliquantum inter se distantes.
2. Mandibula sinistra in situ visa parte apicali profunda trifida. Clypeus et labrum, infra visa, perspicua. (Articulus basalis antennularum pronus visus sat angustus. Caput superne in mare cornibus tribus ornatum. Segmentum ultimum caudæ nodis nullis basalibus ad medium instructum.)
  1. *Cor. tricornis* n. sp.
2. Mandibula sinistra in situ visa parte apicali obscurius trifida vel conum singulum formante. Labrum subverticale infra visum ex parte vel sæpissime totum a mandibulis obtectum (clypeus sæpissime ex parte vel totus simul obtectus).
3. Antennularum articulus basalis pedunculi pronus visus sat angustus, infra visus non supra articulos basales antennarum prominens. Segmentum ultimum caudæ nodis nullis basalibus ad medium instructum. (Caput superne in mare cornibus 4 ornatum.) . . . . . 2. *C. quadricornis* n. sp.
3. Antennularum articulus basalis pedunculi pronus visus valde dilatatus, infra visus ita prominens, ut articuli basales antennarum in rima transversa sat profunda inter antennulas et mandibulas positi sint. Segmentum ultimum caudæ nodis duobus basalibus magnis prope medium sitis ornatum.

4. Segmenta quartum et quintum caudæ in medio dorso paulum impressa, carinis et nodis nullis ornata. Segmentum ultimum caudæ apice bispinoso. (Species parva.) . . . . . 3. *C. subtilis* n. sp.
4. Segmenta quartum et quintum caudæ in medio dorso profunde per longitudinem excavata, carinis et nodis compluribus instructa. Segmentum ultimum caudæ apice 4-spinoso. (Species magna.)
4. *C. antillensis* n. sp.
1. Oculi permagni, in medio vertice inter se contigui.
2. Segmentum ultimum caudæ brevius, postice late rotundatum et incisura media profunda, sat lata instructum . . . . . 5. *C. fissicauda* n. sp.
2. Segmentum ultimum caudæ longius, postice anguste rotundatum, non incisum.
3. Segmenta quartum et quintum caudæ in medio dorso profunde per longitudinem excavata, carinis ornata. Segmentum ultimum caudæ in medio latere incisum, in dorso areis duabus dense setosis et nodis duobus magnis basalibus ad medium versus sitis ornatum. . . 6. *C. oculata* n. sp.
3. Segmenta quartum et quintum caudæ in medio dorso perpaulum impressa, carinis nullis ornata. Segmentum ultimum caudæ in latere integrum, in dorso ubique setis brevissimis remotius sparsis ornatum.
7. *C. Warningii* n. sp.

### Sectio prima.

Oculi mediocres vel magni, in medio vertice aliquantum inter se distantes.

#### 1. *Corallana tricornis* n. sp.

(Tab. VI, Fig. 4—4 p; Tab. VII, Fig. 1—1 d.)

#### Mas adultus et femina ovigera.

*Diagn. Clypeus et labrum, supina visa, perspicua. Articulus basalis antennularum pronus visus sat angustus, supinus visus sat latus, non supra articulos basales antennarum prominens. Mandibula sinistra in situ visa parte apicali profunde trifida. Segmenta tertium, quartum, quintum caudæ per mediam longitudinem paulum impressa. Segmentum sextum caudæ breve, in medio latere incisum; apex 4-spinosus; dorsum ad basin versus ad latera versus nonnihil excavatum, areis duabus dense et brevissime setosis, nodis majoribus nullis ornatum. Uropoda ramo interiore lato.*

*Mas: Caput superne late et profunde excavatum, cornu frontali magno et cornibus duobus sub-occipitalibus magnis instructum. Segmentum primum trunci perconvexum, ante nodulis duobus nonnihil distantibus ornatum. — Long. 8,<sup>3</sup>mm.*

*Femina: Caput superne paulum (in feminis junioribus haud) excavatum, cornibus nullis ornatum. Segmentum primum trunci structura solita. — Long. 7<sup>mm</sup>.*

**DESCR.** Corpus duplo et dimidio vel fere triplo longius quam latius, sat convexum; truncus cauda multo longior.

Caput in mare in medio superne longe et late et profunde excavatum, ante in cornu magnum, altum, sursum et nonnihil ante directum, paulum curvatum, postice concavum productum, ad marginem posteriorem versus cornibus duobus magnis, erectis, pone angulum interiorem oculorum situs, ornatum. In femina cornu nullum et excavatio levis adsunt.

Frons ante paulum bisinuata, in processum minorem, trigonum producta; in mare hic processus pronus visus a cornu frontali tectus est.

Oculi nigri, sat magni, in medio vertice sat distantes, a latere visi fere æque lati ac longi; ocelli sat magni, aliquantum convexi.

Lamina frontalis triplo longior quam latior, ad mediam paulum constricta, ante angulum subrectum formans, a latere visa nonnihil curvata, marginibus lateralibus nonnihil incrassatis et elevatis.

Clypeus et labrum, supina visa, perspicua.

Antennulæ circiter medium articulum ultimum pedunculi antennarum attingentes; articulus basalis articulo secundo duplo fere longior, sat crassus, pronus visus sat angustus, supinus visus sat latus, pedunculo antennarum non altior; articulus secundus non duplo longior quam latior; flagellum pedunculo paulo vel vix brevius, 9—11-articulatum.

Antennæ structura solita; pedunculi articulus quartus plus duplo longior quam articulus tertius et articulo quinto perpaulo brevior; flagellum c. 20—24-articulatum.

Mandibulæ parte dimidia distali minus alte elevata quam in speciebus sequentibus, structura nonnihil discrepante (vid. p. 280—81 (et 283)).

Maxillipedes subtus inermes.

Segmenta anteriora trunci in mare alte convexa; segmentum primum perconvexum, ante tuberculis duobus nonnihil distantibus ornatum; segmenta anteriora in femina structura solita, levius convexa. Segmenta solum duo posteriora stria postmarginali sat manifesta ornata; in femina segmentum ultimum imprimis prope marginem posteriorem nonnihil setosum.

Epimera structura solita, posteriora in femina setis nonnullis brevioribus instructa.

Pedes parium trium anteriorum sat robusti, ungue sat crasso.

Pedes parium quattuor posteriorum breviores, setis perpaucis instructi; articulo secundo lato, articulis mediis angulo exteriore minus dilatato; pedes quinti paris pedibus sequentibus nonnihil breviores.

Segmenta 5 anteriora caudæ breviora, duo anteriora minus arcuata, omnia præter segmentum primum prope marginem posteriorem nodulis et impressionibus multis (in segmento quinto paucioribus) instructa. Segmenta tertium, quartum, quintum excavatione media, ante evanida, postice paulum profunda, sat lata ornata, in medio excavatione tamen perpaulum carinata. Segmenta in femina ovigera setis brevioribus instructa, in mare (et verosimiliter in speciminibus junioribus) subnuda.

Segmentum ultimum caudæ breve, tertia parte latius quam longius, utrinque in medio latere incisum; apex anguste rotundatus, spinis 4 armatus; dorsum nonnihil convexum, prope basin ad latera versus latius impressum, in medio paulum impressum et in fundo hujus impressionis per longitudinem carinatum, areis duabus longitudinalibus brevissime setosis ad apicem versus ornatum, in femina præterea setis nonnullis ubique remotius sparsis. Pars dimidia posterior marginis ciliis plumosis sat longis instructa.

Uropoda breviora, caudam nonnihil superantia, ciliis bene evolutis instructa; ramus interior ramum exteriorem paulum superans, latus, margine postero-interiore valde excurvato, spinis compluribus instructo, apice acuto, nonnihil producto; ramus exterior sat angustus, apice bifido. Scapus angulo interiore non ad medium ramum interiorem producto.

Color flavescens vel brunneus, in dorso punctis et maculis minutis nigris plus minusve infuscatus.

Appendix masculina longa, angusta, ad basin rami affixa, ramum perpaulum superans, ad mediam angustata, apice acuto.

Forekomst. St. Thomas og «Vestindien», 7 Ex. (Krebs); St. Croix, 1 Ex. (Ørsted); «Vestindien?» henved 200, for største Delen ikke voxne Ex. (Grønsund); «Vestindien», 20 Ex. (Hohlenberg, givne af P. E. Müller); Reialejo (Mellem-Amerika), 1 Ex. (Ørsted).

Materialet af denne udmærkede Art er saaledes stort, men for største Delen ikke synderlig godt konserveret, og de fleste Exemplarer ere ikke voxne.

Allerede paa halvvoxne, omtrent 5,4<sup>mm</sup> lange Hanner begynde de 3 Horn at vise sig som ganske smaa Forhøjninger, og tiltage saa jævnt i Størrelse efterhaanden som Dyret voxer. Saadanne halvvoxne Hanner have allerede en fri og tilsyneladende vel udviklet *Appendix masculina*, men den naar ikke fuldt ud til Spidsen af Pleopodens Indergren, og den synes at bevare denne Længde indtil Dyrets sidste Hudskifte, efter hvilket den naar lidt udenfor Indergrenens Ende.

2. *Corallana quadricornis* n. sp.

(Tab. VII, Fig. 2.)

**Mas haud adultus et femina non ovigera.**

**Diagn.** *Speciei præcedenti valde affinis, characteribus sequentibus imprimis differt. Clypeus, infra visus, perangustus et ex parte obtectus; labrum a mandibulis obtectum. Mandibularum pars distalis dimidia sat alte eminens, obscurius trifida. Segmentum ultimum ad latera versus paulo magis impressum quam in specie præcedente.*

*Mas: Caput ut in specie præcedente excavatum, cornibus duobus frontalibus minoribus, minus distantibus et cornibus duobus majoribus, suboccipitalibus, magis distantibus ornatum. — Long. 6,3<sup>mm</sup>.*

*Femina: Caput ut in specie præcedente. — Long. 6,8<sup>mm</sup>.*

**Descr.** Hæc species *Cor. tricorni* simillima; characteres omnes graviores in diagnosi commemorati sunt. Præterea differt cauda minus hirsuta, parte apicali segmenti ultimi minus convexa, spinis tamen 4 apicalibus ornata. (Flagellum antennarum in mare 16-articulatum, in femina c. 20-articulatum.)

**Forekomst.** St. Thomas, 2 Ex. mellem *C. tricorni* (Krebs); 1 Exemplar uden Lokalitet, men sandsynligvis ogsaa fra Vestindien.

*Appendix masculina* hos Hannen naar ikke Spidsen af Pleopodens Indergren, og jeg slutter heraf med stor Sandsynlighed, at Exemplaret ikke er udvoxt.

3. *Corallana subtilis* n. sp.

(Tab. VII, Fig. 3—3 c.)

**Specimen juvenile (verosim. femineum) in mutatione cutis captum.**

**Diagn.** *Feminæ Cor. quadricornis subsimilis, tamen imprimis differt characteribus sequentibus. Oculi leviter granulati. Antennularum articulus basalis pedunculi pronus visus valde dilatatus, supinus visus ita prominens, ut articuli basales antennarum in rima sat profunda inter antennulas et mandibulas positi sint. Segmentum ultimum caudæ dorso prope basin nodis duobus magnis, paulum distantibus ornata, impressionibus sub-lateralibus profundis, apice spinis 2 instructo. — Long. 4,7<sup>mm</sup>.*

**Descr.** Specimen singulum juvenile in mutatione cutis captum et ob eam causam a speciebus ceteris habitu sat diversum vidi. Characteres præcipui in diagnosi exhibiti sunt; præterea characteres sequentes commemorare possum.

Frons ante in processum trigonum sat magnum producta.

Lamina frontalis paulo longior quam latior, ad apicem versus nonnihil angustata, apice rotundato, superficie excavata.

Clypeus perangustus, ex parte detectus, labrum obtectum.

Antennulæ articulo secundo pedunculi gracili, flagello c. 7-articulato.

Segmentum ultimum caudæ nonnihil longius quam in speciebus præcedentibus, quarta parte latius quam longius, superne nudum.

Uropoda fere latiora quam in speciebus præcedentibus; rami setis nonnihil longioribus et spinis paucioribus ornati; scapus angulo interiore brevior, circiter tertiam partem rami interioris occupans.

Color fusco-piceus; segmentum ultimum caudæ et uropoda brunnea, maculis ramosis nigris ornata.

Forekomst. St. Thomas, 1 Ex. (Krebs, <sup>24</sup>/s 1858).

Fig. 3 og især Fig. 3 a vise særdeles klart, hvorledes en saadan Isopod ser ud, naar Huden er skiftet paa de 3 sidste Kropled og Halen, som saa have udvidet sig, medens de 4 forreste Kropled og Hovedet endnu ikke have gennemgaaet det Hudskifte, ved hvilke de faa en til de andre Led svarende Brede og Tykkelse.

#### 4. *Corallana antillensis* (Lütken, M. S.) n. sp.

(Tab. VII, Fig. 4—4 i.)

##### Mas adultus et specimen junius. (Femina ignota.)

Diagn. *Clypeus et labrum, infra visa, obtecta. Mandibularum pars distalis peralte eminens. Antennularum articulus basalis, pronus visus, perlatus, supinus visus angustior, nonnihil supra basin antennarum eminens. Segmenta tertium et quartum et quintum et ex parte secundum caudæ per mediam longitudinem ante nonnihil, postice late et profunde excavata, carina alta, interrupta, in media excavatione sita ornata, præterea impressionibus et nodulis et carinis instructa. Segmentum ultimum caudæ longius, in medio latere incisum, apice subacuto, 4-spinoso, dorso arcis duabus dense et brevissime setosis et ad basin versus nodis duobus sat approximatis, acutis et nodis duobus lateralibus, latioribus, furcatis ornato. Uropoda ramo interiore angustiore, duplo longiore quam latiore. — Long. 16<sup>mm</sup>.*

Descr. Species insignis et maxima hujus generis.

Corpus circiter triplo et tertia parte longius quam latius; truncus multo longior quam cauda.

Frons profundius bisinuata, processum majorem inter antennulas formans.

Oculi magni, nigri, plus quam dimidiam partem superficiei capitis explentes; ocelli majores, aliquantum convexi.

Lamina frontalis duplo longior quam ad basin latior, a basi ad apicem versus sensim angustata, apice rotundato, per totam longitudinem profunde excavata, a latere visa recta.

Clypeus et labrum, supina visa, a mandibulis occulta.

Antennulæ circiter apicem articuli penultimi pedunculi antennarum attingentes; pedunculi articulus basalis, pronus visus, laminam latam, non duplo longiorem quam latiore, formans, supinus visus sat angustus et nonnihil supra basin antennarum eminent; articulus secundus gracilis, plus duplo longior quam latior; flagellum articulo basali pedunculi vix longius, gracile, c. 9-articulatum.

Antennæ structura fere ut in *C. tricorni*; flagellum c. 27-articulatum.

Mandibulæ permagnæ, perrobustæ, parte distali altius eminente quam in speciebus ceteris, conum singulum formante.

Maxillipedes subtus nodulis compluribus ex parte acutis ornati.

Segmenta trunci minus convexa; stria postmarginalis solum in lateribus segmentorum trium posteriorum sat manifesta.

Epimera structura solita.

Pedes quam in *C. tricorni* paulo longiores et graciliores, setis nonnullis instructi.

Segmenta quattuor anteriora caudæ aliquantum arcuata; segmenta 2—5 excavatione ante evanida, postice profunda et lata ornata; carina alta, in segmentis quarto et quinto interrupta, in media excavatione inventa est, et in segmento quinto postice in processum brevior, crassum producta. Areæ ad latera excavationis imprimis in segmentis quarto et quinto cariniformes. Segmenta 2—4 ad margines posteriores impressionibus et nodulis numerosis ornata; segmentum quintum ad latera versus irregulariter sculptum.

Segmentum ultimum caudæ vix quinta parte latius quam longius, in medio dorso ante sulcatum et in fundo sulci iterum breviter carinatum. Characteres ceteri præcipui in diagnosi commemorati sunt.

Uropoda caudam nonnihil superantia, ciliis longioribus densis instructa; ramus interior angustior, duplo longior quam latior, margine interiore nonnihil excurvato, spinis nonnullis instructo, apice producto, acuto; ramus exterior sat angustus, ramo interiore perpaulo brevior. Scapus angulo interiore brevior, apicem partis tertiæ rami interiores non attingente.

Color fere ut in *C. tricorni*.

Appendix masculina ramum interiorem non superans, parte distali paulo angustiore quam in *Cor. tricorni*.

Forekomst. St. Thomas, 1 meget stort Ex. (Krebs, 1857); «Vestindien», 1 mindre Ex. (Krebs, 1866); Vestindien, 1 lille Ex. (Ørsted).



## Sectio secunda.

Oculi permagni, in medio vertice inter se contigui.

5. *Corallana fissicauda* n. sp.

(Tab. VII, Fig. 5—5 d.)

## Femina (sine laminis ovigeris).

Diagn. *Clypeus, supinus visus, ex parte perspicuus, labrum obtectum. Antennularum articulus basalis nonnihil incrassatus, pronus et supinus visus angustus. Segmenta 5 anteriora caudæ fere ut in Cor. antillensi. Segmentum ultimum caudæ breve, postice late rotundatum et incisura media profunda, sat lata, instructum, margine laterali non inciso, dorso ad basin nodis et nodulis ornato, areis spisse setosis nullis. Uropoda caudam longe superantia, structura fere solita. — Long. 11<sup>mm</sup>.*

DESCR. Corpus fere triplo longius quam latius; truncus cauda aliquanto longior. Frons margine subrecto, processu medio inflexo, fere evanido.

Oculi nigri, permagni, superficiem totam capitis præter aream minorem mediam ad marginem posteriorem occupantes; ocelli permagni, semiglobosi, ut in *C. Warmingii* formati.

Lamina frontalis fere triplo longior quam latior, a basi ad mediam angustata, per longitudinem majorem excavata, parte apicali subplana, ante rotundata. Lamina a latere visa excurvata et prope apicem incurva.

Clypeus supinus visus ex parte perspicuus; labrum obtectum.

Antennulæ circiter apicem articuli penultimi pedunculi antennarum attingentes; pedunculus articulo primo nonnihil incrassato, prono et supino viso tamen angusto, articulo secundo aliquanto brevior quam primo, graciliore; flagellum pedunculo aliquanto brevior, c. 8-articulatum.

Antennæ structura solita.

Mandibulæ magnæ, robustæ, pars distalis mandibulæ sinistrae sat alte eminens, ut in speciebus sequentibus conum singulum formans.

Maxillipedes fere ut in *C. antillensi*.

Segmenta trunci fere ut in *C. antillensi*; stria postmarginalis solum in segmento septimo bene definito, in segmentis sexto et quinto et quarto paulum distincta, imprimis e punctis formata.

Epimera et pedes fere ut in *C. antillensi*.

Segmenta 5 anteriora caudæ paulo levius sculpta quam in *C. antillensi*.

Segmentum ultimum caudæ abbreviatum, circiter  $\frac{2}{5}$  latius quam longius, postice late rotundatum, non spinosum, ibique incisura profunda et sat lata ornatum, margine laterali integro; dorsum sat convexum, areis nullis spisse setosis instructum, setis brevissimis remotius sparsis ad margines laterales versus ornatum, excavatione basali media in fundo brevior carinata, nodis acutis sat approximatis nonnihil minoribus, nodis laterilibus aliquanto minoribus quam in specie præcedente et non furcatis instructum.

Uropoda caudam valde superantia, ut in *C. antillensi* ciliata; rami inter se æqui-longi; ramus interior sat latus, margine postero-interiore aliquantum excurvato spinis nonnullis instructo, apice paulum producto, acuto. Scapus angulo interiore paulum ultra tertiam partem rami interioris occupans.

Color flavo-brunneus.

Forekomst. Vestindien, 1 Ex. (Krebs, 1866).

#### 6. *Corallana oculata* n. sp.

(Tab. VII, Fig. 6—6 b.)

#### Mas adultus et femina ovigera.

Diagn. *Cor. fissicaudæ* valde similis, segmento ultimo caudæ fere ut in *C. antillensi* formato, longiore, apice subacuto, margine laterali in medio non inciso, dorso areis duabus spisse setosis instructo, imprimis ab ea specie diversa. -- Long. maris 9,7<sup>mm</sup>, long. femine 11,5<sup>mm</sup>.

Descr. Corpus circiter triplo longius quam latius; segmenta 4 posteriora trunci imprimis ad marginem posteriorem versus et segmenta 2—5 caudæ in mare fere nuda, in femina scabra, setis brevissimis, rigidis instructa; truncus in mare paulo longior et in femina nonnihil longior quam cauda.

Frons ut in specie præcedente.

Oculi fere ut in specie præcedente, in mare nonnihil majores et plus convexi quam in femina; ocelli permagni in mare valde convexi, in femina paulo minus convexi.

Lamina frontalis ut in *Cor. fissicauda*.

Clypeus perangustus, supinus visus perspicuus; labrum ex parte a mandibulis tectum.

Antennulæ et antennæ ut in *Cor. fissicauda*.

Mandibulæ in mare plus prominentes quam in femina.

Maxillipedes subtus nodulis compluribus ex parte acutis armati.

Segmenta duo vel tria anteriora trunci stria postmarginali paulum distincta; segmenta posteriora stria in mare bene distincta, in femina a setis plus minusve abscondita.

Epimera et pedes fere ut in *Cor. antillensi*.

Segmenta 5 anteriora fere ut in *C. antillensi* sculpta.

Segmentum ultimum caudæ fere ut in *C. antillensi*, excavatione media basali breviori, nodis lateralibus magnis angustioribus, apice 5-spinoso imprimis ab ea specie discrepans.

Uropoda caudam nonnihil superantia; ramus interior ramum exteriorem paulum superans, fere duplo longior quam latior, margine postero-interiore sat excurvato, sat spinoso, longe ciliato, apice paulum producto, acuto. Scapus angulo interiore partem tertiam basalem rami interioris nonnihil superante.

Color flavo-brunnescens.

Appendix masculina fere ut in *C. tricorni*.

Forekomst. Vestindien, 2 Ex. (Krebs, 1866).

#### 7. *Corallana Warmingii* n. sp.

(Tab. VII, Fig. 7—7 f.)

**Mas (? vix) adultus.**

**Diagn.** *Clypeus, supinus visus, ex parte perspicuus, labrum obtectum. Antennularum articulus basalis nonnihil incrassatus, pronus visus angustus, supinus visus nonnihil latior. Segmenta omnia trunci sulco transverso nonnihil a margine posteriore remoto ornata. Segmenta 2—5 anteriora caudæ excavatione media et carinis evanidis, prope marginem posteriorem nodulis multis instructa. Segmentum ultimum caudæ longius, margine laterali integro, dorso ubique setis brevissimis remote sitis et nodulis 8 in seriem transversam, basalem dispositis ornato. Uropoda caudam perpaulum superantia, latitudine mediocri. — Long. 11<sup>mm</sup>.*

**Descr.** Species pulchra, bene distincta, structura pedum sat aberrans.

Corpus circiter triplo longius quam latius, alte convexum; truncus perpaulo longior quam cauda.

Frons, oculi, clypeus et labrum, antennulæ, antennæ, maxillipedes fere ut in *Cor. fissicauda*.

Segmenta trunci structura in diagnosi commemorata a speciebus ceteris diversa.

Pedes parium trium anteriorum fere ut in *C. fissicauda*, articulis setis compluribus instructis, ungue graciliore, minus curvato.

Pedes parium quattuor posteriorum magis inter se dissimiles quam in speciebus ceteris. Pedes quinti paris breviores et crassiores, setis longioribus sat multis imprimis in articulo quarto et in angulo exteriori producto articuli tertii instructi; pedes sexti et

septimi parium sat elongati, graciliores, articulo tertio in latere exteriori postice valde producto, articulis quarto et quinto postice minus productis, articulis tertio et quarto setis multis longis in angulo exteriori instructis, præterea setis nonnullis longis in latere exteriori articuli secundi et in angulo interiori articuli quarti et in angulo exteriori articuli sexti ornati.

Segmenta anteriora caudæ longa, 4 anteriora valde arcuata. Cetera in diagnosi exhibita.

Segmentum ultimum caudæ paulo latius quam longius, sat convexum; margo lateralis integer; pars apicalis angustius rotundata, margine processulis 5 minutis, non spinis ornato; dorsum ubique setis brevissimis remote sitis ornatum, excavatione media (cum carina) brevi et nodulis 8 in seriem transversam, basalem, nonnihil flexuosam, dispositis instructum; ciliæ marginales dense sitæ, breviores.

Uropoda caudam perpaulum superantia, ciliis mediocribus instructa; ramus interior duplo longior quam latior, margine postero-interiore aliquantum excurvato, ad apicem remotius flexuoso-serrato, spinis nullis instructo, apice paulum producto, acuto; ramus exterior ramo interiori paulo brevior, structura solita. Scapus angulo interiori paulum ultra partem tertiam basalem rami interioris prominente.

Color flavescens, maculis minutis nigris remotius sparsis.

Appendix masculina in specimine singulo ramum interiorem non superans, nonnihil latior quam in *C. tricorni*, parte media haud angustata, apice acuminato, acuto.

Forekomst. 17° 47' S. B., 35° 16' V. L., 1 Ex. (Warming, 1866).

Denne særdeles smukke og interessante, pelagisk fiskede Form har jeg opkaldt efter Botanikeren, Hr. Prof., Dr. E. Warming, der paa sin Rejse mellem Europa og Brasilien har fisket en Mængde pelagiske Krebsdyr.

1. Arter, som med betydelig Sikkerhed kunne henføres til denne Slægt (eller i det mindste til denne Familie).

1. *Corallana acuticauda* Miers, op. cit. n° 5, p. 78, Pl. VII, Fig. B. En enkelt Hun blev tagen blandt Coraller paa 35 Fv. ved Hotspur Bank, 17° 32' S. B., 35° 45' V. L. Ifølge Fremstillingen ligner den i Antennulernes Bygning nærmest *C. antillensis*, i Halens Bygning nærmere *C. tricornis*.
2. *Corallana basalis* (Heller). Arten er beskrevet af Heller i op. cit. n° 1, p. 497 og i op. cit. n° 3, p. 143, Taf. XII, Fig. 14—14 a under Navnet *Æga basalis*; af

Schiødte & Meinert bleve Hellers Original-Exemplarer gjorte til Gjenstand for en ny Fremstilling, op. cit. n° 2, p. 287—288, Tab. IV, Fig. 8—15. Arten er tagen ved Nicobar-Øerne. (Det største Exemplar var 9,5<sup>mm</sup>. langt.) Arten udmærker sig særlig ved en stærkt udpræget Kjønsforskjel i Form og Størrelse af Antennulernes Rodled.

3. *Corallana collaris* Schiødte & Mein. op. cit. n° 2, p. 289, Tab. V, Fig. 1—2. Største Exempl. 11<sup>mm</sup>. langt. Tagen ved Ubay paa Philippinerne.
4. *Corallana brevipes* Sch. & Mein. op. cit. n° 2, p. 291, Tab. V, Fig. 3—4. 7<sup>mm</sup>. lang. Tagen ved Ubay paa Philippinerne.
5. *Corallana hirticauda* Dana, op. cit. n° 2, p. 774, Pl. 51, Fig. 8 a—e. Ifølge Dana omtr. 5 Lin. lang og tagen i Hulheder i døde Koraller fra Korallrevene ved Tongatabu. Arten er senere fremstillet af Sch. & Mein., op. cit. n° 2, p. 292, Tab. V, Fig. 5—6 efter et 6,5<sup>mm</sup>. langt Exemplar fra Ubay paa Philippinerne.
6. *Corallana nodosa* Sch. & Mein., op. cit. n° 2, p. 293, 294, 295, Tab. V, Fig. 7—10. Forff. have fremstillet «Femina ovigera», «Mas adultus» og «Virgo» efter 3 Exemplarer, men efter Text og Afbildninger afvige de nævnte 3 Stykker saa meget fra hverandre i Formen af Antennuler, Pandepladens Tilstedeværelse eller Mangel (?), Kropringenes Skulptur og Uropodernes Ydergren, at jeg, efter mit Kjendskab til Slægten, maa antage, at de 3 Dyr høre til 2 eller maaske 3 vel adskilte Arter. Exemplarerne stammede fra Philippinerne (Samar Palabar, Ubay), og et Par af dem vare 12<sup>mm</sup>. lange.
7. *Corallana hirsuta* Sch. & Mein., op. cit. n° 2, p. 297 og 298, Tab. V, Fig. 11—12. Største Exemplar 9,5<sup>mm</sup>. lang. Tagen ved Ubay paa Philippinerne.
8. *Corallana macronema* (?Bleeker) Miers, op. cit. n° 4, p. 469. Bleeker opstillede, op. cit. p. 23, Tab. I, Fig. 1—1 c, en Form, som han kaldte *Æga macronema* Bleek., den er sikkert ingen *Æga*, men enten en *Corallana* eller *Alcirona*; den angives til 17<sup>mm</sup>. Længde og «habite errante la peau de diverses espèces de poissons de la mer de Batavia». Miers har nu ment at kunne kjende den Bleekerske Form og beskriver under det angivne Navn et Dyr, der ifølge Beskrivelsen rigtig henføres til Slægten *Corallana*, og som kan blive 9 Lin. langt. Om hans Artsbestemmelse imidlertid er rigtig, faar staa hen.

## 2. Art, der med nogen Tvivl henføres til denne Familie.

*Cirolana sculpta* H. Milne-Edwards, op. cit. n° 1, p. 237. Denne Form er for ufuldstændig beskrevet til, at jeg tør udtale mig med synderlig Sikkerhed. Skulpturen paa de bageste Kropringe og paa Halen stemmer ifølge Fremstillingen imidlertid i høj Grad med den, jeg ovenfor har fremstillet hos adskillige vestindiske *Corallana*-

Arter, og jeg kjender ikke nogen saadan kraftig Skulptur hos noget andet Dyr af denne Afdeling af Isopoder. Forfatterens Exemplar var omtr. 9 Lin. (c. 20<sup>mm</sup>) og stammede fra Malabar-Kysten. — Senere skriver Krauss op. cit. p. 66 om et Dyr, han henfører til denne Art: «Eine durch die äusserst niedliche Zeichnung des Abdomens ausgezeichnete Art, welche ich in der Tafelbai gefunden habe. Gelblichgrün mit schwarzen Flecken und Punkten. Länge 6 Linien.» Jeg nærer imidlertid megen Tvivl om, at Krauss's Bestemmelse er rigtig. Herklots (op. cit. n° 1, p. 27) optager Arten efter Krauss.

3. Art, der muligvis kan tilhøre denne Familie.

*Cirolana rugicauda* Heller, se ovenfor p. 358, nævner jeg ogsaa her, da der forekommer mig at være en Mulighed for, at den kan være en *Corallana*.

---

Fam. III. **Alcironidæ.**

Partes oris vid. p. 285—290 et p. 312—313.

Pedes trium parium anteriorum articulo septimo una cum ungue unicum nonnihil vel aliquantum curvatum formante; unguis bene evolutus, articulo septimo sæpius brevior.

Pedes parium quattuor posteriorum unguibus semper bene evolutis, semper brevioribus quam articulo septimo.

**Præterea characteres sequentes indicare possum.**

Antennulæ pedunculo biarticulato.

Antennæ mediocres vel longæ, pedunculo 5-articulato (sæpius elongato).

Pedes nunquam natatorii.

Cauda segmento quinto in lateribus ab angulis lateralibus segmenti quarti tecto.

**Conspectus generum.**<sup>1)</sup>

1. Clypeus permagnus, semilunaris, margine interiore plus quam dimidium latus exterius mandibularum occupante . . . . . 1. *Alcirona* n. gen.
1. Clypeus sat parvus, margine interiore modo partem subapicalem mandibularum occupante.

---

<sup>1)</sup> Om den tvivlsomme Slægt *Corilana* Kossm. henvises til Bemærkningerne ved Slutningen af denne Familie.

2. Pedes parium trium anteriorum articulo quinto structura solita, non dilatato, articulo septimo non elongato. Pedes sexti et septimi parium articulo sexto aliquanto graciliore quam articulis tertio et quarto . . . . 2. *Lanocira* n. gen.
2. Pedes parium trium anteriorum articulo quinto in latere interiore in laciniam producto, perlato, articulo septimo sat elongato. Pedes sexti et septimi parium articulo sexto non angustiore quam articulis tertio et quarto.
3. *Tachæa* Sch. & Mein.

#### 1. *Alcirona* n. gen.

Antennarum pedunculus elongatus.

Partes oris vid. p. 313.

Pedes parium trium anteriorum articulo quinto in latere interiore non producto.

Pedes parium quattuor posteriorum simplices, articulo sexto non dilatato, quam articulis prioribus graciliore.

(Pars posterior corporis plus minusve setigera.

Pleopoda et uropoda fere ut in genere *Cirolanæ*.)

(Paa Grund af, at jeg kun har et nogenlunde fyldigt Kjendskab til 1 Art af de til denne og de 2 følgende Slægter hørende Arter, og der vistnok findes adskillige mig ubekjendte, hidtil i Literaturen stedmoderlig behandlede Former af denne interessante Familie, har jeg maattet indskrænke min Karakteristik af Slægterne meget betydelig.)

#### Conspectus specierum.

1. Cauda et uropoda superne setis multis mediocribus vel longis vestita. Antennularum pedunculus articulis 4 basalibus pedunculi antennarum nonnihil brevior. Uropoda ramo interiore fere duplo longiore quam latiore, apice rotundato. *Alc. Krebsii* n. sp.
1. Setæ in dorso caudæ breviores et pauciores, uropoda superne fere nuda. Antennularum pedunculus articulis 4 basalibus pedunculi antennarum fere longior. Uropoda ramo interiore vix dimidio longiore quam latiore, apice bifido . . *Alc. insularis* n. sp.

#### 1. *Alcirona Krebsii* (Lütken, M. S.) n. sp.

(Tab. VIII, Fig. 1—1 q.)

**Mas verosimiliter adultus et femina magna non ovigera.**

**Diagn.** Segmentum ultimum trunci saltem et caudæ et uropoda superne setis multis mediocribus vel longis ornata. Antennularum pedunculus articulis 4 basalibus

*cunctis pedunculi antennarum nonnihil brevior. Pedes trium parium anteriorum structura subsimili, articulo septimo edentulo. Segmentum ultimum caudæ apice anguste rotundato-subtruncato, spinis 6 ornato. Uropoda caudam nonnihil superantia; ramus interior ramo exteriore aliquanto longior, fere duplo longior quam latior, postice rotundatus.*

*Mas: Corpus vix duplo et tertia parte longius quam latius; segmenta tria posteriora trunci margine posteriore setoso. (Venter non inflatus.) — Long. 9,2<sup>mm</sup>.*

*Femina: Corpus plus triplo longius quam latius; segmenta quintum et sextum trunci sæpius nuda. (Venter valde inflatus.) — Long. 18<sup>mm</sup>.*

**DESCR.** Corpus maris brevius, vix duplo et tertia parte longius quam latius, speciei generis *Cirolana* habitu sat simile; segmentum quodque trunci (primo excepto) parte anteriore latiore ab annulo priore tecta, quam ob causam segmentum primum segmento quinto nonnihil longius evadit; segmenta tria posteriora trunci imprimis postice et in ipso margine posteriore longius et densius hirsuta; setæ in dorso caudæ et uropodorum longæ. — Corpus feminae et imprimis feminae majoris elongatum, plus triplo longius quam latius, specimini sanguine inflato generis *Aegæ* habitu sat simile; segmentum quodque trunci parte anteriore angusta vel angustissima a segmento priore tecta, quam ob causam segmentum primum segmento quinto plus minusve brevius evadit; segmenta quintum et sextum sæpius nuda; setæ in dorso caudæ et uropodorum breviores. Truncus plus duplo vel (in femina) fere triplo longior quam cauda.

Frons ante in processum late trigonum, brevior, inter basin antennularum inflexum, producta.

Oculi minores, nigri vel fusci, sæpius non bene circumscripti; ocelli sat numerosi, paulum convexi.

Lamina frontalis minor, pentagona.

Clypeus area magna, trigona, ad margines laterales paulum impressa, ornata.

Antennulæ pedunculo antennarum non longiores et interdum nonnihil breviores; pedunculus articulis quattuor basalibus cunctis pedunculi antennarum brevior, articulo primo nonnihil incrassato et paulo brevior quam articulo secundo sat gracili; flagellum 14—17-articulatum.

Antennæ in mare fere ad marginem posteriorem trunci, in femina magna paulum ultra medium truncum prominentes; pedunculus elongatus, articulo quarto fere duplo longiore quam articulo tertio, aliquanto brevior quam quinto; flagellum gracile, 28—34-articulatum.

Epimera in mare fere ut in *Cirolana parva* formata, quattuor posteriora nonnihil hirsuta; in femina minus hirsuta, subsimiliter constructa, habitu tamen mari valde dissimilia, parte inferiore aliquantum extrorsum a ventre inflato versata, parte basali et



superiore sub margine laterali segmenti ipsius occulta, parte anteriore non ut in mare a pari anteriore obtecta.

Pedes parium trium anteriorum structura inter se subsimiles; articuli tertius et quartus nonnihil incrassati; articuli quintus et sextus non incrassati, graciles; articulus septimus gracilior, edentulus.

Pedes quattuor parium posteriorum nonnihil compressi, sat graciles, nonnihil elongati; pedes quinti paris pedibus sexti paris paulo breviores, pedibus septimi paris paulo longiores.

Segmentum ultimum caudæ paulum convexum, circiter tertia parte latius quam longius, subtrigonum, apice anguste rotundato, fere truncato, spinis 6 ornato.

Uropoda caudam nonnihil superantia; ramus interior ramo exteriori aliquanto longior, fere oblongo-ovatus, postice æqualiter rotundatus, ibique spinis compluribus (c. 12—13) ornatus; ramus exterior angustior, apice subtruncato, margine exteriori spinis compluribus instructo. Scapus angulo interiore nonnihil ultra tertiam partem rami interioris occupante.

Color in speciminibus junioribus grisescens vel dilute fuscescente-brunneus, in speciminibus subadultis fuscus vel nigro-fuscus.

Appendix masculina ad basin rami affixa, ramum paulum superans, recta, minus angusta, apice obtuso.

Forekomst. Jeg har set 7 Exemplarer, alle fra Vestindien. Blandt disse fandtes kun 1 Han, etiketteret St. Thomas (Krebs, 1857), og baade ifølge Dyrets flade Bug og Etiketten sandsynligvis tagen frit; de øvrige 6 vare Hunner af højst forskjellig Størrelse, alle med stærkt oppustet Bug og alle ifølge Etiketterne tagne paa Fiske. Det største, 18<sup>mm</sup> lange (paa Tavlen afbildede) Exemplar har Paaskriften: «Nederst og forrest i Gjællehulen af *Pseudoscarus coeruleus* (Bl.)»; 2 mindre Exemplarer ere etiketterede: «Nederst og forrest i Gjællehulen af *Pseudoscarus superbus* Poey»; et fjerde Exemplar er mærket: «Af *Pseudoscarus psittacus* (L.); (Riise)», et femte: «I Gjællehulen af en vestindisk *Scarus*», endelig det sjette: «Af Gjællehulen af *Priacanthus macrophthalmus* C. V.; (Krøyer)».

## 2. *Alcirona insularis* n. sp.

(Tab. VIII, Fig. 2—2 n.)

### Specimina tria masculina juvenilia.

Diagn. *Corpus nonnihil plus duplo longius quam latius. Segmenta duo posteriora trunci et segmenta caudæ setis brevioribus et paucioribus instructa, interdum omnia*

*præter segmenta posteriora caudæ nuda. Antennularum pedunculus articulis 4 basalibus cunctis pedunculi antennarum fere longior. Pedes trium parium anteriorum structura valde dissimiles; pedes primi paris articulis 4 ultimis brevibus, latis, articulo septimo robuste pectinato; pedes parium duorum ceterorum postice per paria articulis 4 ultimis longioribus et aliquanto angustioribus, articulo septimo minus pectinato. Segmentum ultimum caudæ postice angustius vel (in specimine minore) latius rotundatum, 6-spinosum. Uropoda caudam nonnihil superantia; ramus interior ramo exteriori aliquanto longior, vix dimidio longior quam latior, apice bifido. — Long. 3,7—5,1<sup>mm</sup>.*

**DESCR.** *Cirolanæ parvæ* habitu sat similis.

Corpus brevius, nonnihil plus duplo longius quam latius, nonnihil convexum; truncus cauda duplo et dimidio longior.

Frons ut in specie præcedente.

Oculi nigri, paulo latiores quam in *A. Krebsii*, structura sat similes.

Lamina frontalis pentagona, paulo major quam in specie præcedente.

Antennulæ pedunculo antennarum aliquanto longiores; pedunculus articulis quattuor basalibus antennarum pedunculi cunctis longior, fere ut in specie præcedente formatus (flagellum in specimine minore, delineato 6-articulatum, articulo primo perlongo, in specimine majore 8-articulatum, articulo primo vix longiore quam secundo.

Antennæ circiter marginem posteriorem segmenti tertii vel quarti trunci attingentes; pedunculus nonnihil elongatus, articulo quarto circiter duplo longiore quam articulo tertio, nonnihil brevior quam quinto; flagellum 10—17-articulatum.

Segmenta trunci longitudine inter se minus dissimilia, duo posteriora vel nuda vel ad marginem posteriorem versus setis brevioribus compluribus ornata; segmentum primum capite aliquanto longius.

Epimera fere ut in *Cirolana parva* formata, furcis binis solitis ornata.

Pedes parium trium anteriorum mirabile constructi, inter se valde dissimiles; pedes primi paris articulis quarto et quinto latis, perbrevibus, articulo sexto brevi, lato, paulo longiore quam latiore, articulo septimo paulo brevior quam articulo sexto, in margine interiore in processibus tribus longis producto, ungue longo; pedes secundi paris articulis quarto, quinto, sexto paulo longioribus et manifesto angustioribus quam in pedibus primi paris, articulo septimo multo minore quam in pari priore, processulis tribus aliquanto minoribus ornato, ungue longo; pedes tertii paris articulis quattuor ultimis item paulo longioribus et aliquanto gracilioribus quam in pedibus secundi paris, articulo septimo processulo primo minore et processulo secundo obsoleto ornato, ungue brevior.

Pedes quattuor parium posteriorum fere ut in *Cirolana parva* formati et spinosi; pedes quinti paris pedibus sexti paris perpaulo breviores et pedibus septimi paris perpaulo longiores.

Cauda brevis, in specimine minore segmenta quintum et sextum superne setis brevioribus nonnullis ornata, in speciminibus majoribus segmenta omnia detecta, setis brevioribus, in segmento sexto sat numerosis, instructa.

Segmentum ultimum caudæ nonnihil convexum, ad latera versus paulum excavato-impressum, fere duplo latius quam longius, apice rotundato ut in specie præcedente spinoso.

Uropoda superne nuda vel setis nonnullis perminutis ornata, brevia, lata; ramus interior ramum exteriorem valde superans et segmentum sextum caudæ nonnihil superans, non dimidio longior quam latior, margine exteriore nonnihil excurvato, ad apicem versus spinoso, margine interiore valde excurvato, ad apicem versus spinis c. 4 armato, apice late emarginato, bifido; ramus exterior latior, apice bifido. Scapus fere ut in specie præcedente.

Color in specimine diu in spiritu vini asservato albidus, in dorso punctis permultis minutis nigris sparsus.

Forekomst. Samoa-Øerne, 1 Ex. (kjøbt af Mus. Godeffroy). (I Glas sammen med *Cirolana parva*, se ovenfor Side 341.) (Dernæst fandtes i Materialet fra Museet i Moskou 2 lidt større Exemplarer, ligeledes fra Samoa, og, som Etiketterne tydede paa, vistnok ligeledes hidrørende fra Mus. Godeff.)

Da jeg udfærdigede Tegninger og Beskrivelse af denne Art, besad jeg kun det mindste, 3,7<sup>mm</sup>. lange Exemplar. Ved den senere Undersøgelse af de 2 lidt større Ex. fra Moskou blev jeg i Stand til at komplettere Beskrivelsen, thi det viste sig, at disse Stykker havde flere Led i Antennesvøben (det ene ogsaa i Antennulsvøben), at Telson i sit Omrids stod midt mellem den Form, mine Figurer vise af denne Arts lille Ex. og af forrige Art, samt at der fandtes flere Børster paa Telsons Overside og tillige paa de øvrige frie Haleled samt adskillige Børster paa de 2 bageste Kropled. Efter mit Kjendskab til forrige Arts Variation nærer jeg imidlertid ikke den ringeste Tvivl om, at alle 3 Exempl. tilhøre samme Art.

## 2. *Lanocira* n. gen.

Antennarum pedunculus mediocris, non elongatus.

Partes oris vid. p. 313.

Pedes parium trium anteriorum articulo quinto simplici, non in latere interiore producto.

Pedes parium quattuor posteriorum simplices, articulo sexto non dilatato graciliore quam articulis prioribus.

(Pars posterior corporis nuda.

Pleopoda et uropoda fere ut in genere *Cirolanæ*.)

Species singula a me visa est.

1. **Lanocira Krøyeri** n. sp.

(Tab. VIII, Fig. 3—31.)

**Femina non ovigera, verosimiliter juvenilis.**

**Diagn.** *Corpus breve, circiter duplo longius quam latius. Oculi magni, dimidiam superficiem capitis occupantes. Antennulæ pedunculo antennarum paulo longiores, pedunculo brevior. Antennarum pedunculus longitudine mediocri, articulo quarto manifeste longiore quam articulo quinto. Segmentum ultimum caudæ breve, postice rotundatum, 4-spinosum. Uropoda caudam paulum superantia, lata; ramus uterque apice rotundato; ramus interior ramum exteriorem longe superans, circiter tertia parte longior quam latior. — Long. 4,1<sup>mm</sup>.*

**Descr.** Corpus breve, perpaulum vel vix plus duplo longius quam latius, aliquantum convexum; truncus cauda circiter duplo longior.

Frons ante obscure bisinuata, in processum medium brevem producta.

Oculi nigri, magni, dimidiam superficiem capitis occupantes; ocelli sat numerosi, nonnihil convexi.

Lamina frontalis minor, pentagona, postice valde angustata.

Antennulæ mediocres, pedunculo antennarum paulo longiores; pedunculus flagello brevior, articulo primo nonnihil longiore quam articulo secundo; flagellum c. 8-articulatum.

Antennæ breves, circiter marginem posteriorem segmenti secundi trunci attingentes; pedunculus articulo quarto duplo longiore quam articulo tertio, nonnihil longiore quam articulo quinto; flagellum pedunculo paulo longius, c. 10-articulatum.

Segmenta trunci longitudine sat inæqualia; segmentum primum capite perpaulo brevius, segmento quinto aliquanto longius.

Epimera trunci fere ut in genere præcedente formata, furcis binis solitis tamen ex parte in specimine paulum conspicuis.

Pedes trium parium anteriorum inter se subsimiles, articulo quarto nonnihil dilatato, articulo sexto latitudine media, nonnihil longiore quam articulo septimo, ungue longo vix brevior quam articulo septimo.

Pedes parium quattuor posteriorum simplices, mediocres, ut in Cirolanis sectionis secundæ constructi; pedes quinti paris pedibus sexti paris nonnihil breviores et pedibus septimi paris paulo breviores.

Cauda brevis (segmentis duobus anterioribus in specimine obtectis).

Segmentum ultimum caudæ paulum convexum, ad latera versus ante profunde excavato-impressum, breve, tamen non duplo latius quam longius, postice rotundatum, apice 4-spinoso, margine posteriore solum per partem minorem ciliato.

Uropoda segmentum ultimum caudæ paulum superantia, lata; ramus uterque postice rotundatus, ciliis mediocribus vel longis instructus; ramus interior ramum exteriorem longe superans, circiter tertia parte longior quam latior, margine exteriori paulum excurvato, margine interiore valde excurvato, ad apicem versus spinis nonnullis instructo. Scapus fere ut in *Alcirona Krebsii*.

Color in specimine vetere dilute brunnescens, punctis nonnullis nigris rarius sparsis ornatus.

Forekomst. Rio de Janeiro, 1 Ex. (Krøyer, <sup>11</sup>/<sub>40</sub>).

### 3. *Tachæa* Sch. et Mein. (1879).

Antennarum pedunculus sat elongatus.

Partes oris vid. p. 314.

Pedes parium trium anteriorum articulo quarto brevi, lato, articulo quinto perlato, in latere interiore in laciniam producto, articulo sexto valde dilatato, articulo septimo elongato, aliquanto longiore quam ungue mediocri.

Pedes parium quattuor posteriorum articulo sexto valde dilatato, longiore quam articulo quinto vel articulo quarto, articulo septimo nonnihil elongato, aliquanto longiore quam ungue mediocri; pedes sexti et septimi parium articulo sexto non angustiore quam articulo tertio vel quarto.

(Pars posterior corporis nuda.

Pleopoda parium anteriorum ramo interiore nonnihil brevior et aliquanto angustiore quam ramo exteriori magno, margine fere nudo, ramo exteriori ramum interiorem omnino tegente, margine bene ciliato.

Uropoda ramo interiore oblongo trigono, scapo postice in processum longum, angustum producto.)

**Conspectus specierum.**

1. Antennularum pedunculus ad apicem articuli tertii pedunculi antennarum productus, articulo primo per dilatato, articulum secundum longitudine æquante. Pedes parium trium anteriorum articulo sexto in latere interiore valde dilatato.

1. *T. crassipes* Sch. & Mein.

1. Antennularum pedunculus non ad apicem articuli tertii pedunculi antennarum productus, articulo primo minus dilatato, articulum secundum longitudine superante. Pedes parium trium anteriorum articulo sexto in latere interiore minus dilatato.

2. *T. incerta* n. sp.

1. **Tachæa crassipes** Sch. & Mein.

(Tab. VIII, Fig. 4—4 a; Tab. IX, Fig. 1—1 i.)

*Tachæa crassipes* Schiødte & Meinert, De Cirolan. Ægas simul., l. c. p. 285, Tab. IV, Fig. 2—7 [1879].

**Specimina juniora verosim. feminea.**

**Diagn.** *Corpus vix duplo et dimidio longius quam latius; truncus perpaulo vel vix longior quam cauda. Antennularum pedunculus apicem articuli tertii pedunculi antennarum attingens, articulo primo per dilatato perpaulo longiore quam latiore, superne in transversum profunde excavato, articulum secundum longitudine æquante. Segmentum ultimum trunci margine posteriore valde ante arcuato. Pedes parium trium anteriorum articulo sexto in latere interiore valde dilatato. Segmentum ultimum caudæ magnum, breviter lingulatum, postice subtruncatum, spinis 6 instructum. Uropoda caudam paulum superantia, ramo interiore ramum externum nonnihil superante. — Long. 5<sup>mm</sup>.*

**Descr.** Corpus vix duplo et dimidio longius quam latius, minus convexum; truncus cauda perpaulo vel vix longior et paulo latior.

Frons ante paulum bisinuata, processu medio brevi.

Oculi parvi, nigri; ocelli parvi, paulum convexi.

Lamina frontalis sat parva, multo longior quam latior, ante libera, rotundata.

Antennulæ paulum ultra apicem articuli quarti pedunculi antennarum prominentes; pedunculus in diagnosi commemoratus; flagellum pedunculo nonnihil brevius, ubique crassitudine fere æquali, c. 7-articulatum, articulis 2 ultimis brevissimis.

Antennæ circiter marginem posteriorem segmenti quarti trunci attingentes, crassæ; pedunculus flagello paulo longior, elongatus, articulo quarto non duplo longiore quam

articulo tertio, perpaulo vel vix breviora quam articulo quinto; flagellum c. 13-articulatum, ad basin sat crassum, ad apicem versus sensim tenuius.

Segmenta trunci longitudine aliquantum inæqualia, a segmento secundo postice sensim breviora; segmentum primum capite paulo brevius et segmento quinto circiter duplo longius; segmentum septimum imprimis ad medium versus ante arcuatum.

Epimera breviora, lata, postice per paria latiora, furcis binis solitis instructa.

Pedes trium parium anteriorum breves, robusti, supra præterea commemorati. Articulus sextus in latere interiore valde dilatatus.

Pedes parium quattuor posteriorum postice per paria longitudine crescentes, in diagnosi generis descripti.

Segmenta quattuor anteriora caudæ postice latitudine valde crescentia; segmentum primum et partes laterales segmenti secundi a segmento ultimo trunci tecta.

Pleopoda in diagnosi generis commemorata.

Segmentum ultimum caudæ magnum, nonnihil convexum, nonnihil latius quam longius, lingulatum, postice subtruncatum, margine posteriore ciliis brevioribus et ad medium versus spinis 6 armato.

Uropoda caudam paulum superantia; ramus uterque setis nonnullis apicalibus longioribus et ciliis marginalibus brevioribus et spinis nonnullis instructus; ramus interior ramum exteriorem nonnihil superans, oblonge triangulus, duplo longior quam latior; scapus angulo interiore in processum longum, per longitudinem majorem angustum, fere  $\frac{2}{3}$  marginis interioris rami interioris occupantem, producto.

Color brunnescens, dorso corporis et antennulis et antennis maculis numerosis nigris valde ramosis, dense sitis ornatis.

Forekomst. Jeg har undersøgt 3 af Schiødte & Meinerts 8 Exemplarer, der ere tagne paa Koralklipper ved Singapore af E. v. Martens; de øvrige 5 Original-Exemplarer opbevares i Berlins Museum.

Naar Schiødte & Meinert l. c. p. 285 angive, at de have beskrevet Hanner og at (p. 286) deres 8 Exemplarer vare Hanner, saa maa denne Angivelse vist kun være en Slutning, baseret paa, at Antennulernes første Led er stærkt udvidet ligesom hos Former, de indenfor Slægten *Corallana* have angivet at være Hanner af Arter, hvis Hanner ikke havde nogen saadan Udvidelse af Antennulernes Grundled. Paa de af mig undersøgte Stykker har jeg imidlertid ikke kunnet finde nogen fri *Appendix masculina*, og jeg antager derfor, at Dyrene ere ikke voxne Hanner, thi hvis de skulde være Hanner maatte de være særdeles unge, saa at App. masculina endnu ikke kunde eftervises, og deres hele Bygning forekommer mig ikke at tyde paa, at de ere saa unge.

2. *Tachæa incerta* n. sp.

(Tab. IX, Fig. 2—2 b.)

**Specimen singulum aliquantum mutilatum, veros. femineum.**

**Diagn.** *Speciei præcedenti valde affinis, imprimis differt characteribus sequentibus. Truncus cauda aliquanto (haud dimidio) longior. Antennularum pedunculus circiter ad medium articulum tertium pedunculi antennarum prominens, articulo primo nonnihil minus dilatato quam in specie præcedente, manifesto longiore quam latiore, articulum secundum longitudine superante. Segmentum ultimum trunci margine posteriore minus ante arcuato. Pedes parium trium anteriorum articulo sexto nonnihil longiore et in latere interiore minus dilatato quam in specie præcedente. Uropoda ramo interiore non duplo longiore quam latiore, ramum exteriorem paulum superante. — Long. 7<sup>mm</sup>.*

**Forekomst.** Jeg har kun set 1 meget gammelt, defekt Exemplar uden Lokalitet.

Det beskrevne Exemplar er lyst brunligt uden sorte Pletter, men om dette hidrører fra dets slette Konervations-Tilstand tør jeg ikke have nogen Mening om. Baade Antennuler, Antenner og mange af Benene vare defekte, men jeg tror, at min Fremstilling alligevel vil være tilstrækkelig til at kunne gjenkjende denne Form.

1. Arter, som med større eller mindre Sandsynlighed kunne henføres til denne Familie.

1. *Æga multidigita* Dana, op. cit. n° 2, Vol. II, p. 768, Pl. 51, Fig. 3 a—f. Denne Form, der er opstillet paa et 3 Lin. langt Exemplar fra Balabac-Strædet, Nord for Borneo, afviger ifølge Danas Fremstilling væsentligst fra min *Alcirona insularis* ved de bageste Kropringes og ved Halens stærkere Behaaring samt ved Formen af sidste Haleled.

Senere har Miers, op. cit. n° 3, p. 511—12, Pl. XXIV, Fig. 6—11, fremstillet et Dyr, som han mener skal være identisk med Dana's Art, men som han foretrækker at kalde *Cirolana multidigitata*. Han henfører den af White i op. cit. n° 1, p. 107 navngivne men ikke beskrevne «*Æga hirta* n. sp.» fra Swan River (Ny Holland) som synonym. Den af Miers beskrevne Art bliver omtr. 1 Tomme lang og toges i *Meyerina claviformis* Gray fra Zebu (Philippinerne). Jeg tvivler imidlertid om, at Dana's og Miers's Arter ere identiske, men Miers's Fremstilling er desværre endnu maadeligere end Dana's. Et interessant Forhold er, at Dyret lever baade som temmelig ung og som voksen (æggebær. Hun) i og laver



Gange i den nævnte Svamps Indre ved at gjennembyrde Vævene; hvad der ogsaa har Interesse er, at Hovedet fortil i Midtlinien gaar ud i en noget fremad og opad bøjet Tap, og at denne Tap skal være adskilligt længere og mere opadbøjet hos Hannen end hos Hunnen. — Miers angiver atter i op. cit. n<sup>o</sup> 7, p. 301 at have faaet et Exemplar, taget ved Albany Island og lidt afvigende i Uropodernes Form. Efter denne Angivelse antager jeg, at dette Exemplar maa tilhøre en anden Art.

2. *Æga efferata* Dana, op. cit. n<sup>o</sup> 2, p. 766, Pl. 51, Fig. 1 a—e. Et 3 Lin. langt Exemplar blev taget ved Rio de Janeiro «from a Serranus?». Ifølge Bygningen af de 3 forreste Ben er det ikke nogen *Æga*, men maa høre til en af de her behandlede Grupper, og jeg antager, at den er beslægtet med *Lanocira*.

### 2. Tvivlsomme Arter.

1. *Cirilana rugicauda* Heller, der særlig er omtalt ovenfor paa Side 358, tilhører maaske denne Familie, men Henførelsen er dog meget usikker, væsentlig baseret paa sidste Haleleds Beklædning og især paa Beskrivelsen af de forreste Bens «Kløer».
2. *Æga novi-zealandiæ* Dana, op. cit. n<sup>o</sup> 2, p. 767, Pl. 51, Fig. 2 a—c. Et 3 Lin. langt Exemplar blev tagen ved New Zealand og «came up on bait while fishing». Det er sikkerlig ingen *Ægide*, og den hører maaske til denne Familie, men Dana's Fremstilling er dog alt for mangelfuld til at drage nogenlunde sikre Slutninger af.
3. *Æga macronema* Bleeker, der er nærmere omtalt ovenfor paa Side 389, er ret sandsynlig, som Miers tyder den, en *Corallana*, muligvis dog en *Alcironide*.

### 3. Tvivlsom Slægt og Art.

*Corilana erythræa* Kossmann, op. cit. p. 115, Taf. IX, Fig. 5—12. Denne ny Slægt og Art er opstillet paa et 3<sup>mm</sup> langt Exemplar fra det Røde Hav. Det interessanteste for Slægten er: «Der erste Pereiopode sehr verkürzt, mit einer Klaue versehen, welche an Länge der Gliedmasse selbst gleichkommt». Dernæst: «Von den Antennen ist die vordere zehngliedrig, wesentlich schlanker als die hintere, sechsgliedrige», men de rigtignok ikke gode Afbildninger vise, at det, Forf. har antaget for bageste Par Antenner, er (blandt andet paa Grund af Lugteborsterne) Antennuler, og omvendt. Af Munddelene fremstilles Kindbakkerne paa en vistnok forkert og i hvert Tilfælde for mig aldeles uforstaaelig Maade; Kjæbefødderne skulle efter Beskrivelsen meget ligne dem hos *Cir. borealis*. Forf. gjør rigtignok Undskyldning for sin «fragmentariske Fremstilling» af Munddelene, men saa daarlig som den

er, forekommer den mig ikke at kunne undskyldes helt. Ifølge Beskrivelsen af Kjøbefødderne og de rigtignok uforstaaelige Kindbakker er der nogen Mulighed for, at Slægten bør stilles ind i eller nær ved denne Familie.

---

Fam. IV. **Barybrotidæ.**

Partes oris vid. p. 290—294 et p. 314—315.

Pedes trium parium anteriorum articulo septimo et ungue coalitis, uncum magnum, percurvatum, acutum formantibus; unguis articulo septimo fere longior.

Pedes parium quattuor posteriorum unguibus gracilibus, aliquanto brevioribus quam articulo septimo.

Genus singulum ad hanc familiam referendum est.

1. **Barybrotos** Sch. & Mein. (1879).

Corpus elongatum, glabrum, nitidum; truncus cauda nonnihil longior.

Antennulæ breves, pedunculo 3-articulato.

Antennæ pedunculo 5-articulato.

(Truncus segmento septimo ex parte majore obtecto.)

Pedes trium parium anteriorum sat robusti, spinis nonnullis ex parte longis et setis sat multis ornati.

Pedes parium quattuor posteriorum mirabile constructi, gressorii et natatorii, articulo secundo elongato et dilatato.

Segmenta anteriora caudæ flexuosa; segmentum quintum angulis lateralibus ab angulis segmenti quarti tectis.

Pleopoda bene evoluta, scapo brevi, ramis latis, brevioribus, marginibus posterioribus breviter setosis.

Uropoda angusta, ciliis natatoriis instructa.

Differentia sexualis fere nulla.

Species singula mihi cognita ad hoc genus referenda est.

1. **Barybrotus agilis** Sch. & Mein.

(Tab. IX, Fig. 3—3 s.)

*Barybrotus agilis* Schiødte & Meinert, De Cirol. Ægas simul., l. c. p. 283, Tab. III, Fig. 11—13 [1879].

— *Indus* Schiødte & Meinert, De Cirol. Ægas simul., p. 281, Tab. III, Fig. 1—10, Tab. IV, Fig. 1.

**Mas (?adultus) et femina non ovigera.**

**Diagn.** *Oculi magni. Epimera segmenti quarti epimeris ceteris majora; epimera segmentorum quarti et quinti furca arcuata, interrupta, brevior, prope marginem exteriorem sita; epimera segmentorum sexti et septimi æquata, angulo posteriore producta, acuto. Pedes quarti et quinti parium articulo quarto perdilatato et valde spinoso; pedes septimi paris articulo secundo ciliis natatoriis plumosis, ex parte longis, in series tres dense instructis. Segmentum ultimum caudæ uropoda superans, ad apicem versus aliquantum angustatum, apice subtruncato spinulis 6 armato. Uropoda ramis fere æquilatis; ramus interior truncatus, ramus exterior ramum interiorem paulum superans, apice producto, acuto. — Long. feminae non ovigeræ 22<sup>mm.</sup>; long. maris 14,7<sup>mm.</sup>*

**Descr.** Corpus vix triplo et dimidio longius quam latius, aliquantum convexum.

Frons ante bisinuata, in processum mediocrem, trigonum producta.

Oculi magni, septima parte latitudinis capitis distantes, levissime granulati, ocellis sat magnis; oculus uterque stria marginali elevata in partes duas divisus.

Lamina frontalis in partem basalem magnam et partem apicalem minorem divisa. Pars basalis ex parte a clypeo et palpis mandibularum oblecta; pars apicalis producta, ex parte majore inter antennulas sita, elongata, sat angusta, ante nonnihil incrassato-dilatata, apice subobtusum.

Antennulæ breves, circiter apicem articuli quarti pedunculi antennarum attingentes; pedunculus flagello perpaulo brevior, sat crassus, articulo secundo perbrevis, articulo tertio vix brevior quam articulis basalibus cunctis; flagellum 7-articulatum, articulis basalibus crassis, longioribus quam articulis ultimis.

Antennæ circiter marginem posteriorem segmenti quinti trunci vel apicem trunci attingentes; pedunculus nonnihil elongatus, articulo quarto brevior quam articulo tertio, articulo quinto nonnihil longior quam articulis tertio et quarto junctis; flagellum gracile, c. 33-articulatum (♂) vel c. 41-articulatum (♀ maxim.).

Segmenta trunci longitudine valde inæqualia; segmentum primum capite vix brevius et segmento quarto sat brevius et segmento quinto longitudine subæquale; segmentum septimum fere toto oblectum.

Epimera angustiora, forma aliquantum inæqualia; epimera segmentorum secundi et tertii furcis binis solitis sat evolutis; epimera cetera in diagnosi commemorata.

Pedes parium trium anteriorum sat robusti, setis compluribus instructi; articulus secundus brevior, sat incrassatus; articulus tertius nonnihil longior quam latior, in latere exteriori sat dilatatus; articulus quartus sat brevis, processu exteriori ad apicem articuli quinti prominente; articulus sextus paulum elongatus et nonnihil dilatatus; articulus septimus et unguis supra commemorati.

Pedes parium quattuor posteriorum inter se valde dissimiles. — Pedes quinti paris pedibus septimi paris perpaulo breviores; articulus secundus elongatus, incrassatus, plus duplo longior quam latior, setis nonnullis longioribus simplicibus in series tres dispositis instructus; articulus tertius nonnihil dilatatus, elongatus, vix duplo longior quam latior, sat setosus; articulus quartus brevis, parte interiori per dilatata et spinis et setis multis marginalibus perlongis et in latere deorsum vergente spinis multis brevibus instructa; articulus quintus nonnihil incrassatus, aliquantum spinosus; articulus sextus gracilis, articulo quinto paulo longior. — Pedes quarti paris pedibus quinti paris nonnihil breviores et robustiores, articulo secundo plus incrassato, articulo quarto plus dilatato, articulis quinto et sexto aliquanto brevioribus. — Pedes septimi paris structura peculiari; articulus secundus aliquantum elongatus et dilatatus, plus duplo et dimidio longior quam latior, valde complanatus, setis plumosis natatoriis in series tres dense dispositis, in margine exteriori longis, in margine apicali perlongis, instructus; articuli tertius, quartus, quintus sat graciles, articulus sextus gracilis, omnes spinis mediocribus vel parvis et setis sat multis simplicibus instructi.

Segmenta quattuor anteriora caudæ postice angustiora, valde ante arcuata et priora præterea in media nonnihil recurvata.

Segmentum sextum nonnihil convexum, ad basin versus in transversum nonnihil impressum, elongatum, æque longum ac latum, uropoda nonnihil superans, trigonum, apice subtruncato, sat brevi, spinulis 6 et ciliis natatoriis nonnullis instructo.

Uropoda angusta, ramis fere æquilatis; ramus interior apice in obliquum truncato, ibique et in partibus affinis marginum interioris et exterioris spinulis et spinis ex parte curvatis armatus, solum in marginibus interiori et apicali ciliis natatoriis instructus; ramus exterior ramum interiori paulum superans, apice producto, acuto, margine exteriori brevius ciliato et per dimidiam longitudinem spinigero, margine interiori longius ciliato et spinula una subapicali instructo. Scapus angulo interiori in processum brevioris, non tertiam partem marginis interioris occupantem producto.

Color in speciminibus in spiritu vini asservatis albescens.

Appendix masculina forsitan non ad finem perducta, simplex, ubique latitudine fere æqualis, non ad apicem rami interioris prominens.

Forekomst. \*  $6^{\circ} 22' N. B.$ ,  $95^{\circ} 54' \text{Ø. L.}$ , 1 Ex. (Reinhardt, Galathea-Exped.); \*\*  $3^{\circ} 25' S. B.$ ,  $106^{\circ} 50' \text{Ø. L.}$ , «Java-Søen, fra Overfladen», 1 Ex. (Andréa, 1869); \*\*  $2^{\circ} 40' S. B.$ ,  $107^{\circ} \text{Ø. L.}$ , «Gaspar-Strædet», 1 Ex. (Andréa, 1869);  $0^{\circ} 40' S. B.$ ,  $107^{\circ} 10' \text{Ø. L.}$ , «Kina-Søen», 1 Ex. (Andréa, 1869);  $2^{\circ} 34' N. B.$ ,  $109^{\circ} 47' \text{Ø. L.}$ , 1 Ex. (Hartmann; Stykket er taget  $19/4$  81, afgivet 1882).

Denne mærkelige Isopod er kun tagen pelagisk.

Jeg har nøje undersøgt Schiødte & Meinerts eneste Original-Exemplar af *Bar. Indus* (mærket \*) og deres 2 Original-Exemplarer af *Bar. agilis* (mærket \*\*) samt desuden 2 Exemplarer til (af hvilke det, der er taget af Hartmann, er det største og smukkeste af dem alle og lagt til Grund for mine Afbildninger), men det har været mig umuligt at finde en eneste Karakter af nogen Værdi til at adskille de 2 Arter fra hinanden, og de af Forff. angivne Mærker ere ikke korrekte. Jeg har da maattet henføre alle Exemplarerne til 1 Art og har valgt at beholde Navnet «*agilis*» som det mest betegnende for Arten.

I Schiødte & Meinerts Fremstilling staar p. 281: «Mas a femina differt . . . . remo interiore paris secundi, tertii, quarti pedum caudalium in latere interiore appendice stili-formi instructo». Dette er urigtigt; thi hverken her eller hos nogen anden Isopod træffer man et *Appendix masculina* paa tredje og fjerde Par Halefødder, og ligesom hos de øvrige her behandlede Dyr findes et saadant kun paa 2det Par Haleben.

---

### Fam. V. *Ægidæ*.

Partes oris vid. p. 294—302 et p. 315.

Pedes parium trium anteriorum articulo septimo et ungue coalitis uncum magnum, aliquantum vel valde curvatum, articulo sexto haud breviorum formantibus.

Pedes parium quattuor posteriorum graciliores, articulo septimo et ungue simul sumptis aliquanto brevioribus quam articulo sexto, nonnihil curvatis, uncum haud formantibus.

Animalia hujus familiæ præterea a speciminibus adolescentibus vel adultis familiæ sequentis characteribus compluribus differunt.

Antennulæ pedunculo 3-articulato, a flagello bene definito.

Antennæ pedunculo 5-articulato, a flagello graciliore bene definito.

Pleopoda parium anteriorum ramo utroque marginibus ciliatis.

Segmentum ultimum caudæ et uropoda ciliis natatoriis instructa.  
Animalia non hermaphrodita.

Denne Familie er jo behandlet monografisk af Schiødte & Meinert op. cit. n° 3, B. XII. Jeg skal derfor kun fremsætte nogle faa Bemærkninger.

Det forekommer mig, at Familien naturlig falder i 2 Grupper efter Bygningen af Munddelene, særlig af Kjæbefødderne, saaledes som jeg har udviklet det ovenfor paa Side 294—302 og resumeret det paa Side 316. Den ene Gruppe dannes af Slægten *Æga*, den anden af *Rocinela*, *Alitropus* og den af Harger opstillede *Syscenus*; disse 2 Grupper adskilles foruden ved Munddelene ogsaa ved flere andre mindre Forhold, der, naar man ser bort fra *Syscenus*, ogsaa kunne udledes af Sch. & Mein. Fremstilling l. c. p. 404. *Rocinela* og *Alitropus* forekomme mig at være meget nærstaaende, hvorimod *Syscenus* efter Hargers Fremstilling synes at være en ret karakteristisk Slægt.

Af min ovenstaaende Fremstilling af *Cirolanidæ*, *Corallanidæ* og *Alcironidæ* ser man, at ikke faa Forfattere (Stimpson, Dana, Bleeker, Heller og Fl.) have beskrevet Arter, som de med Urette henførte til Slægten *Æga* og som bør fordeles i mine ovennævnte Familier. Med Undtagelse af en enkelt Form («*Æga basalis*» Heller) nævnes ikke en eneste af disse Arter i de Schiødte-Meinertske Afhandlinger, og forskjellige Forfattere (som f. Ex. Stimpson, v. Martens, Lockington) have beskrevet adskillige *Æga*-Arter, som heller ikke nævnes i de anførte Arbejder, skjøndt i det mindste nogle ere *Ægider*. De to Forfattere have ved *Ægidæ* kun nævnt de Arter, de have beskrevet, men da der fandtes saa mange beskrevne, til *Æga* ofte med Urette henførte Arter, forekommer det mig at være et Savn, at de ikke have nævnt og søgt at klare alle i Literaturen beskrevne *Æga*-Arter, thi det kjæmpemæssige, fra saa mange Museer laante Materiale tilbød en Lejlighed hertil, som ikke let kommer igjen. Jeg har nu, som det vil ses af det foregaaende, søgt at udskille adskillige urigtigt henførte Arter fra Slægten *Æga*, men jeg tør ikke stole paa, at jeg, væsentlig kun støttende mig paa Literaturen, har faaet alt det forkerte rensat ud.

#### Fam. VI. *Cymothoidæ*.

Partes oris vid. p. 302—310 et p. 316.

Pedes parium trium anteriorum articulo septimo et ungue ut in *Ægidis*.

Pedes quarti et quinti et sexti (et sæpius etiam septimi) parium robustiores, articulo septimo et ungue coalitis unicum valde curvatum, non breviorum quam articulum sextum formantibus.

Animalia adolescentia vel adulta hujus familiae ab *Ægidis* præterea characteribus sequentibus differunt.

Antennulae et antennae pedunculo sæpissime vix vel non a flagello definito.

Pleopoda omnia ramis nudis.

Segmentum ultimum caudæ margine nudo.

Uropoda margine ramorum saltem in feminis nudo.

Animalia hermaphrodita.

Denne ypperligt afgrændsede Familie er af Schiødte og Meinert (op. cit. n<sup>o</sup> 3, B. XIII og XIV) delt i 3 Familier: *Anilocridæ*, *Saophridæ* og *Cymothoidæ*, og den sidste atter i 3 Tribus. Naar hver af disse Familier af Forff. stilles som æquivalent med *Ægidæ*, saa kan jeg ikke slutte mig hertil. De 3 Familier ere nemlig alt andet end skarpt adskilte fra hverandre, ja efter min Undersøgelse af Mundbygningen m. m. er jeg mere tilbøjelig til at stille Slægten *Nerocila* af den første Familie i Nærheden af *Livoneca* af den sidste Familie, og denne sidste Slægt forekommer mig i det Hele at være langt mere beslægtet med *Nerocila* end med *Ceratothoa* og *Cymothoa*. Forfatterens Fremstilling af Familiernes distinktive Karakterer forekommer mig ogsaa at lade En i Stikken. Det er sikkert nødvendigt at forene de 3 Familier i 1: *Cymothoidæ*, som saa kan stilles æquivalent med *Ægidæ* og andre af de øvrige her nævnte Familier. (I «Krebsdyrenes Sugemund» har Schiødte ogsaa stillet *Æga* og *Cymothoa* (denne med *Anilocra*, *Cymothoa*, *Artystone*) som 2 Typer, der tilsammen med Bopyrerne skulde danne Familien *Cymothoidæ*.) Dernæst forekommer det mig, at der ved Opstillingen og Ordningen af Slægter og Slægtsgrupper bør tages særligt Hensyn til Mundens Bygning hos de Voxne (se ovenfor om Mundens Forandringer hos *Ceratothoa*) og til Ungerne. At fremstille i det specielle en ny Gruppering vilde imidlertid kræve Studier, der vilde føre langt ud over Planen for denne Afhandling, og jeg vilde vel heller ikke godt kunne gennemføre den, da vort zool. Museum mangler adskillige af de vigtigere Slægter; jeg har her blot villet fremsætte de mere almindelige Resultater, som særlig mit Studium af Munddelene har givet.

## Explicatio figurarum.

### Tab. I.

Fig. 1. *Cirolana borealis* Lilljeb., mas adultus, punctura minuta corporis omissa ( $\frac{2}{1}$ ).

- 1 a. Mas, a latere dextro exhibitus.
- 1 b. Caput maris, supinum, setis maxillipedum omissis ( $\frac{5}{1}$ ); *a.* lamina frontalis, *b.* clypeus, *c.* labrum, *d.* mandibula, *e.* maxilla primi paris, *f.* maxilla secundi paris, *g.* maxillipes, *g*<sup>1</sup>. epipodium maxillipedis, *o.* oculus, *p.* antennula, *q.* antennæ pedunculus, *r.* angulus lateralis segmenti primi trunci.
- 1 c. Mandibula sinistra maris, supina ( $\frac{1.0}{1}$ ); *a.* acies, *b.* lacinia mobilis, *c.* pars molaris, *d.* condylus articularius anterior, *d*<sup>1</sup>. condylus auxiliarius, *e.* condylus articularius posterior, *f.* tendo musculi adductoris mandibulæ.
- 1 d. Lacinia mobilis mandibulæ sinistræ, prona ( $\frac{2.2}{1}$ ); *a.* pars cornea major, *b.* pars cornea minor, *c.* cutis mollis.
- 1 e. Pars distalis «partis molaris», supina ( $\frac{6.5}{1}$ ).
- 1 f. Mandibula dextra maris, a latere superiore exhibitæ ( $\frac{1.0}{1}$ ); *b.* lacinia mobilis, *c.* pars molaris, *d.* condylus articularius anterior, *e.* condylus articularius posterior.
- 1 g. Maxilla sinistra primi paris in mare, supina ( $\frac{1.0}{1}$ ); *1.* articulus primus, *l*<sup>1</sup>. lacinia articul. primi, *2.* articulus secundus, *3.* articulus tertius.
- 1 h. Maxilla sinistra secundi paris in mare, supina ( $\frac{1.0}{1}$ ); *1.* articulus primus, *2.* articulus secundus, *l*<sup>2</sup>. lacinia artic. secundi, *3.* articulus tertius, *l*<sup>3</sup>. lacinia artic. tertii in ramos duos divisa.
- 1 i. Maxillipes sinister in mare, supinus ( $\frac{1.0}{1}$ ); *1.* articulus primus, *ep.* epipodium, *l*<sup>2</sup>. lacinia artic. secundi, *u.* unci lacinia artic. secundi, *p.* «palpus».
- 1 k. Pars basalis maxillipedis sinistri, a latere interiore exhibitæ ( $\frac{1.3}{1}$ ); *1.* articulus primus, *l*<sup>2</sup>. lacinia artic. secundi, *3.* articulus tertius.
- 1 l. Maxillipes sinister feminae ovigeræ, supinus ( $\frac{9}{1}$ ); *1.* articulus primus, *a.* lamina vibrans artic. primi, *ep.* epipodium cum lamina vibrante, *2.* articulus secundus, *b.* lamina vibrans artic. secundi, *l*<sup>2</sup>. lacinia artic. secundi. — Setæ articulorum trium ultimarum palpi omissæ.
- 1 m. Articuli tres basales maxillipedis sinistri in femina ovigera, ciliis omissis, proni ( $\frac{9}{1}$ ); significatio literarum ut in figura præcedente.
- 1 n. Pars media capitis, supina, mandibula dextra, maxillis, maxillipedibus omissis (c.  $\frac{1.0}{1}$ ); *a.* mandibula sinistra, paulum extrorsum flexa, *a*<sup>1</sup>. lacinia mobilis mandibulæ, *a*<sup>2</sup>. pars molaris mandibulæ, *b.* acetabulum maxillæ primi paris, *c.* acetabulum maxillæ secundi paris, *d.* acetabulum maxillipedis, *f.* paragnatha («hypopharynx»), *g.* apertura pharyngis.
- 1 o. Pars distalis antennulæ in mare, a latere infero-posteriore exhibitæ ( $\frac{2.3}{1}$ ). Setæ sensiles omnes delineatæ sunt.
- 1 p. Antennula speciminis valde juvenilis ( $\frac{3.2}{1}$ ).



- Fig. 1 q. Pes sinister secundi paris in mare, supinus, articulo primo (= epimero) omisso ( $\frac{6}{7}$ ).  
 — 1 r. Pes sinister quinti paris in mare, supinus, articulo primo omisso ( $\frac{6}{7}$ ).  
 — 1 s. Pes sinister septimi paris in mare, supinus, articulo primo omisso ( $\frac{6}{7}$ ).  
 — 1 t. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{11}{2}$ ); *u.* unci, *a.* appendix masculina.  
 — 1 u. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare valde juvenili (long. 11<sup>mm.</sup>), supinum ( $\frac{7}{7}$ ).  
 — 1 v. Pars posterior caudæ in mare, prona ( $\frac{3}{2}$ ).
- Fig. 2. *Cirolana hirtipes* H. Milne-Edw., mas verosimiliter adultus ( $\frac{7}{7}$ ).  
 — 2 a. Mas, a latere dextro exhibitus.  
 — 2 b. Pars anterior capitis, supina ( $\frac{13}{3}$ ).  
 — 2 c. Pes sinister secundi paris in mare, supinus ( $\frac{6}{7}$ ).  
 — 2 d. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{6}{7}$ ).  
 — 2 e. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{6}{7}$ ).  
 — 2 f. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare verosimiliter adulto, supinum ( $\frac{6}{7}$ ).  
 — 2 g. Pars posterior caudæ in mare, ramis ciliarum omissis, prona ( $\frac{7}{7}$ ).
- Fig. 3. *Cirolana neglecta* n. sp., femina subadulta, non ovigera, a latere dextro exhibita, punctis omnibus omissis (paulo plus quam  $\frac{3}{4}$ ).  
 — 3 a. Pars posterior caudæ in femina, prona ( $\frac{17}{2}$ ).

## Tab. II.

- Fig. 1. *Cirolana neglecta* n. sp., pes sinister secundi paris in femina, supinus ( $\frac{9}{7}$ ).  
 — 1 a. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{9}{7}$ ).  
 — 1 b. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{9}{7}$ ).
- Fig. 2. *Cirolana gracilis* n. sp., mas adultus, punctura ex parte majore omissa ( $\frac{9}{2}$ ).  
 — 2 a. Mas, a latere dextro exhibitus.  
 — 2 b. Pars anterior capitis in mare, supina ( $\frac{14}{1}$ ).  
 — 2 c. Pes sinister secundi paris in mare, supinus (vix  $\frac{16}{1}$ ).  
 — 2 d. Pes sinister quinti paris, supinus (vix  $\frac{16}{1}$ ).  
 — 2 e. Pes sinister septimi paris, supinus (vix  $\frac{16}{1}$ ).  
 — 2 f. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{17}{1}$ ).  
 — 2 g. Pars posterior caudæ in mare, prona ( $\frac{15}{1}$ ).
- Fig. 3. *Cirolana eximia* n. sp., femina non ovigera, punctura delineata (paulo plus quam  $\frac{7}{2}$ ).  
 — 3 a. Femina, a latere dextro exhibita.  
 — 3 b. Pars anterior capitis in femina, supina ( $\frac{13}{2}$ ).  
 — 3 c. Pes sinister primi paris in femina, supinus ( $\frac{15}{2}$ ).  
 — 3 d. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{15}{2}$ ).  
 — 3 e. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{15}{2}$ ).  
 — 3 f. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{9}{2}$ ).  
 — 3 g. Uropodum sinistrum in femina, pronum ( $\frac{7}{2}$ ).
- Fig. 4. *Cirolana concharum* (Stimps.), femina non ovigera, punctura minuta omissa (paulo plus quam  $\frac{7}{2}$ ).  
 — 4 a. Femina, a latere dextro exhibita.  
 — 4 b. Antenna sinistra in femina, supina ( $\frac{6}{7}$ ).  
 — 4 c. Pes sinister secundi paris in femina, supinus ( $\frac{6}{7}$ ).  
 — 4 d. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{6}{7}$ ).  
 — 4 e. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{6}{7}$ ).  
 — 4 f. Pars posterior caudæ in femina, prona ( $\frac{9}{2}$ ).

Fig 5. *Cirolana sulcata* n. sp., mas adultus, punctura ex parte majore omissa ( $\frac{3}{2}$ ).

- 5 a. Pars anterior capitis in mare, supina ( $\frac{1}{1}$ ).
- 5 b. Pes sinister secundi paris in mare, supinus ( $\frac{1.5}{1}$ ).
- 5 c. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{1.5}{1}$ ).
- 5 d. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{1.5}{1}$ ).
- 5 e. Pars posterior caudæ in mare, prona ( $\frac{1}{1}$ ).

Fig. 6. *Cirolana parva* n. sp., pars anterior capitis in mare, supina ( $\frac{1}{1}$ ).

- 6 a. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{1.9}{1}$ ).
- 6 b. Pars posterior caudæ in mare, prona ( $\frac{1}{1}$ ).

### Tab. III.

Fig. 1. *Cirolana parva* n. sp., mas adultus, punctura omissa ( $\frac{1}{2}$ ).

- 1 a. Mas, a latere dextro exhibitus.
- 1 b. Pes sinister secundi paris in mare, supinus ( $\frac{1.7}{1}$ ).
- 1 c. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{1.7}{1}$ ).
- 1 d. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{1.7}{1}$ ).

Fig. 2. *Cirolana californica* n. sp., femina ovigera, punctura ex parte majore omissa (vix  $\frac{1}{4}$ ).

- 2 a. Femina, a latere dextro exhibitus.
- 2 b. Pars anterior capitis in femina, supina ( $\frac{3}{2}$ ).
- 2 c. Pes sinister secundi paris in femina, supinus ( $\frac{2.1}{2}$ ).
- 2 d. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{2.1}{2}$ ).
- 2 e. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{2.1}{2}$ ).
- 2 f. Pars posterior caudæ in femina, prona ( $\frac{1.9}{2}$ ).

Fig. 3. *Cirolana Cranchii* Leach, mas adultus, punctura minuta omissa (c.  $\frac{5}{2}$ ).

- 3 a. Mas, a latere dextro exhibitus.
- 3 b. Pars anterior capitis in mare, supinus ( $\frac{7}{4}$ ).
- 3 c. Pes sinister secundi paris in mare adulto, supinus ( $\frac{1.5}{2}$ ).
- 3 d. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{1.5}{2}$ ).
- 3 e. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{1.5}{2}$ ).
- 3 f. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare, supinum ( $\frac{1.3}{2}$ ).
- 3 g. Pars posterior caudæ in mare adulto, prona ( $\frac{1}{2}$ ). Spinæ imprimis in ramo exteriori uropodorum a ciliis densissime sitis obtectæ.
- 3 h. Specimen femineum juvenile, punctura omissa ( $\frac{3}{2}$ ).
- 3 i. Pars posterior caudæ in specimine femineo juvenili ( $\frac{1.0}{1}$ ).

Fig. 4. *Cirolana elongata* H. Milne-Edw., mas adultus, punctura delineata ( $\frac{3}{4}$ ).

- 4 a. Mas, a latere dextro exhibitus.
- 4 b. Pars anterior capitis cum angulis anterioribus magnis segmenti primi in mare, supina ( $\frac{1.1}{2}$ ). Setæ plumosæ prope oculum sinistrum et in antenna sinistra omissæ. *a.* cornu laminæ frontalis.
- 4 c. Pars distalis mandibulæ sinistrae in mare, prona ( $\frac{1.6}{1}$ ); *p.* pars basalis palpi.
- 4 d. Maxilla sinistra primi paris, supina ( $\frac{1.6}{1}$ ).
- 4 e. Maxilla sinistra secundi paris, supina ( $\frac{1.6}{1}$ ).
- 4 f. Maxillipes sinister, supinus ( $\frac{1.6}{1}$ ); *I*<sup>2</sup>. lacinia articuli secundi.
- 4 g. Pes sinister secundi paris in mare, supinus ( $\frac{1.3}{2}$ ).

- Fig. 4 h. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{13}{2}$ ).  
 — 4 i. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{13}{2}$ ).  
 — 4 k. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{6}{1}$ ).  
 — 4 l. Uropodum sinistrum in mare, pronum ( $\frac{8}{1}$ ).  
 Fig. 5. *Cirolana minuta* n. sp., mas adultus, punctura omissa ( $\frac{7}{1}$ ).  
 — 5 a. Mas, a latere dextro exhibitus.  
 — 5 b. Pars anterior capitis in mare, supina ( $\frac{18}{1}$ ); a. cornu laminæ frontalis.  
 — 5 c. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{24}{1}$ ).  
 — 5 d. Pars posterior caudæ in mare, prona (vix  $\frac{18}{1}$ ).

#### Tab. IV.

- Fig. 1. *Cirolana minuta* n. sp., mandibula sinistra in femina, supina ( $\frac{41}{1}$ ).  
 — 1 a. Maxilla sinistra primi paris, supina ( $\frac{41}{1}$ ).  
 — 1 b. Maxilla sinistra secundi paris, supina ( $\frac{41}{1}$ ).  
 — 1 c. Maxillipes sinister, supinus ( $\frac{41}{1}$ ).  
 — 1 d. Pes sinister secundi paris in femina, supinus ( $\frac{27}{1}$ ).  
 — 1 e. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{27}{1}$ ).  
 — 1 f. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{27}{1}$ ).  
 Fig. 2. *Cirolana japonica* n. sp., mas adultus, punctura omissa ( $\frac{9}{1}$ ).  
 — 2 a. Mas, a latere dextro exhibitus.  
 — 2 b. Pars anterior capitis in mare adulto, oculis omissis, supina ( $\frac{27}{1}$ ); a. lamina frontalis, b. clypeus, c. labrum.  
 — 2 c. Mandibula sinistra in mare, supina ( $\frac{65}{1}$ ).  
 — 2 d. Maxilla sinistra primi paris, parte basali omissa, supina ( $\frac{65}{1}$ ).  
 — 2 e. Maxilla sinistra secundi paris, supina ( $\frac{65}{1}$ ).  
 — 2 f. Maxillipes sinister, parte basali omissa, supinus ( $\frac{65}{1}$ ).  
 — 2 g. Pes sinister secundi paris in mare adulto, supinus ( $\frac{25}{1}$ ).  
 — 2 h. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{25}{1}$ ).  
 — 2 i. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{25}{1}$ ).  
 — 2 k. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{30}{1}$ ).  
 — 2 l. Pars posterior caudæ in mare, prona ( $\frac{19}{1}$ ).  
 Fig. 3. *Cirolana sphaeromiformis* n. sp., femina non ovigera, haud adulta, punctura omissa (c.  $\frac{8}{1}$ ).  
 — 3 a. Femina, a latere dextro exhibitus.  
 — 3 b. Pars anterior capitis in femina, supina ( $\frac{22}{1}$ ).  
 — 3 c. Pes sinister secundi paris in femina, supinus ( $\frac{25}{1}$ ).  
 — 3 d. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{25}{1}$ ).  
 — 3 e. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{25}{1}$ ).  
 — 3 f. Pleopodum sinistrum secundi paris in femina, supinum ( $\frac{25}{1}$ ).  
 — 3 g. Pars posterior caudæ in femina, prona ( $\frac{35}{2}$ ).  
 Fig. 4. *Cirolana orientalis* Dana, femina subadulta (lam. ovig. in evol.), punctura ex parte majore omissa ( $\frac{1}{1}$ ).  
 — 4 a. Femina, a latere dextro exhibitus.  
 — 4 b. Pars anterior capitis in femina, supina ( $\frac{10}{1}$ ).  
 — 4 c. Pes sinister secundi paris in femina, supinus ( $\frac{10}{1}$ ).

- Fig. 4 d. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{10}{1}$ ).  
 — 4 e. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{10}{1}$ ).  
 — 4 f. Pars interior articuli quarti in pede sinistro quinti paris, supina ( $\frac{34}{1}$ ).  
 — 4 g. Pleopodum sinistrum primi paris in femina, supinum ( $\frac{10}{1}$ ).  
 — 4 h. Pars posterior caudæ, in femina, prona ( $\frac{17}{2}$ ).  
 Fig. 5. *Conilera cylindracea* (Mont.), femina fere adulta sine laminis ovigeris, punctura delineata ( $\frac{9}{3}$ ).  
 — 5 a. Pes sinister secundi paris in femina fere adulta, supinus ( $\frac{9}{1}$ ).  
 — 5 b. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{9}{1}$ ).  
 — 5 c. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{9}{1}$ ).

### Tab. V.

- Fig. 1. *Conilera cylindracea* (Mont.), femina fere adulta, a latere dextro exhibitā ( $\frac{9}{3}$ ).  
 — 1 a. Pars anterior capitis in femina, supina ( $\frac{17}{2}$ ).  
 — 1 b. Pleopodum sinistrum primi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{9}{1}$ ).  
 — 1 c. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{9}{1}$ ).  
 — 1 d. Pars posterior caudæ in femina fere adulta, prona ( $\frac{7}{1}$ ).  
 Fig. 2. *Eurydice elegantula* n. sp., femina ovigera, punctura omissa ( $\frac{17}{3}$ ).  
 — 2 a. Mas adultus ( $\frac{17}{3}$ ).  
 — 2 b. Mas adultus, a latere dextro exhibitus.  
 — 2 c. Pars anterior capitis in mare adulto, supina (vix  $\frac{24}{1}$ ); *a.* cornu laminæ frontalis, *b.* clypeus.  
 — 2 d. Mandibula sinistra e femina magna sine laminis ovigeris, supina ( $\frac{35}{1}$ ).  
 — 2 e. Pars molaris mandibulæ ( $\frac{134}{1}$ ).  
 — 2 f. Pars distalis mandibulæ dextræ, prona ( $\frac{35}{1}$ ); *b.* lacinia mobilis, *c.* pars molaris.  
 — 2 g. Maxilla primi paris in femina magna sine laminis ovigeris, supina ( $\frac{35}{1}$ ).  
 — 2 h. Maxilla sinistra secundi paris, supina ( $\frac{35}{1}$ ).  
 — 2 i. Maxillipes sinister in femina magna sine laminis ovigeris, supinus ( $\frac{35}{1}$ ).  
 — 2 k. Pars media maxillipedis sinistri, prona ( $\frac{56}{1}$ ); *2.* articulus secundus, *l<sup>2</sup>.* lacinia artic. secundi, *3.* articulus tertius.  
 — 2 l. Maxillipes sinister in femina laminis ovigeris ornata, supinus ( $\frac{42}{1}$ ); *a.* lamina vibrans artic. primi, *ep.* epipodium cum lamina vibrante, *b.* lamina vibrans artic. secundi.  
 — 2 m. Antennula sinistra in femina, supina et ex parte minore a latere posteriore exhibitā ( $\frac{32}{1}$ ).  
 — 2 n. Antennula sinistra in mare adulto, supina et ex parte minore a latere posteriore exhibitā ( $\frac{32}{1}$ ).  
 — 2 o. Pes sinister secundi paris in mare adulto, supinus ( $\frac{16}{1}$ ).  
 — 2 p. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{16}{1}$ ).  
 — 2 q. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{16}{1}$ ).  
 — 2 r. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{18}{1}$ ).  
 — 2 s. Pars posterior caudæ in mare adulto, prona ( $\frac{13}{1}$ ).  
 — 2 t. Pars posterior caudæ in femina ovigera, prona ( $\frac{13}{1}$ ).  
 Fig. 3. *Eurydice inermis* n. sp., specimen junius, a latere dextro exhibitum ( $\frac{12}{1}$ ).  
 — 3 a. Pars anterior capitis in femina ovigera, supina ( $\frac{26}{1}$ ).  
 — 3 b. Pes sinister secundi paris in femina ovigera, supinus ( $\frac{21}{1}$ ).  
 — 3 c. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{21}{1}$ ).  
 — 3 d. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{21}{1}$ ).

- Fig. 3 e. Pars posterior caudæ in specimine juniore, prona ( $\frac{2^2}{1}$ ).  
 — 3 f. Margo posterior segmenti ultimi caudæ ( $\frac{5^0}{1}$ ).  
 Fig. 4. *Eurydice spinigera* n. sp., pes sinister secundi paris in mare adulto, supinus ( $\frac{1^4}{1}$ ).  
 — 4 a. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{1^4}{1}$ ).  
 — 4 b. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{1^4}{1}$ ).  
 — 4 c. Pars posterior caudæ in mare adulto, prona ( $\frac{1^3}{1}$ ).

### Tab. VI.

- Fig. 1. *Eurydice spinigera* n. sp., mas adultus, a latere dextro exhibitus ( $\frac{1^4}{3}$ ).  
 — 1 a. Pars anterior capitis in mare adulto, supina ( $\frac{1^5}{1}$ ).  
 — 1 b. Antennula sinistra in mare adulto, supina et ex parte minore a latere posteriore exhibita ( $\frac{3^2}{1}$ ).  
 — 1 c. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{1^5}{1}$ ).  
 Fig. 2. *Eurydice orientalis* n. sp., mas adultus ( $\frac{1^9}{2}$ ).  
 — 2 a. Mas adultus, a latere dextro exhibitus.  
 — 2 b. Pars anterior capitis in mare adulto, supina ( $\frac{3^0}{1}$ ).  
 — 2 c. Antennula sinistra in mare adulto, supina et ex parte minore a latere posteriore exhibita ( $\frac{6^1}{1}$ ). Pars major setæ apicalis longissimæ ommissa.  
 — 2 d. Pes sinister secundi paris in mare adulto, supinus ( $\frac{2^3}{1}$ ).  
 — 2 e. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{2^2}{1}$ ).  
 — 2 f. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{2^3}{1}$ ).  
 — 2 g. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{2^3}{1}$ ).  
 — 2 h. Pars posterior caudæ in mare adulto, prona ( $\frac{2^1}{1}$ ).  
 Fig. 3. *Eurydice pulchra* Leach, femina major sine laminis ovigeris (c.  $\frac{6}{1}$ ).  
 — 3 a. Femina major, a latere dextro exhibita.  
 — 3 b. Pars anterior capitis in femina majore sine laminis ovigeris, supina ( $\frac{2^1}{1}$ ).  
 — 3 c. Antennula sinistra in femina majore sine laminis ovigeris, supina et ex parte minore a latere posteriore exhibita ( $\frac{3^2}{1}$ ).  
 — 3 d. Antennula sinistra in mare adulto, supina et ex parte minore a latere posteriore exhibita ( $\frac{3^2}{1}$ ).  
 — 3 e. Pes sinister secundi paris in femina majore sine laminis ovigeris, supinus ( $\frac{2^1}{1}$ ).  
 — 3 f. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{2^1}{1}$ ).  
 — 3 g. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{2^1}{1}$ ).  
 — 3 h. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{2^0}{1}$ ).  
 — 3 i. Pars posterior caudæ in femina majore sine laminis ovigeris, prona ( $\frac{3^5}{2}$ ).  
 Fig. 4. *Corallana tricornis* n. sp., femina ovigera, punctura omnino ommissa ( $\frac{1^9}{3}$ ).  
 — 4 a. Mas adultus, a latere dextro exhibitus (c.  $\frac{1^1}{2}$ ).  
 — 4 b. Pars anterior capitis in femina ovigera, supina ( $\frac{2^5}{1}$ ); a. lamina frontalis, b. clypeus, c. labrum, d. mandibula.  
 — 4 c. Mandibula sinistra in mare, supina ( $\frac{2^8}{1}$ ); d. condylus articularius anterior, e. condylus articularius posterior.  
 — 4 d. Pars distalis mandibulæ sinistræ, supina et ex parte a latere anteriore exhibita, prona ( $\frac{2^8}{1}$ ).  
 — 4 e. Pars distalis mandibulæ sinistræ, prona ( $\frac{2^8}{1}$ ); a<sup>1</sup>. apex primus aciei, a<sup>2</sup>. apex secundus aciei, i. impressio longa et profunda ad recipiendum apicem magnum mandibulæ dextræ.

- Fig. 4 f. Mandibula dextra, parte basali omissa, prona ( $\frac{2.8}{1}$ ); *a*<sup>1</sup>. apex primus aciei.
- 4 g. Maxilla sinistra primi paris in mare, supina ( $\frac{2.8}{1}$ ); 1. articulus primus, 1<sup>1</sup>. lacinia artic. primi, 2. articulus secundus, 3. articulus tertius.
- 4 h. Maxilla sinistra secundi paris in mare, supina ( $\frac{2.8}{1}$ ).
- 4 i. Maxillipes sinister in mare, supinus ( $\frac{2.8}{1}$ ).
- 4 j. Pars media maxillipedis sinistri in mare, prona (c.  $\frac{5.0}{1}$ ); 2. articulus secundus, 1<sup>2</sup>. lacinia artic. secundi, 3. articulus tertius.
- 4 k. Maxillipes sinister in femina ovigera, supinus ( $\frac{4.6}{1}$ ); 1. articulus primus, *a*. lamina vibrans artic. primi, *ep*. epipodium cum lamina vibrante, 2. articulus secundus, *b*. lamina vibrans artic. secundi.
- 4 l. Caput maris adulti, pronom ( $\frac{2.9}{2}$ ).
- 4 m. Antennula sinistra in femina subadulta, supina et ex parte minore a latere posteriore exhibita ( $\frac{3.3}{1}$ ).
- 4 n. Pars basalis flagelli in antenna dextra maris, prona ( $\frac{3.2}{1}$ ).
- 4 o. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{3.5}{2}$ ).
- 4 p. Pars posterior caudæ in mare adulto, prona ( $\frac{2.5}{2}$ ).

### Tab. VII.

- Fig. 1. *Corallana tricornis* n. sp., pes sinister secundi paris in mare, supinus ( $\frac{1.8}{1}$ ).
- 1 a. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{1.8}{1}$ ).
- 1 b. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{1.8}{1}$ ).
- 1 c. Partes interiores oris, supinæ ( $\frac{3.2}{1}$ ); *h*. paragnatha, *l*. cutis interior labri, ante flexa, *m*. cutis aperturam pharyngis cingens, *p*. apertura pharyngis.
- 1 d. Partes interiores oris in figura præcedente exhibitæ, paragnathis omissis, supinæ ( $\frac{6.4}{1}$ ); *l*. cutis interior labri, *m*. cutis aperturam pharyngis cingens, *p*. apertura pharyngis, *q*. processus supra aperturam in pharynge situs.
- Fig. 2. *Corallana quadricornis* n. sp., caput in mare haud adulto, pronom ( $\frac{2.3}{1}$ ).
- Fig. 3. *Corallana subtilis* n. sp., specimen juvenile in mutatione cutis captum, punctura omissa ( $\frac{2.3}{3}$ ).
- 3 a. Specimen juvenile in mutatione cutis captum, a latere dextro exhibitum.
- 3 b. Caput specimenis juvenilis, setis antennularum et antennarum omissis, pronom ( $\frac{1.9}{1}$ ).
- 3 c. Pars posterior caudæ in specimine juvenili, prona ( $\frac{1.6}{1}$ ).
- Fig. 4. *Corallana antillensis* n. sp., mas adultus, a latere dextro exhibitus (c.  $\frac{1.1}{4}$ ).
- 4 a. Caput maris adulti, setis antennularum omissis, pronom ( $\frac{1.7}{2}$ ).
- 4 b. Cauda maris adulti, prona (vix  $\frac{5}{1}$ ).
- 4 c. Caput maris adulti, setis antennularum omissis, supinum ( $\frac{1.1}{1}$ ); *a*. lamina frontalis, *d*. mandibula, *e*. maxilla primi paris, *g*. maxillipes, *g*<sup>1</sup>. epipodium maxillipedis, *h*. paragnathum, *h*<sup>1</sup>. pars antero-exterior paragnathi, partem mediam, postero-interiorem mandibulæ tegens.
- 4 d. Mandibula sinistra maris adulti, palpo omissa, supina (vix  $\frac{2.4}{1}$ ).
- 4 e. Mandibula sinistra, parte basali omissa, prona (vix  $\frac{2.4}{1}$ ); *d*. condylus articularius anterior, *d*<sup>1</sup>. condylus auxilliaris, *i*. impressio longa et profunda ad recipiendum apicem mandibulæ dextræ.
- 4 f. Maxilla sinistra secundi paris, supina (vix  $\frac{2.4}{1}$ ).
- 4 g. Pars distalis maxillæ sinistræ secundi paris, supina ( $\frac{5.9}{1}$ ).
- 4 h. Pars distalis maxillæ sinistræ secundi paris, prona ( $\frac{5.9}{1}$ ).
- 4 i. Maxillipes sinister in mare adulto, supinus (vix  $\frac{2.4}{1}$ ).

Fig. 5. *Corallana fissicauda* n. sp., femina sine laminis ovigeris, punctura omisa ( $\frac{4}{1}$ ).

- 5 a. Femina in figura præcedente exhibitâ, a latere dextro visa.
- 5 b. Pes sinister septimi paris in femina, supinus ( $\frac{1.3}{1}$ ).
- 5 c. Apex articuli quinti in pede sinistro septimi paris, setas mirabiliter ramosas gerens, pronus ( $\frac{6.6}{1}$ ).
- 5 d. Pars posterior caudæ in femina, prona ( $\frac{1.7}{2}$ ). — Ramus interior uropodi sinistri spinis marginalibus nullis instructus.

Fig. 6. *Corallana oculata* n. sp., mas adultus, a latere dextro exhibitus ( $\frac{3}{2}$ ).

- 6 a. Caput maris adulti, setis antennularum omissis, pronum ( $\frac{1.0}{1}$ ).
- 6 b. Cauda maris adulti, prona (vix  $\frac{3}{4}$ ).

Fig. 7. *Corallana Warmingii* n. sp., mas (? vix) adultus (vix  $\frac{4}{1}$ ).

- 7 a. Mas, a latere dextro exhibitus.
- 7 b. Caput maris (? vix) adulti, pronum ( $\frac{1.0}{1}$ ).
- 7 c. Pes sinister secundi paris in mare, supinus (c.  $\frac{1.0}{1}$ ).
- 7 d. Pes sinister quinti paris, supinus (c.  $\frac{1.0}{1}$ ).
- 7 e. Pes sinister septimi paris, supinus (c.  $\frac{1.0}{1}$ ).
- 7 f. Pars posterior caudæ in mare, prona ( $\frac{3}{4}$ ).

### Tab. VIII.

Fig. 1. *Alcirona Krebsii* n. gen., n. sp., femina maxima, laminis ovigeris nullis instructa, punctura omisa ( $\frac{3}{2}$ ).

- 1 a. Femina in figura præcedente exhibitâ, a latere dextro visa.
- 1 b. Caput feminae maximæ, laminis ovigeris nullis instructæ, supinum ( $\frac{1.4}{1}$ ); a. lamina frontalis, b. clypeus, c. labrum, d. mandibula, e. maxilla primi paris, f. maxilla secundi paris, g. maxillipes, h. paragnatha.
- 1 c. Mandibula sinistra feminae maximæ, supina ( $\frac{4.0}{1}$ ); d. condylus articularius anterior, e. condylus articularius posterior.
- 1 d. Pars distalis mandibulae sinistrae in femina parva, prona ( $\frac{7.2}{1}$ ).
- 1 e. Pars distalis mandibulae dextrae in femina parva, supina ( $\frac{7.2}{1}$ ).
- 1 f. Pars distalis mandibulae dextrae in figura præcedente exhibitâ, prona ( $\frac{7.2}{1}$ ).
- 1 g. Maxilla sinistra primi paris in femina maxima, supina ( $\frac{4.0}{1}$ ).
- 1 h. Maxilla sinistra secundi paris in femina maxima, supina ( $\frac{4.0}{1}$ ).
- 1 i. Maxillipes sinister in femina maxima, supinus ( $\frac{4.0}{1}$ ).
- 1 k. Pes sinister secundi paris in femina maxima, supinus ( $\frac{1.9}{2}$ ).
- 1 l. Pes sinister quinti paris in femina maxima, supinus ( $\frac{1.9}{2}$ ).
- 1 m. Pes sinister septimi paris in femina maxima, supinus ( $\frac{1.9}{2}$ ).
- 1 n. Mas adultus ( $\frac{1.5}{4}$ ).
- 1 o. Mas adultus, a latere dextro exhibitus, setis omissis.
- 1 p. Pleopodum sinistrum secundi paris in mare adulto, supinum ( $\frac{1.3}{1}$ ).
- 1 q. Pars posterior caudæ in mare adulto, prona ( $\frac{3}{4}$ ).

Fig. 2. *Alcirona insularis* n. sp., mas junior, punctura omisa ( $\frac{1.7}{2}$ ).

- 2 a. Mas junior, a latere dextro exhibitus.
- 2 b. Caput maris junioris, supinum ( $\frac{2.8}{1}$ ); c. labrum.
- 2 c. Mandibula sinistra maris junioris, supina ( $\frac{5.7}{1}$ ).
- 2 d. Maxilla sinistra primi paris in mare juniore, supina ( $\frac{5.7}{1}$ ).

Fig. 2 e. Maxilla sinistra secundi paris in mare juniore, supina ( $\frac{5.7}{1}$ ).

— 2 f. Maxillipes sinister in mare juniore, supinus ( $\frac{5.7}{1}$ ).

— 2 g. Pars distalis pedis sinistri primi paris in mare juniore, supina ( $\frac{3.0}{1}$ ).

— 2 h. Pes sinister secundi paris, supinus ( $\frac{3.0}{1}$ ).

— 2 i. Pars distalis pedis sinistri tertii paris, supina ( $\frac{3.0}{1}$ ).

— 2 k. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{3.0}{1}$ ).

— 2 l. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{3.0}{1}$ ).

— 2 m. Pleopodium sinistrum secundi paris in mare juniore, supinum ( $\frac{2.9}{1}$ ).

— 2 n. Pars posterior caudæ in mare juniore, prona ( $\frac{3.5}{2}$ ).

Fig. 3. *Lanocira Kroyeri* n. gen., n. sp., femina junior, punctura omisa ( $\frac{1.7}{2}$ ).

— 3 a. Femina junior, a latere dextro exhibitâ.

— 3 b. Pars anterior capitis in femina juniore, supina ( $\frac{2.3}{1}$ ); a. lamina frontalis, b. clypeus, c. labrum.

— 3 c. Mandibula sinistra in femina juniore, supina ( $\frac{5.7}{1}$ ); a. acies, b. (?) lacinia mobilis, c. (?) pars molaris, d. condylus articularius anterior.

— 3 d. Maxilla sinistra primi paris, supina ( $\frac{5.7}{1}$ ); 1. articulus primus, 1<sup>l</sup>. lacinia artic. primi, 2. articulus secundus, 3. articulus tertius.

— 3 e. Maxilla sinistra secundi paris, supina ( $\frac{5.7}{1}$ ); 1. articulus primus, 2. articulus primus, 1<sup>l</sup>. lacinia artic. tertii.

— 3 f. Maxillipes sinister, supinus ( $\frac{5.7}{1}$ ).

— 3 g. Pes sinister secundi paris in femina juniore, supinus ( $\frac{2.3}{1}$ ).

— 3 h. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{2.3}{1}$ ).

— 3 i. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{2.3}{1}$ ).

— 3 k. Pleopodium sinistrum secundi paris in femina juniore, supinum ( $\frac{2.3}{1}$ ).

— 3 l. Pars posterior caudæ in femina juniore, prona ( $\frac{1.8}{1}$ ).

Fig. 4. *Tachæa crassipes* Sch. & Mein., specimen junius verosim. femineum, punctura omisa ( $\frac{1.5}{2}$ ).

— 4 a. Specimen junius, a latere dextro exhibitum.

### Tab. IX.

Fig. 1. *Tachæa crassipes* Sch. & Mein., caput speciminis junioris in tabula præcedente exhibitâ, maxillipedibus nonnihil inter se remotis, supinum ( $\frac{2.5}{1}$ ); a. lamina frontalis, b. clypeus, d. mandibula, e. maxilla primi paris, f. maxilla secundi paris, g. maxillipes, h. paragnatha.

— 1 a. Mandibula sinistra in specimine juniore, supina ( $\frac{5.7}{1}$ ); b. (?) lacinia mobilis, d. condylus articularius anterior.

— 1 b. Maxilla sinistra primi paris, supina ( $\frac{5.7}{1}$ ).

— 1 c. Maxilla sinistra secundi paris, supina ( $\frac{5.7}{1}$ ).

— 1 d. Maxillipes sinister, supinus ( $\frac{5.7}{1}$ ).

— 1 e. Paragnatha, supina ( $\frac{5.7}{1}$ ).

— 1 f. Pes sinister secundi paris speciminis in tabula præcedente exhibitâ, supinus ( $\frac{2.0}{1}$ ).

— 1 g. Pes sinister quinti paris, supinus ( $\frac{2.0}{1}$ ).

— 1 h. Pes sinister septimi paris, supinus ( $\frac{2.0}{1}$ ).

— 1 i. Pars posterior caudæ speciminis in tabula præcedente exhibitâ, prona ( $\frac{2.1}{2}$ ).

Fig. 2. *Tachæa incerta* n. sp., pars anterior capitis cum pedunculis antennularum et antennarum in specimine juniore femineo, supina (vix  $\frac{1.8}{1}$ ).



- Fig. 2 a. Pes sinister tertii paris in specimine juniore, supinus ( $\frac{3.3}{2}$ ).  
 — 2 b. Pars posterior caudæ in specimine juniore, prona ( $\frac{3.5}{3}$ ).
- Fig. 3. *Barybrotes agilis* Sch. & Mein., femina maxima sine laminis ovigeris, punctura minuta omissa (vix ?).  
 — 3 a. Femina maxima, a latere dextro exhibitæ.  
 — 3 b. Caput feminae maximæ, a latere dextro exhibitum ( $\frac{6}{1}$ ); *b.* clypeus, *d.* mandibula, *d*<sup>1</sup>. palpus mandibulæ, *e.* maxilla primi paris, *g.* maxillipes.  
 — 3 c. Caput feminae maximæ (non ovigeræ), supinum ( $\frac{1.9}{2}$ ); *a.* lamina frontalis, *b.* clypeus, *d.* mandibula, *e.* apex maxillæ primi paris in apertura oris pone apicem mandibulæ, *g.* maxillipes, *g*<sup>1</sup>. epipodium maxillipedis.  
 — 3 d. Clypeus et labrum, a latere anteriore visa ( $\frac{1.7}{1}$ ); *a.* clypeus, *b.* labrum, *c.* cutis mollis in latere clypei et labri.  
 — 3 e. Pars distalis clypei et labrum, a latere posteriore exhibitæ ( $\frac{3.7}{1}$ ); significatio litterarum ut in figura præcedente.  
 — 3 f. Mandibula sinistra in femina maxima, supina ( $\frac{1.7}{1}$ ); *b.* lacinia mobilis, *e.* pars angulata posterior, in fig. 3 c sub integumentis capitis occulta.  
 — 3 g. Maxilla sinistra primi paris in femina maxima, supina ( $\frac{1.7}{1}$ ); *1.* articulus primus, *l*<sup>1</sup>. lacinia artic. primi, *2.* articulus secundus, *3.* articulus tertius.  
 — 3 h. Maxilla sinistra secundi paris in femina maxima, supina ( $\frac{1.7}{1}$ ).  
 — 3 i. Maxillipes sinister in femina maxima, supinus ( $\frac{1.7}{1}$ ); *1.* articulus primus, *4-5.* articulus articulis quarto et quinto coalitis formatus, *ep.* epipodium.  
 — 3 k. Pars distalis maxillipedis sinistri, supina et ex parte minore a latere exteriori exhibitæ ( $\frac{3.4}{1}$ ); *6.* articulus sextus.  
 — 3 l. Pars distalis maxillipedis sinistri, a latere exteriori et ex parte minore a latere superiore exhibitæ ( $\frac{3.4}{1}$ ); *5.* articulus quintus, *6.* articulus sextus.  
 — 3 m. Partes interiores oris, supinae ( $\frac{1.7}{1}$ ); *h.* paragnatha, *m.* cutis aperturam pharyngis cingens et cum cute interiore subapicali clypei conjuncta, *p.* apertura pharyngis.  
 — 3 n. Antennula sinistra feminae maximæ, supina et ex parte a latere posteriore exhibitæ ( $\frac{4.5}{2}$ ). Setæ sensiles ex parte omissæ.  
 — 3 o. Pes sinister secundi paris in femina maxima, supinus ( $\frac{6}{1}$ ).  
 — 3 p. Pes sinister quinti paris in femina maxima, supinus ( $\frac{6}{1}$ ).  
 — 3 q. Pes sinister septimi paris in femina maxima, supinus ( $\frac{6}{1}$ ).  
 — 3 r. Pleopodium dextrum secundi paris in mare (?) adulto ( $\frac{6}{1}$ ).  
 — 3 s. Pars posterior caudæ in femina maxima, prona ( $\frac{6}{1}$ ); spina in latere interiore rami exterioris uropodorum prope apicem sita excisa.
- Fig. 4. *Æga psora* (L.), caput in femina majore non ovigera, supinum ( $\frac{1.3}{2}$ ); *c.* labrum, *d.* mandibula, *f.* maxilla secundi paris, *g.* maxillipes, *g*<sup>1</sup>. epipodium maxillipedis, *h.* paragnatha, *p.* antennula, *q.* antenna, *q*<sup>1</sup>. (?) squama antennæ.  
 — 4 a. Caput in femina majore, a latere anteriore exhibitum ( $\frac{1.5}{2}$ ); *b.* clypeus. Significatio litterarum ceterarum ut in figura præcedente.  
 — 4 b. Clypeus et labrum in femina, a latere interiore exhibitæ ( $\frac{1.8}{1}$ ); *a.* cutis dura capitis, *b.* clypeus, *c.* labrum, *d.* cutis submembranacea.  
 — 4 c. Mandibula sinistra in femina majore, supina ( $\frac{1.0}{1}$ ); *d.* condylus articularius anterior, *e.* condylus articularius posterior.  
 — 4 d. Mandibula dextra, prona ( $\frac{1.0}{1}$ ).  
 — 4 e. Maxilla sinistra primi paris in femina majore, supina ( $\frac{1.0}{1}$ ).  
 — 4 f. Pars apicalis laciniae articuli tertii in maxilla sinistra primi paris, supina ( $\frac{5.6}{1}$ ).

- Fig. 4 g. Maxilla sinistra secundi paris in femina majore, supina ( $\frac{10}{1}$ );  $l^2$ . lacinia artic. secundi,  $l^3$ . lacinia articuli tertii.
- 4 h. Maxillipes sinister in femina majore, supinus ( $\frac{10}{1}$ );  $l^2$ . lacinia artic. secundi.
- 4 i. Paragnatha et pars sternalis minor capitis, supina ( $\frac{10}{1}$ ).

### Tab. X.

- Fig. 1. *Rocinela Danmoniensis* Leach, caput maris adulti, supinum ( $\frac{9}{1}$ ); a. lamina frontalis, b. clypeus, c. labrum, d. mandibula, f. maxilla secundi paris, g. maxillipes, p. antennula. — (Pars apicalis maxillipedum sæpius sub labro occulta est.)
- 1 a. Clypeus et labrum speciminis in figura præcedente exhibiti, a latere anteriore visa ( $\frac{22}{1}$ ); a. clypeus, b. labrum.
- 1 b. Mandibula sinistra in mare adulto, supina ( $\frac{33}{2}$ ).
- 1 c. Pars apicalis mandibulæ sinistræ, supina (c.  $\frac{85}{1}$ ); a. acies, b. lacinia mobilis.
- 1 d. Pars distalis mandibulæ sinistræ, prona ( $\frac{25}{1}$ ); b. lacinia mobilis, c. pars molaris.
- 1 e. Pars distalis mandibulæ dextræ in mare adulto, supina ( $\frac{25}{1}$ ); b. lacinia mobilis, c. pars molaris.
- 1 f. Setæ in articulo secundo palpi mandibularis, supinæ ( $\frac{56}{1}$ ).
- 1 g. Maxilla sinistra primi paris in mare adulto, supina ( $\frac{33}{2}$ ).
- 1 h. Maxilla sinistra secundi paris in mare adulto, supina ( $\frac{33}{2}$ ).
- 1 i. Maxillipes sinister in mare adulto, supinus ( $\frac{33}{2}$ ); ep. epipodium, r. musculus abductor partis distalis maxillipedis, s. musc. adductor partis distalis maxillipedis,  $l^2$ . lacinia artic. secundi, t. musc. abductor partis ultimæ (articulis sexto et septimo inter se coalitis formatæ) maxillipedis, u. musc. adductor partis ultimæ maxillipedis.
- 1 k. Pars apicalis maxillipedis sinistri, prona ( $\frac{53}{1}$ ); 5. articulus quintus, 6. articulus sextus, 7. articulus septimus cum artic. sexto coalitus.
- 1 l. Maxilla sinistra primi paris in femina ovigera, supina ( $\frac{15}{1}$ ).
- 1 m. Maxilla sinistra secundi paris in femina ovigera, supina ( $\frac{15}{1}$ ).
- 1 n. Maxillipes sinister in femina ovigera, supinus ( $\frac{15}{1}$ ); 1. articulus primus, a. lamina vibrans artic. primi, ep. epipodium cum lamina vibrante, b. lamina vibrans artic. secundi.
- Fig. 2. *Rocinela signata* Sch. & Mein., clypeus et labrum in mare adulto, a latere anteriore exhibitum ( $\frac{28}{1}$ ).
- 2 a. Pars distalis mandibulæ sinistræ in mare adulto, supina ( $\frac{33}{1}$ ).
- Fig. 3. *Nerocila bivittata* (Risso), caput maris, supinum ( $\frac{9}{1}$ ); b. clypeus, d. mandibula, f. maxilla secundi paris, g. maxillipes.
- 3 a. Clypeus et labrum in femina ovigera, a latere anteriore exhibitum ( $\frac{16}{1}$ ); a. clypeus, b. labrum.
- 3 b. Mandibula sinistra in mare, supina ( $\frac{33}{2}$ ).
- 3 c. Mandibula sinistra, a latere interiore exhibitum.
- 3 d. Maxilla sinistra primi paris in mare, supina ( $\frac{33}{2}$ ).
- 3 e. Maxilla sinistra secundi paris in mare, supina ( $\frac{33}{2}$ ).
- 3 f. Maxillipes sinister in mare, supinus ( $\frac{33}{2}$ ).
- 3 g. Pars apicalis maxillipedis sinistri in mare, supinus ( $\frac{56}{1}$ ).
- (Fig. 4—4 u. *Ceratothoa Banksii* (Leach); fig. 4—4 i partes oris in femina non ovigera, maxillipedibus in evolutione; fig. 4 k pars oris in femina ovigera; fig. 4 l—4 o partes oris in mare adulto; fig. 4 p—4 t partes oris in pullo stadii II<sup>di</sup>; fig. 4 u—4 v pes et pleopodum in pullo stadii II<sup>di</sup>.)
- Fig. 4. *Ceratothoa Banksii* (Leach), caput feminæ magnæ non ovigeræ, maxillipedibus in evolutione, supinum ( $\frac{6}{1}$ ); b—c. clypeus-labrum, d. mandibula (ante in apertura oris prominens), f. maxilla secundi paris, g. maxillipes, h. paragnatha.

- Fig. 4 a. Clypeus-labrum in femina non ovigera, a latere anteriore exhibita ( $\frac{8}{1}$ ); *a.* clypeus, *b.* labrum.  
 — 4 b. Mandibula sinistra in femina non ovigera, supina ( $\frac{9}{1}$ ).  
 — 4 c. Pars apicalis mandibulae sinistrae in femina non ovigera, supina ( $\frac{20}{1}$ ).  
 — 4 d. Pars apicalis mandibulae dextrae in femina non ovigera, supina ( $\frac{20}{1}$ ).  
 — 4 e. Maxilla sinistra primi paris in femina non ovigera, supina ( $\frac{9}{1}$ ); *l'*. lacinia artic. primi.  
 — 4 f. Pars apicalis laciniae articuli tertii in maxilla sinistra primi paris, supina ( $\frac{25}{1}$ ).  
 — 4 g. Maxilla sinistra secundi paris in femina non ovigera, supina ( $\frac{9}{1}$ ).  
 — 4 h. Pars distalis maxillae sinistrae secundi paris, supina ( $\frac{23}{1}$ ).  
 — 4 i. Maxillipes sinister in femina magna non ovigera, supinus ( $\frac{9}{1}$ ).  
 — 4 k. Maxillipes sinister in femina ovigera, supinus ( $\frac{27}{4}$ ); *1.* articulus primus, *a.* lamina vibrans artic. primi, *2.* articulus secundus, *b.* lamina vibrans artic. secundi.  
 — 4 l. Caput in mare adulto, supinum ( $\frac{10}{1}$ ); *f.* maxilla secundi paris, *g.* maxillipes.  
 — 4 m. Mandibula sinistra in mare adulto, supina ( $\frac{20}{1}$ ).  
 — 4 n. Maxilla sinistra secundi paris in mare adulto, supina ( $\frac{20}{1}$ ).  
 — 4 o. Maxillipes sinister in mare adulto, supinus ( $\frac{20}{1}$ ).  
 — 4 p. Clypeus et labrum in pullo stadii II<sup>di</sup>, a latere anteriore exhibita ( $\frac{56}{1}$ ).  
 — 4 q. Mandibula sinistra in pullo stadii II<sup>di</sup>, supina ( $\frac{56}{1}$ ).  
 — 4 r. Maxilla sinistra primi paris in pullo stadii II<sup>di</sup>, supina ( $\frac{56}{1}$ ).  
 — 4 s. Maxilla sinistra secundi paris in pullo stadii II<sup>di</sup>, supina ( $\frac{56}{1}$ ).  
 — 4 t. Maxillipes sinister in pullo stadii II<sup>di</sup>, supinus ( $\frac{56}{1}$ ). Exopodium non bene definitum.  
 — 4 u. Pes sinister quinti paris in pullo stadii II<sup>di</sup>, supinus ( $\frac{23}{1}$ ).  
 — 4 v. Pleopodium sinistrum secundi paris in pullo stadii II<sup>di</sup>, supinum ( $\frac{23}{1}$ ).  
 Fig 5. *Cymothoa sp.*, pes sinister quinti paris in pullo natante minuto stadii III<sup>iii</sup>, supinus ( $\frac{23}{1}$ ).  
 — 5 a. Pleopodium sinistrum secundi paris in pullo natante minuto stadii III<sup>iii</sup>, supinum (c.  $\frac{16}{1}$ ).
-

## Cirolanidæ.

Contribution à la connaissance de quelques familles de Crustacés Isopodes.

Par

H. J. Hansen.

Les descriptions détaillées des genres et des espèces étant données en latin, il ne sera pas question ici de cette partie de la dernière moitié de mon mémoire, car les remarques relatives à la biologie, à la synonymie, etc. ne se prêtent pas bien à être résumées, et elles ne seront sans doute pas non plus difficiles à lire. L'exposé fait en danois de la structure de la bouche chez les 6 familles que j'ai établies peut bien être considéré comme la partie la plus importante de mon mémoire, dont il remplit 35 pages (p. 275—310); j'y décris en détail la forme des différents organes buccaux, leurs mouvements et leur coopération, et dépeins ensuite la manière de vivre des animaux de chaque famille, en tant qu'elle est connue, en la mettant en connexion avec la structure de la bouche. Mais ceux des caractères tirés de la structure de la bouche qui se prétaient le mieux à un emploi systématique, ayant été plus tard réunis et présentés en latin dans un *Conceptus systematicus* (p. 310—316), et en outre dans une petite *Tabula analytica familiarum* (p. 317), ces deux aperçus systématiques peuvent jusqu'à un certain point remplacer un résumé, et aussi ne mentionnerons-nous ici que quelques-uns de ces caractères.

Je me bornerai dans ce résumé à exposer les principales particularités de la première partie de mon mémoire, le plus souvent cependant sans entrer dans de grands développements, de sorte qu'il ne pourra nullement tenir lieu d'une étude du texte danois, mais en récapitulera plutôt les différentes parties en y renvoyant le lecteur.

Dans *Pintroduction* (p. 239—245), je rends compte de l'étendue et de la nature de mes matériaux; j'ai examiné 34 espèces, dont 24 sont regardées comme nouvelles; on en connaissait auparavant environ 43 des 4 premières familles. Je donne ensuite le plan de mon mémoire et enfin celui des figures en indiquant comment il a été procédé pour leur exécution. C'est ainsi, par exemple, que j'ai toujours, autant que possible, représenté les 2<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> paires de pattes thoraciques des différentes espèces (choix dont

j'indique les raisons), que j'ai toujours employé le même grossissement pour les pattes du même animal, toujours pris les pattes du côté gauche et toujours représenté les pattes vues d'en bas et les mêmes pattes des différentes espèces à peu près dans la même position; le même principe a été suivi pour la représentation des membres buccaux. L'exécution des figures a souvent été assez compliquée; les contours des pattes, par exemple, ont été dessinés d'après des préparations dans la glycérine, à la lumière transmise, mais pour que les ombres fussent bien rendues, on a débarrassé les pattes de la glycérine qui y adhérait, après quoi on les a dessinées à la lumière directe sous un microscope de dissection.

Dans **Paperçu historique** (p. 246—255), sont indiquées toutes les anciennes publications et, pour la période de 1866—1889, seulement les plus importantes. L'ouvrage de M. J. C. Schiødte, *Krebsdyrenes Sugemund*, est examiné en détail, je relève surtout ses belles recherches anatomico-physiologiques, mais ne puis admettre sa systématique ni une partie de ses considérations morphologiques; en ce qui concerne la morphologie des mâchoires et des pattes-mâchoires, je suis (sauf une petite correction dans le 3<sup>e</sup> article de la 2<sup>e</sup> paire de mâchoires) l'interprétation que j'ai exposée, p. 509—510, dans mon résumé des résultats que l'expédition de la «Dijmphna» a eus pour la zoologie et la botanique. — Le *Bathynomus* A. Milne-Edw. est l'objet d'une discussion détaillée (p. 252); d'après la figure de M. Filhol, les organes buccaux et les pattes thoraciques ont, chez ce genre, absolument la même structure que chez un *Cirolana* à pattes sans poils natatoires; c'est pourquoi je le rapporte à la famille des *Cirolanidae* et ne puis me ranger à l'opinion de M. A. Milne-Edwards, qui en fait le type d'un nouveau groupe, les «Cymothoadiens branchifères». Je fais observer (p. 253) qu'il est impossible de se former une idée claire du genre *Corilana*, établi per M. Kossmann, et je montre plus loin (p. 254—255) qu'il est douteux que le genre *Anuropus* Bedd. appartienne à la division des Isopodes dont il est question ici, car les organes buccaux sont représentés d'une manière beaucoup trop incomplète, et notamment la 1<sup>re</sup> paire de pattes thoraciques et les uropodes diffèrent beaucoup des mêmes organes chez tous les autres animaux appartenant aux *Cirolanidae*—*Cymothoidea*. — Enfin je mentionne les Contributions à l'étude des Bopyriens, 1887, de MM. Giard et Bonnier, parce que ces auteurs y ont montré, sur des femelles vivantes ovifères du *Cepon elegans*, que les pattes-mâchoires sont transformées de la même manière, mais à un bien plus haut degré que chez les formes examinées dans ce travail, et, en même temps, que la première paire de lames incubatrices est constamment en mouvement et produit par là un courant d'eau dans la cavité incubatrice. Déjà avant la publication de l'ouvrage des deux auteurs français, j'avais trouvé, chez les femelles ovifères du groupe *Cirolana*—*Cymothoa*, les grandes formations de lamelles sur les pattes-mâchoires et supposé qu'elles devaient servir à faire passer de l'eau fraîche dans la cavité incubatrice, hypothèse que confirment les observations de MM. Giard et Bonnier sur le *Cepon elegans*. Je dois du reste rectifier ici une erreur que j'ai commise p. 255 et 265. J'avais en effet compris du texte du MM. Giard et Bonnier que le courant d'eau était dirigé d'arrière en avant, par conséquent que l'eau sortait de la cavité incubatrice sous l'impulsion des pattes-mâchoires et de la 1<sup>re</sup> paire de lames incubatrices; mais en regardant plus tard la position que le

*Grapsicepon Edwardsii* Giard & Bonn. et les espèces du genre *Gyge* occupent sous la carapace d'un Crustacé Décapode, et en la comparant avec l'exposé des deux auteurs dont il s'agit, je reconnus que mon interprétation était inexacte et que le courant est dirigé d'avant en arrière, ou, en d'autres termes, que l'eau est poussée dans la cavité incubatrice. Je n'ai pas observé la direction du courant d'eau chez les *Cirolanidae*—*Cymothoidae*, mais puis citer ce qui suit.

Le *Cymothoa eremita* (Brünniche), qu'on rencontre souvent dans la cavité buccale du *Stromateus paru* (Bloch), et qui se tient sur la langue de ce poisson, tourne toujours, semble-t-il, d'après les observations de MM. Brünniche et Lütken (voir Lütken, op. cit. n° 2), la tête en avant vers le museau du poisson, et il en est de même du *Glossobius linearis* (Dana) d'après un exemplaire du musée; comme l'eau circule d'avant en arrière dans la bouche du poisson, il est fort vraisemblable qu'elle circule dans le même sens dans la cavité incubatrice du *Cymothoa*. Si cette conclusion est exacte, il y a tout lieu de supposer que le courant d'eau est aussi dirigé d'avant en arrière chez les *Cirolanidae* et les autres familles.

Dans le chapitre intitulé **systematique et caractères** (p. 263—274), je donne d'abord un aperçu des caractères qui sont communs aux *Cirolanidae*—*Cymothoidae* dans le squelette tégumentaire. Je montre ensuite que c'est la structure très différente de l'abdomen et des pattes abdominales chez les Isopodes qui fournit la plupart des meilleurs caractères pour la division de cet ordre en groupes. Lorsqu'il est question de ces animaux, il faut cependant ne pas oublier que, dans la famille des *Cymothoidae*, le «Pullus stadii II<sup>di</sup>» (Sch. & Mein.) a l'abdomen construit comme chez les *Aegidae*, par exemple, tandis que, chez les exemplaires plus grands de la même famille, les pattes abdominales sont dépourvues de cils et les crochets du bord interne du pédoncule des pléopodes ne peuvent servir ou font défaut. Les caractères les plus importants du groupe *Cirolana*—*Cymothoa* sont les suivants: 1) l'abdomen se compose de 6 segments non soudés entre eux, et dont le dernier est grand; chaque pléopode comprend un large pédoncule dont le bord interne, au moins chez les 4 paires antérieures, est muni de crochets, et 2 grandes rames foliacées, en général fortement ciliées et dont les dimensions ne diffèrent pas beaucoup; les uropodes sont formés d'un pédoncule et de deux rames mobiles, lamelli-formes et inarticulées qui, avec le dernier segment de l'abdomen, constituent un éventail natatoire ordinairement bien garni de cils. 2) Les 5 premiers segments thoraciques portent des lames incubatrices bien développées. 3) Chez la femelle ovifère, le 1<sup>er</sup> article de la patte-mâchoire, son épipodite et la face externe de son 2<sup>e</sup> article sont munis de grandes ou très grandes lamelles plus ou moins ciliées. 4) Le segment thoracique antérieur est libre. 5) Le pédoncule des antennes ne se compose que de 5 ou 4 articles (il n'est pas nettement distinct du flagellum chez les *Cymothoidae*). 6) La «pars molaris» des mandibules ne sert jamais à la mastication, et elle est souvent très réduite ou manque; les palpes sont bien développées. 7) Le 1<sup>er</sup> article des pattes thoraciques, dans les 6 segments thora-

ciques postérieurs, est développé comme un épimère délimité par une suture ou une articulation peu mobile. 8) Sauf la présence de l'appendix masculina, il n'y a entre le mâle et la femelle, aucune différence dans la structure des pléopodes; cet appendice est étroit, sans cavité intérieure et s'étend jusqu'à l'extrémité de la rame interne ou un peu en dehors.

Vient ensuite (p. 266—268) la division du groupe *Cirolana*—*Cymothoa* en 6 familles. Cette division est surtout basée sur la structure de la bouche, qui chez chaque famille isolément est assez uniforme, mais très particulière chez chacune des 5 premières familles, et les différences extérieures sont même si grandes qu'il suffit de regarder avec une assez forte loupe la face inférieure de la tête d'un individu pour déterminer aussitôt la famille à laquelle il appartient (si toutefois on n'est pas tombé sur une femelle à grandes lames incubatrices qui recouvrent en très grande partie les organes buccaux). La 6<sup>e</sup> famille, celle des *Cymothoidæ*, se rapproche beaucoup par la structure de la bouche du genre *Rocinela* de la famille des *Ægidae*, mais s'en distingue par les griffes des 4<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup> (et 7<sup>e</sup>) paires de pattes thoraciques. Ces «griffes» sont formées chacune du 7<sup>e</sup> article et de la griffe elle-même, et ces deux éléments semblent souvent n'en former qu'un. J'ai du reste constaté que le développement du 7<sup>e</sup> article et de la griffe, surtout des pattes des paires antérieures chez toutes les familles, est en relation avec la structure de la bouche et, conjointement avec celle-ci, fournit pour les familles les meilleurs caractères tirés du squelette tégumentaire. Le changement de sexe ne se produit certainement que chez les *Cymothoidæ*.

Dans les pages suivantes (p. 268—274), je rends compte des autres nombreuses différences qu'on peut trouver dans les diverses parties du squelette tégumentaire; j'en examine la nature et cherche si elles peuvent servir à distinguer les sexes ou fournir des caractères spécifiques ou même génériques. Relativement à l'appendix masculina (p. 268), je fais remarquer qu'il apparaît de très bonne heure avant que les animaux soient à demi développés et même plus tôt (*Cymothoidæ*), mais qu'il n'est complètement développé que lorsque l'animal est adulte, et que sa forme fournit souvent un bon caractère spécifique, quelquefois même, conjointement avec son origine, des caractères génériques (*Eurydice*). Les différences sexuelles secondaires ne sont bien caractérisées que chez des espèces des genres *Eurydice*, *Corallana* et *Alcirona*; chez le *Corallana tricornis* et le *Cor. quadricornis* et surtout chez l'*Eurydice elegantula*, on trouve dans différentes parties du corps des différences sexuelles, qui sont mentionnées p. 269 et exposées plus loin en latin dans le chapitre qui traite de la description des genres et des espèces. — J'indique, p. 270, les particularités de structure qui fournissent des caractères spécifiques, et fais observer que certains caractères dont les auteurs se servent souvent doivent être employés avec beaucoup de circonspection. C'est ainsi que le degré de contraction de l'animal joue un très grand rôle dans la détermination des rapports entre la longueur et la largeur du corps, entre la longueur relative des segments et dans la forme apparente des épimères; les auteurs la décrivent en général, mais la partie antérieure des épimères est d'ordinaire plus ou moins cachée, et leur meilleur caractère, qui n'est pas influencé par la contraction, à savoir la forme de leurs angles postérieurs libres, n'est pas rendu

avec une exactitude suffisante. Le nombre des articles dans le flagellum des antennules et des antennes dépend de l'âge de l'animal et quelquefois du sexe, et, en ce qui concerne le flagellum des antennes, il n'est pas non plus constant chez les animaux adultes, de sorte qu'il faut être circonspect dans l'emploi de ces caractères. Si tous les segments de l'abdomen sont visibles, ou si le 1<sup>er</sup> et une partie du 2<sup>e</sup> sont recouverts par le 7<sup>e</sup> segment thoracique, cela dépend souvent aussi de la contraction de l'animal (voir les figures du *Cirolana Cranchii*, Pl. III, Fig. 3 et Fig. 3 h); par contre, la forme des bords latéraux du 1<sup>er</sup> et du 4<sup>e</sup> segment abdominal donne souvent de bons caractères, qui cependant sont très rarement mentionnés dans le texte.

Comme caractères génériques je n'ai pu me servir que d'un petit nombre de points, en particulier des différences dans le pédoncule des antennes (*Eurydice*), dans les organes buccaux (*Alcironidæ*) et dans les pattes abdominales (l'opercule formé des pléopodes de la 1<sup>re</sup> paire chez le *Conilera*). Chez le genre *Eurydice* et les Pulli des *Cymothoidæ*, la tige des uropodes ne se prolonge que très peu en dedans et en arrière, et plusieurs espèces du genre *Eurydice* comme aussi de jeunes individus de la famille des *Cymothoidæ* n'ont été pêchés qu'en haute mer; chez les autres genres mentionnés ici, la tige des uropodes présente un prolongement lamelliforme toujours bien visible, d'ordinaire très notable, dirigé en dedans et en arrière avec une longue articulation pour la rame interne; les espèces seulement pélagiques, comme le *Barybrotus agilis* et le *Cirolana elongata*, forment jusqu'à un certain point une transition des espèces précédentes aux jeunes individus des genres *Eurydice* et *Cymothoa*, en ce sens que, chez eux et surtout chez le *Barybrotus*, ce prolongement est plus court que chez les espèces qui n'ont pas été pêchées souvent en haute mer. On peut maintenant conclure que la longueur du dit prolongement de la tige des uropodes (et de l'articulation de la rame interne) est en raison inverse du développement de l'abdomen en organe natatoire, car l'éventail abdominal, chez les formes pélagiques, doit absolument (voir plus loin) être l'organe le mieux approprié à une natation rapide. On peut également dire que le développement de l'abdomen et sa longueur relativement au reste du corps sont proportionnels à son développement en organe natatoire (voir mes figures et celles que Schiødte a données des jeunes *Cymothoidæ*).

Après les organes buccaux, les pattes thoraciques sont certainement les organes qui présentent la structure la plus variée et la plus intéressante. Les différences dans la structure des griffes ont été en peu de mots mentionnées plus haut; quant aux autres, je n'ai pas cru qu'elles pussent être employées comme caractères de familles, ni même quant à la plupart d'entre elles — au moins pour le moment — comme caractères génériques. J'appellerai ici l'attention sur les singulières transformations que les pattes des 4 paires postérieures, en particulier, et, parmi elles, surtout celles de la 7<sup>e</sup> paire, ont à subir pour devenir propres à la natation. Dans le seul genre *Cirolana*, on trouve que notamment les pattes de la 7<sup>e</sup> paire présentent un développement très variable; tantôt leur 2<sup>e</sup> article (épimère = 1<sup>er</sup> article) est allongé, aplati et muni de poils souvent ramifiés le long des 3 bords (comme chez le *Cir. borealis*), tantôt ce 2<sup>e</sup> article n'est ni allongé ni aplati, tandis que c'est le cas du 3<sup>e</sup>, du 4<sup>e</sup> et du 5<sup>e</sup> article (*Cir. concharum* et *Cir. eximia*). Chez les espèces du genre *Eurydice* et chez le *Corallana Warmingii*, on rencontre un



développement un peu différent et une autre disposition (qui varie chez ces deux genres) des poils natatoires toujours non ramifiés, mais ces caractères rappellent en partie la structure du *Cir. concharum*. Chez beaucoup d'espèces du genre *Cirolana* et la plupart des autres genres, les pattes ne subissent pas de telles transformations et sont dépourvues de poils natatoires. Les pattes des paires antérieures peuvent aussi présenter des particularités intéressantes; je me réfère ici principalement au *Cirolana elongata* (Pl. III, Fig. 4 g).

A cause de cette grande variété dans le développement des organes natatoires, et vu la circonstance que plusieurs espèces sans poils natatoires ressemblent à beaucoup d'autres égards à des espèces munies de ces poils, je n'ai pas voulu pour le moment me servir de caractères tirés de là pour la division du genre *Cirolana*, d'autant plus que je craignais qu'il n'y eût des animaux qui formassent des transitions sous ce rapport.

Les jeunes individus de la famille des *Cymothoidæ* ont souvent été pêchés en haute mer, et ils sont sans doute tous pélagiques. Je communique, p. 273, de seconde main, une observation faite sur un jeune *Cymothoa*, long de 9,4 mm., qui nageait avec une rapidité étonnante, et était en même temps très phosphorescent. L'examen de cet animal a montré que ses pléopodes étaient entièrement nus, et que le bord interne de la rame externe des uropodes, les deux bords de leur rame interne et la partie postérieure du bord interne faiblement tiré en arrière, étaient seuls garnis de poils natatoires assez courts, serrés et ramifiés. Les pattes d'un tel jeune individu étant, comme on sait, dépourvues de poils natatoires, on peut conclure de cette observation qu'il nageait seulement à l'aide de son éventail abdominal, et cela s'accorde bien avec ce qui a été dit plus haut, à savoir que l'éventail abdominal est l'organe natatoire par excellence; quant aux espèces qui, comme le *Cirolana elongata* et le *Barybrotus agilis*, ont en même temps de bonnes pattes natatoires, elles emploient celles-ci pour nager plus lentement, et l'abdomen ou ce dernier conjointement avec les pattes lorsqu'elles veulent aller très vite. Il y a aussi des formes, telles que le *Cirolana borealis*, dont les pattes sont très bien transformées en vue de la natation, mais dont l'abdomen ne l'est pas au même degré; cette espèce nage du reste parfaitement, mais elle n'a jamais été pêchée en haute mer.

Du chapitre qui traite de la **structure de la bouche** (p. 275—310), je ne mentionnerai ici qu'un très petit nombre de points. Le premier est la remarquable transformation de la patte-mâchoire chez toutes les femelles munies d'une cavité incubatrice. Le 1<sup>er</sup> article de la patte-mâchoire, l'épipodite et le 2<sup>e</sup> article sont munis chacun d'une grande lamelle qui, certainement, a la même fonction que les formations analogues chez le *Cepon elegans* (voir plus haut p. 421); je ne saurais dire si la 1<sup>re</sup> paire de lames incubatrices sert à faire entrer de l'eau dans la cavité incubatrice. Les plus petites parmi les lamelles ci-dessus mentionnées sont celles des *Cirolanidæ*, les plus grandes, celles des *Ægidæ* et des *Cymothoidæ*. Chez ces derniers, la 1<sup>re</sup> paire de lames incubatrices ne s'étend pas tout à fait jusqu'au bord de la lamelle du 2<sup>e</sup> article de la patte-mâchoire; chez les *Ægidæ*, par contre, elle recouvre complètement les pattes-mâchoires, bien plus l'ouverture même de la bouche (et tous les organes buccaux, à l'exception de la partie moyenne antérieure de la lèvre supérieure, du clypeus et de la plus grande partie

des palpes des mandibules), de sorte que les femelles ovifères ne peuvent se nourrir elles-mêmes. Chez la femelle ovifère du *Rocinela*, l'armature de crochets à l'extrémité distale des pattes-mâchoires a disparu, la 2<sup>e</sup> paire de mâchoires est un peu aplatie, avec des poils sur le bord externe, la 1<sup>re</sup> paire de mâchoires va en s'amincissant et est en partie garnie de duvet le long du bord externe; telles sont les différences entre le mâle et la femelle non ovifère, d'une part, et la femelle ovifère, de l'autre.

Un autre point qui doit être mentionné, c'est que chez la famille des *Cymothoidæ* et spécialement chez les formes (p. ex. le *Ceratothoa*) dont la structure de la bouche s'écarte le plus de celle du *Rocinela*, tous les organes buccaux, à mesure que l'animal croît, subissent un changement de forme bien marqué, de sorte qu'il y a une différence très notable entre la structure de la bouche chez le *Pullus stadii* II<sup>ad</sup> et chez la grande femelle sans lames incubatrices; les différences sont surtout apparentes dans le labrum-clypeus, le tranchant et les palpes des mandibules et les pattes-mâchoires. Les figures de la Pl. X montrent clairement ces différences.

Enfin je mentionnerai brièvement deux petites rectifications des vues exposées sur la morphologie des organes buccaux dans le compte-rendu des résultats obtenus dans l'expédition de la «Dijmphna». La première est relative au «lacinia mobilis» des mandibules. Je crois en effet maintenant que la partie antérieure ferme et épaisse (que j'avais auparavant prise pour la lacinia mobilis) et la partie à peau molle et avec des soies qui est située derrière doivent être interprétées comme formant ensemble la lacinia, c'est-à-dire un lobe en partie à peau molle et muni de soies, en partie ferme en avant, et que c'est sa face antérieure, souvent terminée en un prolongement court et épais, qui peut être appelée «cuspis lacinia». La seconde rectification a pour objet les 2 lobes terminaux qui, chez la plupart des Isopodes comme aussi chez les *Cirrolanidæ*, se trouvent sur la 2<sup>e</sup> paire de mâchoires. Ces deux lobes libres et dirigés en avant, que je regardais comme appartenant au 2<sup>e</sup> article et comme provenant peut-être de la division secondaire d'un article, je reconnais maintenant qu'ils appartiennent à un seul article (le 3<sup>e</sup> de la mâchoire), car j'ai constaté que le fragment de chitine que je prenais alors pour le 4<sup>e</sup> article (op. cit. Pl. XX, Fig. 1 a et 3 f) est recouvert d'une peau molle, et ne peut par suite être interprété comme la paroi chitineuse d'un article.

---

Analytiske Undersøgelser

over

# Primtalmængderne.

Af

**L. Lorenz.**

---

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og matematisk Afd. V. 4.

---

**Kjøbenhavn.**

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1891.



I sin berømte Afhandling «über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse»<sup>1)</sup> har Riemann taget som Udgangspunkt den Euler'ske Ligning<sup>2)</sup>

$$\sum n^r \cdot \prod (1 - p^r) = 1, \quad (1)$$

hvor Summen  $\sum$  omfatter alle hele Tal  $n$ , og Produktet  $\prod$  alle Primtal  $p$ .

Fra dette Udgangspunkt fører Analysen ikke til den direkte Bestemmelse af Funktionen  $\theta(x)$ , Mængden af Primtal op til  $x$  ( $x$  inkl.), men nærmest til en anden Funktion  $\vartheta(x)$ , for hvilken Dr. J. P. Gram<sup>3)</sup> har indført Betegnelsen «Antallet af dividerede Primtalpotenser», og som er defineret ved Ligningen

$$\vartheta(x) = \theta(x) + \frac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \dots \quad (2)$$

Det er denne Funktion, som Riemann har søgt at bestemme under analytisk Form. At man fra denne atter kan komme tilbage til Funktionen  $\theta(x)$  er ogsaa paavist af Riemann, men det maa dog bemærkes, at enhver analytisk Fremstilling af  $\vartheta(x)$  sandsynligvis altid, i Modsætning til den taltheoretiske exakte Bestemmelse, maa gaa ud fra den øvre uendelige Grænse for Talrækken og herfra til en approximeret Bestemmelse for de meget store Værdier af  $x$ , hvorved man da udelukker sig fra Bestemmelsen af  $\vartheta(x)$  for de smaa Tals Vedkommende og saaledes fra Bestemmelsen af  $\theta(x)$  ved Hjælp af  $\vartheta(x)$ . Denne sidste Funktion kan imidlertid ogsaa, ligesaa vel som selve Primtalmængden, fremstilles ved Tavler, dannede med Optællingen af Primtal som Grundlag, og det kan derfor ogsaa praktisk være tilstrækkeligt at bestemme  $\vartheta(x)$ .

Skjøndt Riemann's Bevis for den af ham udviklede analytiske Formel for  $\vartheta(x)$  ikke kan godkjendes, er der dog resulteret det blivende Udbytte af hans Arbejde, at det fundne Udtryk for den aperiodiske Del af  $\vartheta(x)$ , nemlig Integrallogarithmen  $Li(x)$ , i det mindste inden for de Grænser, hvortil vi kjende Primtalmængden, har vist sig praktisk fuldkommen tilfredsstillende og alle andre tidligere ad empirisk Vej fremstillede Formler langt overlegen.

<sup>1)</sup> Monatsbericht d. K. Acad. d. W. zu Berlin, 3. Nov. 1859, S. 671.

<sup>2)</sup> Euler: Introductio in Analysin Infinitorum T. 1. p. 237. 1748.

<sup>3)</sup> Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, II. 6. S. 185.

Dette sidste har navnlig været paavist af Glaisher<sup>1)</sup> for hver 50000 indtil 9 Millioner og for 10 og 100 Millioner efter de af Meissel beregnede Primalmængder<sup>2)</sup>. Afvigelseerne ere fremstillede grafisk, og for den Riemann'ske Formels Vedkommende viser Diagrammet en ligelig Fordeling af positive og negative Afvigelser. For de højere Tals Vedkommende synes disse Afvigelser at udvikle sig til efterhaanden mere og mere regelmæssige, lange Perioder.

Det maa herefter blive den naturlige Gang i den analytiske Undersøgelse over Primalmængderne at vælge det samme Udgangspunkt som Riemann, nemlig den Euler'ske Ligning (1), fordi dette umiddelbart fører til Funktionen  $\vartheta(x)$ , hvis aperiodiske Del praktisk har vist sig at være af en simpel Form, at søge denne aperiodiske Del analytisk bestemt saa nøjagtig som muligt, og endelig at søge den periodiske Del af  $\vartheta(x)$  saaledes bestemt ved Rækkeudvikling, at de Led, som ere af højeste Orden med Hensyn til  $x$ , fremtræde i første Række, for saaledes om muligt analytisk at paavise de ovenfor omtalte lange Perioder, som fremtræde ved de meget store Tal. Det er denne Gang i Undersøgelsen, jeg her har fulgt.

Vi ville begynde med en Udvikling af Formen

$$(2^r + 3^r + 4^r + \dots)^s = a^{s(2)} 2^r + a^{s(3)} 3^r + \dots a^{s(x)} x^r + \dots, \quad (3)$$

hvor  $r$  er en vilkaarlig Størrelse,  $s$  et helt Tal og  $a^{s(x)}$  en Koefficient, som vil angive Antallet af de forskellige Maader, paa hvilke  $x$  kan dannes ved Multiplikation af  $s$  hele Tal, heri ikke medregnet Tallet 1.

Sættes endvidere

$$A^s(x) = a^{s(2)} + a^{s(3)} + \dots a^{s(x)}, \quad (4)$$

med hvilket sidste Led Rækken slutter, vil man have

$$A^s(x) - A^s(x-1) = a^{s(x)}. \quad (5)$$

Ved at tage Logarithmen af den identiske Ligning (1) og benytte Rækkeudviklingen for  $\log(1+y)$  efter stigende Potenser af  $y$ , uden Hensyn til Rækkens Konvergens, erholdes ligeledes identiske Udviklinger<sup>3)</sup>, som for  $r=0$  føre til den bekjendte Ligning

$$\vartheta(x) = \frac{A^1(x)}{1} - \frac{A^2(x)}{2} + \frac{A^3(x)}{3} - \dots \quad (6)$$

<sup>1)</sup> James Glaisher: Factor Table for the sixth Million. London 1883.

<sup>2)</sup> Senere har Meissel i Mathm. Ann. Bd. 25, p. 251 beregnet Primalmængden indtil 1000 Millioner. Hans Resultat (50 847 478) er kun 23 Enheder højere end det af Gram efter Riemann's Formel beregnede.

<sup>3)</sup> Jvf. Prof. Jul. Petersens Bemærkninger til Grams Afhandling. Vid. Selsk. Overs. 1884, S. 14.

Denne Række er endelig, da i Rækken (3) alle de første Koefficienter  $\alpha^s$  forsvinde indtil  $\alpha^{(2^s)}$ , og altsaa  $A^s(x)$  ifølge (4) forsvinder for  $x < 2^s$  eller  $s > \frac{\log x}{\log 2}$ . I Stedet for Størrelserne  $A^s(x)$  ville vi dernæst indføre andre Størrelser  $B^s(x)$ , som falde bekvemmere for den følgende Beregning, og som fremkomme ved en lille Forandring af Udviklingen (3), idet vi sætte

$$\left(\frac{1}{2} + 2^r + 3^r + 4^r + \dots\right)^s = \beta^{s(1)} + \beta^{s(2)}2^r + \beta^{s(3)}3^r + \dots + \beta^{s(x)}x^r + \dots, \quad (7)$$

og

$$B^s(x) = \beta^{s(1)} + \beta^{s(2)} + \beta^{s(3)} + \dots + \beta^{s(x)}. \quad (8)$$

Koefficienten  $\beta^{s(x)}$  bliver da her ligeledes et Udtryk for Antallet af de forskellige Maader, hvorpaa  $x$  kan dannes ved Multiplikation af  $s$  hele Tal, men hertil bliver nu at medregne Tallet 1 og paa en saadan Maade, at hvert Tilfælde, hvori 1 indgaar som Faktor, regnes halvt.

Man vil da have

$$A^s(x) = B^s(x) - \frac{s}{2} B^{s-1}(x) + \frac{s(s-1)}{2 \cdot 4} B^{s-2}(x) - \dots + (-1)^{s-1} \frac{s}{2^{s-1}} B^1(x) + \left(-\frac{1}{2}\right)^s, \quad (9)$$

og i Stedet for (6) vil man kunne danne en Udvikling af Formen

$$\vartheta(x) = -a_0 + a_1 \frac{B^1(x)}{1} - a_2 \frac{B^2(x)}{2} + \dots \pm a_{s_1} \frac{B^{s_1}(x)}{s_1}, \quad s_1 > \frac{\log x}{\log 2} - 1, \quad (10)$$

idet Koefficienterne  $a$  ere bestemte ved

$$a_p = 1 + \frac{p}{2} + \frac{p(p+1)}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{p(p+1)\dots(s_1-1)}{2 \cdot 4 \dots (2s_1-2p)}, \quad p > 0, \quad (11)$$

$$a_0 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{s_1} \cdot \frac{1}{2^{s_1}}. \quad (12)$$

Det bemærkes, at Tallet  $s_1$  kan vælges vilkaarligt højere end  $\frac{\log x}{\log 2}$  og kan sættes lig  $\infty$ , hvortil vilde svare  $a_p = 2^p$ ,  $a_0 = \log 2$ . Men udskilles en enkelt Del af Funktionerne  $\vartheta(x)$  og  $B^s(x)$ , er det selvfølgelig kun tilladt at sætte  $s_1 = \infty$ , naar den tilsvarende Række for denne Værdi af  $s_1$  bliver konvergent.

Som Grundlag for mine Undersøgelser har jeg først valgt den Poisson'ske Summationsformel, hvorefter man har exakt

$$\frac{1}{2} + 2^r + 3^r + \dots + x^r = \int_1^{x+\frac{1}{2}} dx_1 x_1^r (1 + 2 \sum \cos 2\pi m_1 x_1), \quad m_1 = 1, 2, \dots, \infty. \quad (13)$$

Med en passende Bestemmelse af Integralernes Grænser vil man ogsaa kunne udtrykke denne Række ophøjet i Potensen  $s$  ved det  $s$ -dobbelte Integral

$$\int dx_1 x_1^r (1 + 2 \sum \cos 2\pi m_1 x_1) \int dx_2 x_2^r (1 + 2 \sum \cos 2\pi m_2 x_2) \dots \int dx_s x_s^r (1 + 2 \sum \cos 2\pi m_s x_s),$$

hvor  $m_1, m_2, \dots, m_s$  i alle Summerne gennemløbe Talrækken 1, 2,  $\dots, \infty$ .

Heri indføres de nye Variable

$$u_1 = x_1 x_2 \dots x_s, \quad u_2 = x_2 x_3 \dots x_s, \quad u_{s-1} = x_{s-1} x_s, \quad u_s = x_s.$$

Da den lavere Grænse for alle de Variable  $x$  er 1, bliver dette ogsaa den lavere Grænse for de nye Variable. Den øvre Grænse for  $u_s = \frac{u_{s-1}}{x_{s-1}}$  bliver  $u_{s-1}$ , for  $u_{s-1}$  tilsvarende  $u_{s-2}$  og saaledes videre indtil  $u_1$ , hvis øvre Grænse vi ville betegne ved  $u$ . Endvidere er  $dx_s = du_s$ ,  $dx_{s-1} = \frac{du_{s-1}}{u_s}$ ,  $dx_{s-2} = \frac{du_{s-2}}{u_{s-1}}$ ,  $\dots$   $dx_1 = \frac{du_1}{u_2}$ .

Paa denne Maade kan man altsaa gjengive Udviklingen (7) ved et  $s$ -dobbelt Integral, og det vil ses, at man nu ogsaa kan afbryde Udviklingen med  $\beta^s(x)x^r$  som sidste Led ved at sætte Grænsen

$$u = x + \frac{1}{2}.$$

Sættes dernæst  $r = 0$ , vil man erholde

$$B^s(x) = \int_1^u du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2} \dots \int_1^{u_{s-1}} \frac{du_s}{u_s} \left(1 + 2 \sum \cos \mu_1 \frac{u_1}{u_2}\right) \dots \left(1 + 2 \sum \cos \mu_{s-1} \frac{u_{s-1}}{u_s}\right) \left(1 + 2 \sum \cos \mu_s u_s\right), \quad (14)$$

hvor for Kortheds Skyld er sat

$$2\pi m_1 = \mu_1, \quad 2\pi m_2 = \mu_2, \quad \dots \quad 2\pi m_s = \mu_s.$$

Ligesom i det enkelte Integral (13) alle Elementer forsvinde, naar  $x_1$  ikke er et helt Tal, saaledes ville ogsaa i dette  $s$ -dobbelte Integral alle Elementer forsvinde undtagen i de Tilfælde, at samtlige Brøker

$$\frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{u_2}{u_3}, \quad \dots \quad \frac{u_{s-1}}{u_s}, \quad \frac{u_s}{1}$$

ere hele Tal.

Idet Multiplikationen af de i Integralet indgaaende indklammede Faktorer udføres, kunne vi ordne Produktet efter Antallet af de indgaaende Summationstegn, og det lader sig da vise, at alle de Integraler, som indeholde det samme Antal Summationstegn, blive ligestore. Lad nemlig  $f$ ,  $g$  og  $h$  betegne hvilke som helst Funktioner, vil man kunne bevise Sætningen

$$\int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} f\left(\frac{u_{p-1}}{u_p}\right) \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g\left(\frac{u_p}{u_{p+1}}\right) h(u_{p+1}) = \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g\left(\frac{u_{p-1}}{u_p}\right) \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} f\left(\frac{u_p}{u_{p+1}}\right) h(u_{p+1}), \quad (15)$$

hvor  $f$  og  $g$  have byttet Plads. Det første Udtryk gaar ved at indsætte  $\frac{u_p}{u_{p+1}}$  i Stedet for  $u_{p+1}$  over til

$$\int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} f\left(\frac{u_{p-1}}{u_p}\right) \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g(u_{p+1}) h\left(\frac{u_p}{u_{p+1}}\right).$$



Indføres endvidere Betegnelsen

$$\phi(u, u_{p+1}) = \int \frac{du}{u} f\left(\frac{u_{p-1}}{u}\right) h\left(\frac{u}{u_{p+1}}\right),$$

vil ovenstaaende Integral kunne udtrykkes ved

$$\begin{aligned} & \int_1^{u_{p-1}} du_p \left[ \frac{d}{du_p} \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g(u_{p+1}) \phi(u_p, u_{p+1}) - \frac{1}{u_p} g(u_p) \phi(u_p, u_p) \right] \\ &= \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} g(u_{p+1}) \phi(u_{p-1}, u_{p+1}) - \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g(u_p) \phi(u_p, u_p), \end{aligned}$$

hvor man i det første Integral kan sætte  $u_p$  for  $u_{p+1}$ . De to Integraler kunne dernæst sammenfattes til det enkelte

$$\int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g(u_p) (\phi(u_{p-1}, u_p) - \phi(u_p, u_p)) = \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} g(u_p) \int_{u_p}^{u_{p-1}} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} f\left(\frac{u_{p-1}}{u_{p+1}}\right) h\left(\frac{u_{p+1}}{u_p}\right),$$

og sættes heri først  $\frac{u_{p-1}}{u_p}$  i Stedet for  $u_p$  og dernæst  $\frac{u_{p-1}}{u_p} u_{p+1}$  i Stedet for  $u_{p+1}$ , bliver Udtrykket identisk med højre Side af Ligning (15), hvorved denne Lignings Rigtighed er bevist.

Gaa vi nu tilbage til det omhandlede Produkt og udtage af den hele Sum af Integraler et enkelt, som indeholder  $\Sigma \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}}$ , men derimod ikke  $\Sigma \cos \mu_{p-1} \frac{u_{p-1}}{u_p}$ , ville vi kunne sætte

$$\dots \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} \Sigma \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \dots = \dots \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} \Sigma \cos \mu_{p-1} \frac{u_{p-1}}{u_p} \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} \dots$$

Paa denne Maade kunne alle Summerne  $\Sigma$  flyttes fra højre til venstre med tilsvarende Forandring af Indices, hvorved alle de Integraler, hvori Antallet af Summationstegn er det samme, blive identiske.

De Integraler, som indeholde et Antal af  $p$  Summationstegn, erholde saaledes Formen

$$\int_1^{u_s} du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2} 2 \Sigma \cos \mu_1 \frac{u_1}{u_2} \dots \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2 \Sigma \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \int_1^{u_{p+1}} \frac{du_{p+2}}{u_{p+2}} \dots \int_1^{u_{s-1}} \frac{du_s}{u_s}.$$

Betegnes dette Udtryk ved  $X_p^s$  og udføres de sidste Integrationer, vil man for  $p < s$  erholde

$$X_p^s = \int_1^u du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2} 2 \Sigma \cos \mu_1 \frac{u_1}{u_2} \dots \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2 \Sigma \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \cdot \frac{(\log u_{p+1})^{s-p-1}}{[s-p-1]} \quad (16)$$

Har man  $p = s$ , sættes først  $\int_1^u du_1 = u \int_1^{\frac{u_1}{u_1} \cdot \frac{u_1}{u}}$ , hvorefter  $\frac{u_1}{u}$  kan ombyttes

med det følgende Summationstegn med Forandring af Indices og saaledes videre. Det sidste Integral bliver

$$\int_1^{u_{s-1}} \frac{du_s}{u_{s-1}} 2 \Sigma \cos \mu_s u_s = 2 \Sigma \frac{\sin \mu_s u_{s-1}}{\mu_s u_{s-1}},$$

og hele Udtrykket faar Formen

$$X_s^s = u \int_1^{\frac{u_1}{u_1}} 2 \Sigma \cos \mu_1 \frac{u}{u_1} \dots \int_1^{u_{s-2}} \frac{du_{s-1}}{u_{s-1}} 2 \Sigma \cos \mu_{s-1} \frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} \cdot 2 \Sigma \frac{\sin \mu_s u_{s-1}}{\mu_s u_{s-1}} \quad (17)$$

Med disse Værdier af  $X_p^s$  og  $X_s^s$  vil Ligningen (14) gaa over til

$$B^s(x) = X_0^s + \frac{s}{1} X_1^s + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} X_2^s + \dots + \frac{s}{1} X_{s-1}^s + X_s^s \quad (18)$$

Det bliver nu først Opgaven at bestemme den aperiodiske Del af  $B^s(x)$ , som jeg vil betegne ved  $\overline{B^s}(x)$ , ligesom ogsaa i det følgende gennemgaaende den aperiodiske Del af en Funktion vil blive betegnet ved en Streg over Funktionsmærket.

Det sidste i (16) indgaaende Integral er

$$\int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2 \Sigma \cos \mu_p \frac{u_p}{u_{p+1}} \cdot \frac{(\log u_{p+1})^{s-p-1}}{[s-p-1]} = \int_1^{u_p} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2 \Sigma \cos \mu_p u_{p+1} \frac{(\log u_p - \log u_{p+1})^{s-p-1}}{[s-p-1]}.$$

Opløses nu det sidste Integral i de to Integraler

$$\int_1^{\infty} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2 \Sigma \cos \mu_p u_{p+1} \frac{(\log u_p - \log u_{p+1})^{s-p-1}}{[s-p-1]} - \int_{u_p}^{\infty} \frac{du_{p+1}}{u_{p+1}} 2 \Sigma \cos \mu_p u_{p+1} \frac{(\log u_p - \log u_{p+1})^{s-p-1}}{[s-p-1]},$$

vil det første af disse kunne betragtes som den aperiodiske Del, det andet som den periodiske Del af Integralet. Det første Integral vil kunne gives Formen

$$C_0 \frac{(\log u_p)^{s-p-1}}{[s-p-1]} + C_1 \frac{(\log u_p)^{s-p-2}}{[s-p-2]} + C_2 \frac{(\log u_p)^{s-p-3}}{[s-p-3]} + \dots,$$

idet Konstanterne  $C_n$  indføres, definerede ved Ligningen

$$C_n = \frac{(-1)^n}{[n]} \int_1^{\infty} \frac{du}{u} (\log u)^n 2 \Sigma \cos \mu u, \quad (19)$$

hvoraf findes

$$\begin{aligned} C_0 &= 0,07721 \dots \\ C_1 &= 0,07281 \dots \\ C_2 &= -0,00484 \dots \\ C_3 &= -0,00034 \dots \\ C_4 &= 0,00009 \dots \end{aligned}$$

Sættes endvidere for Kortheds Skyld

$$C_0 \frac{d}{d \log u} + C_1 \frac{d^2}{(d \log u)^2} + C_2 \frac{d^3}{(d \log u)^3} + \dots = \Delta_{\log u}, \quad (20)$$

vil man kunne give den aperiodiske Del af det sidste Integral i (16) Formen

$$\Delta_{\log u_p} \frac{(\log u_p)^{s-p}}{[s-p]}.$$

Indføres dette Udtryk i (16), vil nu det sidste Integral blive

$$\int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} 2 \sum \cos \mu_{p-1} \frac{u_{p-1}}{u_p} \cdot \Delta_{\log u_p} \frac{(\log u_p)^{s-p}}{[s-p]} = \int_1^{u_{p-1}} \frac{du_p}{u_p} 2 \sum \cos \mu_{p-1} u_p \cdot \Delta_{\log u_{p-1}} \frac{(\log u_{p-1} - \log u_p)^{s-p}}{[s-p]},$$

hvoraf ganske ligesom ovenfor den aperiodiske Del findes bestemt ved

$$\Delta_{\log u_{p-1}} \Delta_{\log u_{p-1}} \frac{(\log u_{p-1})^{s-p+1}}{[s-p+1]} = \Delta_{\log u_{p-1}}^2 \frac{(\log u_{p-1})^{s-p+1}}{[s-p+1]}.$$

Paa denne Maade ses nu let, at den aperiodiske Del af (16) lader sig udtrykke ved

$$\bar{X}_p^s = \int_1^u du_1 \Delta_{\log u_1}^p \frac{(\log u_1)^{s-1}}{[s-1]}, \quad (21)$$

hvorved hele den aperiodiske Del af (18) lader sig bestemme under de symbolske Former

$$\bar{B}_{(x)}^s = \int_1^u du_1 (1 + \Delta_{\log u_1})^s \frac{(\log u_1)^{s-1}}{[s-1]} = \int_0^{\log u} dv e^v (1 + \Delta_v)^s \frac{v^{s-1}}{[s-1]}. \quad (22)$$

Saalænge vi befinde os inden for saadanne Grænser for  $x$ , hvortil Optællingen eller den exakte Beregning af Primalmængden hidtil er naaet, hvilke Grænser ere henholdsvis ved  $\log x = 16$  og  $\log x = 21$ , vil det ikke være uoverkommeligt at bestemme den aperiodiske Del af  $\vartheta(x)$  ved Indsættelsen af dette Udtryk for  $\bar{B}_{(x)}^s$  i Ligningen (10), idet man vælger  $s_1$  lig det største hele Tal i  $\frac{\log x}{\log 2}$ . Resultatet vil neppe kunne fremstilles under en væsentlig simplere Form, saalænge man vil medtage alle de i  $\Delta_v$  indgaaende Konstanter  $C_n$ , men indskrænker man sig til kun at medtage den første af disse,  $C_0$ , vil Rækken (10) blive konvergent for  $s_1 = \infty$ , og Summationen kan da let udføres. Man vil nemlig for  $s_1 = \infty$  og  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ , ... have

$$\begin{aligned}\bar{\vartheta}(x) &= -\log 2 + \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} 2^s \int_0^{\log u} dv e^v \left(1 + C_0 \frac{d}{dv}\right)^s \frac{v^{s-1}}{[s]} \\ &= -\log 2 + \int_0^{\log u} dv e^v \left[ \frac{1}{v} - \frac{e^{-2v}}{v} + \frac{2C_0}{[1]} \frac{d}{dv} v \frac{e^{-2v}}{v} - \frac{2^2 C_0^2}{[2]} \frac{d^2}{dv^2} v^2 \frac{e^{-2v}}{v} + \dots \right],\end{aligned}$$

hvorefter Summationen, udført ved Lagranges Række, giver

$$\bar{\vartheta}(x) = -\log 2 + \int_0^{\log u} dv e^v \left( \frac{1}{v} - \frac{e^{-\frac{2v}{1+2C_0}}}{v} \right) = -\log 2 + Li(u) - Li\left(u^{-\frac{1-2C_0}{1+2C_0}}\right). \quad (23)$$

Heri er  $\frac{1-2C_0}{1+2C_0} = 0,73245\dots$ , og det ses saaledes, at det fundne Udtryk for større Værdier af  $x$  ikke er væsentlig forskjelligt fra Integrallogarithmen af  $x$ , ligesom det heller ingen væsentlig Forskjel havde gjort, om man ogsaa havde sat  $C_0 = 0$ . I dette Tilfælde vilde Resultatet erholde den simple Form

$$\bar{\vartheta}(x) = -\log 2 + \int_{-\log u}^{\log u} \frac{dv}{v} e^v.$$

Praktisk ere disse Resultater saaledes i god Overensstemmelse med det Riemann'ske.

Den periodiske Del af  $X_p^s$  viser sig for  $p < s$  kun at have en underordnet Betydning i Sammenligning med  $X_s^s$ , og da den første tillige lader sig aflede af denne sidste, vil jeg i det følgende indskrænke mig til Behandlingen alene af Funktionen  $X_s^s$ , saaledes som denne er bestemt ved Ligningen (17).

Vi ville først betragte Tilfældet  $s = 2$ , nemlig

$$X_2^2 = u \int_1^u \frac{du_1}{u_1} 2 \Sigma \cos \mu_1 \frac{u}{u_1} \cdot 2 \Sigma \frac{\sin \mu_2 u_1}{\mu_2 u_1},$$

som ved delvis Integration omdannes til

$$X_2^2 = \int_1^u du_1 2 \Sigma \frac{\sin \mu_1 \frac{u}{u_1}}{\mu_1} \cdot 2 \Sigma \cos \mu_2 u_1 = 2 \Sigma \Sigma \int_1^u \frac{du_1}{\mu_1} \left( \sin \left( \mu_1 \frac{u}{u_1} + \mu_2 u_1 \right) + \sin \left( \mu_1 \frac{u}{u_1} - \mu_2 u_1 \right) \right).$$

Heri sættes

$$\mu_1 \frac{u}{u_1} + \mu_2 u_1 = 2v \sqrt{\mu_1 \mu_2 u}, \quad \mu_1 \frac{u}{u_1} - \mu_2 u_1 = 2v' \sqrt{\mu_1 \mu_2 u},$$

hvoraf erholdes

$$u_1 \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 u}} = v \pm \sqrt{v^2 - 1} = -v' + \sqrt{v'^2 + 1}.$$

$v$  har et Minimum for  $v = 1$ , og Betingelsen for, at dette Punkt falder indenfor Integralets Grænser, er

$$1 < \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}} < u,$$

hvilken Betingelse ogsaa kan udtrykkes ved, at baade  $\mu_1$  og  $\mu_2$  skulle være mindre end  $\sqrt{\mu_1\mu_2u}$ . Med voxende  $u$  gaar Fortegnet for  $\sqrt{v^2-1}$  i Minimalpunktet over fra  $-$  til  $+$ . Falder Minimalpunktet under Integralets lavere Grænse ( $\mu_1u < \mu_2$ ), maa Fortegnet indenfor Integralet regnes positivt, og modsat, naar Minimalpunktet ligger over Integralets øvre Grænse ( $\mu_1 > \mu_2u$ ).

Sættes for Kortheds Skyld

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\mu_1\mu_2u} &= a, & \mu_1u + \mu_2 &= av_0, & \mu_1 + \mu_2u &= av_1, \\ \mu_1u - \mu_2 &= av_0, & \mu_1 - \mu_2u &= av'_1, \end{aligned}$$

erholdes saaledes

$$X_2^2 = \Sigma \Sigma \frac{4u}{a} \left[ \int_{v_0}^{v_1} dv \left( 1 \pm \frac{v}{\sqrt{v^2-1}} \right) \sin av + \int_{v'_0}^{v'_1} dv' \left( -1 + \frac{v'}{\sqrt{v'^2+1}} \right) \sin av' \right].$$

Heri er

$$\Sigma \Sigma \frac{4u}{a} \left( \int_{v_0}^{v_1} dv \sin av - \int_{v'_0}^{v'_1} dv' \sin av' \right) = 2 \Sigma \Sigma \frac{\sin \mu_1 \sin \mu_2 u - \sin \mu_1 u \sin \mu_2}{\mu_1 \mu_2},$$

som er 0, da de to Udtryk blive identiske ved Ombytning af Indices.

Vi have altsaa alene tilbage

$$X_2^2 = \Sigma \Sigma \frac{4u}{a} \left[ \int_{v_0}^{v_1} dv \left( \pm \frac{v}{\sqrt{v^2-1}} \right) \sin av + \int_{v'_0}^{v'_1} dv' \frac{v'}{\sqrt{v'^2+1}} \sin av' \right],$$

hvor det dobbelte Fortegn bestemmes af Minimalpunktets Beliggenhed paa den Maade, som ovenfor er angivet.

Først betragtes Integralet

$$\int \frac{dz z}{\sqrt{z^2-1}} e^{azi}$$

med den komplexe Variable  $z = v + wi$ . Udstrækkes Integrationen over en sluttet Kreds, bliver dette Integral Nul, hvorfor vi, naar Integrationen udføres henad en Rektangel, hvis Vinkelspidser ligge i Punkterne 1,  $v_0$ ,  $v_0 + \infty i$ ,  $1 + \infty i$ , erholde

$$0 = \int_1^{v_0} \frac{dv v}{\sqrt{v^2-1}} e^{v ai} + i \int_0^\infty \frac{dw (v_0 + wi)}{\sqrt{(v_0 + wi)^2-1}} e^{a(v_0 + wi)i} - i \int_0^\infty \frac{dw (1 + wi)}{\sqrt{(1 + wi)^2-1}} e^{a(1 + wi)i}.$$

De to sidste Integraler kunne udvikles efter aftagende Potenser af  $a$  i semikonvergente Rækker, hvoraf vi dog, for at begrænse Regningen, saavel her som i det følgende kun medtage de Led, som i det endelige Resultat, Udtrykket for  $X_2^2$ , ikke forsvinde for  $u = \infty$ . Saaledes erholdes:

$$0 = \int_1^{v_0} \frac{dv v}{\sqrt{v^2 - 1}} e^{av_i} + \frac{iv_0 e^{av_0 i}}{a\sqrt{v_0^2 - 1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{(a + \frac{\pi}{4})i},$$

hvoraf følger

$$\int_1^{v_0} \frac{dv v}{\sqrt{v^2 - 1}} \sin av = -\frac{v_0 \cos av_0}{a\sqrt{v_0^2 - 1}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$$

Her er  $v_0$  antaget større end 1. I Tilfælde af, at man netop har  $v_0 = 1$ , bliver selvfølgelig Integralet lig 0. Den tilsvarende Ligning erholdes ved Forandring af  $v_0$  til  $v_1$ .

Hvis nu Minimalpunktet ligger indenfor Integralets Grænser, saa har man

$$1 < \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}} < u,$$

$$a\sqrt{v_0^2 - 1} = \mu_1 u - \mu_2 = av_0', \quad a\sqrt{v_1^2 - 1} = \mu_2 u - \mu_1 = -av_1',$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv \left( \pm \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}} \right) \sin av = -\int_{v_0}^1 \frac{dv v}{\sqrt{v^2 - 1}} \sin av + \int_1^{v_1} \frac{dv v}{\sqrt{v^2 - 1}} \sin av.$$

Ifølge den ovenfor fundne Ligning er altsaa i dette Tilfælde

$$\int_{v_0}^{v_1} dv \left( \pm \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}} \right) \sin av = -\frac{v_0 \cos av_0}{av_0'} + \frac{v_1 \cos av_1}{av_1'} + \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right),$$

medens dette Integral for  $v_0 = 1$  gaar over til

$$\frac{v_1 \cos av_1}{av_1'} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right),$$

og for  $v_1 = 1$  til

$$-\frac{v_0 \cos av_0}{av_0'} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$$

Hvis Minimalpunktet ligger nedenfor Integralets lavere Grænse, har man

$$\mu_1 u < \mu_2, \quad \sqrt{v_0^2 - 1} = -v_0', \quad \sqrt{v_1^2 - 1} = -v_1',$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv \left( \pm \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}} \right) \sin av = -\frac{v_0 \cos av}{av_0'} + \frac{v_1 \cos av_1}{av_1'},$$

og hvis Minimalpunktet ligger ovenfor Integralets øvre Grænse, erholdes

$$\mu_1 > \mu_2 u, \quad \sqrt{v_0^2 - 1} = v_0', \quad \sqrt{v_1^2 - 1} = v_1',$$

$$\int_{v_0}^{v_1} dv \left( \pm \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}} \right) \sin av = -\frac{v_0 \cos av}{av_0'} + \frac{v_1 \cos av_1}{av_1'}.$$

Føjer man hertil, at man i alle Tilfælde har

$$\int_{v_0'}^{v_1'} \frac{dv v}{\sqrt{v^2 + 1}} \sin av = \frac{v_0' \cos av_0'}{av_0} - \frac{v_1' \cos av_1'}{av_1},$$

saa ses det, at  $X_2^2$  vil kunne udtrykkes ved

$$X_2^2 = S_1 \frac{4u}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin \left( a + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} S_2 \frac{4u}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sin \left( a + \frac{\pi}{a} \right)$$

$$+ S_3 \frac{4u}{a^2} \left[ -\frac{v_0 \cos av_0}{v_0'} + \frac{v_1 \cos av_1}{v_1'} + \frac{v_0' \cos av_0'}{v_0} - \frac{v_1' \cos av_1'}{v_1} \right],$$

idet  $S_1$ ,  $S_2$  og  $S_3$  betegne tre Dobbeltsummer med Hensyn til  $m_1$  og  $m_2$ , saaledes at i  $S_1$  og  $S_2$  Produktet  $m_1 m_2$  gennemløber hele Talrækken fra 1 til  $\infty$ , medens enhver af Faktorerne  $m_1$  og  $m_2$  i  $S_1$  kun gennemløber Rækken af Tal som ere mindre end  $\sqrt{m_1 m_2 u}$ , i  $S_2$  Rækken, som netop svarer til  $m_1 = \sqrt{m_1 m_2 u}$  og  $m_2 = \sqrt{m_1 m_2 u}$ . I Dobbeltsummen  $S_3$  gennemløber  $m_1$  og  $m_2$  alle hele Tal fra 1 til  $\infty$  med Undtagelse af de Værdier, som svare til  $m_1 = \sqrt{m_1 m_2 u}$  og  $m_2 = \sqrt{m_1 m_2 u}$ .

Denne sidste Dobbeltsum deler sig ved Indsættelsen af de givne Værdier for  $a$ ,  $v_0$ ,  $v_1$ ,  $v_0'$ ,  $v_1'$  i de to Summer

$$S_3 \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left( -\frac{\mu_1 u + \mu_2}{\mu_1 u - \mu_2} \cos(\mu_1 u + \mu_2) + \frac{\mu_1 u - \mu_2}{\mu_1 u + \mu_2} \cos(\mu_1 u - \mu_2) \right)$$

$$+ S_3 \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2 u}{\mu_1 - \mu_2 u} \cos(\mu_1 + \mu_2 u) - \frac{\mu_1 - \mu_2 u}{\mu_1 + \mu_2 u} \cos(\mu_1 - \mu_2 u) \right),$$

som ved Ombytning af Indices ses at være ligestore. Ved heri at sætte  $\mu_1 = 2\pi m_1$ ,  $\mu_2 = 2\pi m_2$ ,  $u = x + \frac{1}{2}$ , reduceres de to Summer tilsammen til

$$- S_3 \frac{(-1)^{m_1}}{\pi^2 m_1} \left( \frac{1}{m_1(x + \frac{1}{2}) - m_2} + \frac{1}{m_1(x + \frac{1}{2}) + m_2} \right).$$

I denne Dobbeltsum blive ifølge Betingelsen for Summationen de Led at udtage, som svare til  $m_1(x + \frac{1}{2}) - m_2 = 0$ , under hvilken Betingelse Summationen med Hensyn til  $m_2$  let lader sig udføre. Saaledes reduceres ovenstaaende Dobbeltsum til

$$\frac{1}{\pi^2(x + \frac{1}{2})} \sum_{m_1=1}^{m_1=\infty} \frac{(-1)^{m_1}}{m_1^2} = -\frac{1}{12(x + \frac{1}{2})},$$

saa at altsaa hele denne Dobbeltsum, naar de Led, som forsvinde for  $x = \infty$ , ikke medtages, bortfalder. Resultatet kan saaledes under samme Forudsætning udtrykkes ved

$$X_2^2 = \frac{u}{\pi\sqrt{2}} \Sigma \Sigma \frac{\sin\left(4\pi(m_1 m_2 u)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 m_2 u)^{\frac{3}{4}}},$$

hvor den dobbelte Summation skal udføres paa den Maade, som ovenfor er angivet for de to ved  $S_1$  og  $S_2$  betegnede Summationer.

Det viser sig af det her fundne Resultat, at naar de Led bortkastes, som forsvinde for  $u = \infty$ , saa faa i det Integral, hvorved  $X_2^2$  oprindeligt var bestemt, kun de Elementer Betydning, som ligge i Nærheden af Minimalpunktet, og er først dette givet, kan Beregningen lettere udføres paa anden Maade. Er  $u_1$  i Minimalpunktet betegnet med  $v_1$ , vil man have  $v_1 = \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}}$ , og Betingelsen for, at dette Punkt ligger indenfor Integralets Grænser, vil være  $1 < v_1 < u$ . Naar denne Betingelse er opfyldt, kan man udenfor Minimalpunktet sætte  $u_1 = v_1(1 + y)$ , hvor  $y$  kan betragtes som saa lille, at man ved Udviklingen efter Potenser af  $y$  kan bortkaste de Led, som indeholde højere end anden Potens af  $y$ , hvorefter Integralet kan bestemmes ved Integration med Hensyn til  $y$  imellem de ubestemte Grænser  $-\omega$  og  $+\omega$  (nærmere defineret i min Afhandling Vid. Sels. Skr. 6 R., VI, 1 S. 13) eller, hvad der her bliver det samme, fra  $-\infty$  til  $+\infty$ . Falder Minimalpunktet i en af Integralets Grænser, forandres den ene af disse Grænser for  $y$  til 0, og Resultatet maa da halveres, og falder det udenfor Integralets Grænser, bliver Resultatet 0. Paa denne Maade vil man erholde

$$X_2^2 = 2u\sqrt{\pi} \Sigma \Sigma \frac{\sin\left(2\sqrt{\mu_1 \mu_2} u + \frac{\pi}{4}\right)}{(\mu_1 \mu_2 u)^{\frac{3}{4}}},$$

hvor Summationerne maa udføres saaledes, at man faar  $1 < \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}} < u$ , og at i Tilfælde af, at man netop har  $1 = \sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}}$  eller  $\sqrt{\frac{\mu_1 u}{\mu_2}} = u$ , Summen regnes halvt.

Dette Resultat er netop det samme, som ovenfor er fundet, og da Rigtigheden af den sidste Fremgangsmaade saaledes er godtgjort, ville vi nu gjøre yderligere Anvendelse af den paa Beregningen af det almindelige Udtryk  $X_s^s$ .

Det i (17) givne Udtryk kan skrives under Formen

$$X_s^s = 2u \Sigma \Sigma \dots \int_1^u \frac{du_1}{u_1} \dots \int_1^{u_{s-1}} \frac{du_{s-1}}{u_{s-1}} \frac{1}{\mu_s u_{s-1}} \sin\left(\mu_s u_{s-1} \pm \mu_{s-1} \frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} \dots \pm \mu_1 \frac{u}{u_1}\right),$$



de dobbelte Fortegn forstaaede saaledes, at Summen tages af alle de Udtryk, som svare til de forskjellige Kombinationer af Fortegn. Nu vil imidlertid et Minimum eller Maximum kun være mulig, naar alle Fortegn ere positive, og det vil da være bestemt ved

$$\mu_s u_{s-1} = \mu_{s-1} \frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} = \dots \mu_1 \frac{u}{u_1} = \nu, \quad \text{idet } \nu = (\mu_s \mu_{s-1} \dots \mu_1 u)^{\frac{1}{s}}.$$

Betingelsen for, at dette Punkt falder indenfor Integralets Grænser, vil være udtrykt ved

$$\mu_p < \nu, \quad \text{for } p = 1, 2, \dots, s.$$

Betegn vi nu de Variable  $u_1, u_2, \dots, u_{s-1}$  i Minimalpunktet ved  $v_1, v_2, \dots, v_{s-1}$ , ville disse sidste være bestemte ved

$$v_1 = \frac{\mu_1 u}{\nu}, \quad v_2 = \frac{\mu_1 \mu_2 u}{\nu^2}, \quad \dots, v_{s-1} = \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{s-1} u}{\nu^{s-1}} = \frac{\nu}{\mu_s}.$$

Dernæst indføres de nye Variable  $y_1, y_2, \dots, y_{s-1}$  ved Ligningerne

$$u_1 = v_1(1 + (s-1)y_1), \quad u_2 = v_2(1 + (s-2)(y_1 + y_2)), \quad \dots, u_{s-1} = v_{s-1}(1 + y_1 + y_2 + \dots + y_{s-1}).$$

Disse Variable kunne betragtes som saa smaa Størrelser, at de i Koefficienten til den trigonometriske Funktion kunne bortkastes, og at Udviklingen af Vinklen

$$\mu_s u_{s-1} + \mu_{s-1} \frac{u_{s-2}}{u_{s-1}} + \dots \mu_1 \frac{u}{u_1}$$

efter Potenser af  $y_p$  kan standse med Leddene af anden Grad med Hensyn til  $y_p$ . Ved denne Udvikling forsvinde Koefficienterne saavel til  $y_p$  som til  $y_p y_q$ , naar  $p$  og  $q$  ere forskjellige, og Resultatet reduceres til

$$\nu s + \frac{1}{2} \nu (s(s-1)y_1^2 + (s-1)(s-2)y_2^2 + \dots + 2 \cdot 1 y_{s-1}^2).$$

Idet derefter Integrationerne med Hensyn til  $y_1, y_2, \dots, y_{s-1}$  udstrækkes fra  $-\infty$  til  $+\infty$ , vil man erholde

$$\begin{aligned} X_s^s &= 2u[s-1] \Sigma \Sigma \dots \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dy_{s-1} \sin\left(\nu s + \frac{1}{2} \nu (s(s-1)y_1^2 + \dots + 2 \cdot 1 y_{s-1}^2)\right) \\ &= \frac{2u}{\sqrt{s}} \Sigma \Sigma \dots \frac{1}{\nu} \left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\frac{s-1}{2}} \sin\left(\nu s + (s-1)\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Heri er  $\nu = (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_s u)^{\frac{1}{s}} = 2\pi (m_1 m_2 \dots m_s u)^{\frac{1}{s}}$ , altsaa er

$$X_s^s = \frac{u}{\pi \sqrt{s}} \Sigma \Sigma \dots \frac{\sin\left(2\pi s (m_1 m_2 \dots m_s u)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right)}{(m_1 m_2 \dots m_s u)^{\frac{s+1}{2s}}}. \quad (24)$$

Ved denne  $s$ -dobbelte Summation varierer Produktet  $m_1 m_2 \dots m_s$  fra 1 til  $\infty$ , men enhver af de enkelte Faktorer maa ifølge Betingelserne  $\mu_p < \nu$  ikke overskride Grænsen  $(m_1 m_2 \dots m_s u)^{\frac{1}{s}}$ , og er netop denne Grænse naaet, hvilket svarer til Minimalpunktets Beliggenhed i en af de Variable  $u_p$ 's Grænser, saa maa Resultatet regnes halvt.

Sættes  $m_1 m_2 \dots m_s = m$ , kan den  $s$ -dobbelte Summation forandres til en enkelt med Hensyn til  $m$  fra  $m = 1$  til  $m = \infty$ , naar Udtrykket multipliceres med en Faktor  $\gamma_n^{s(m)}$ , som angiver Antallet af de forskellige Maader, hvorpaa  $m$  kan dannes af  $s$  Faktorer, heri medregnet Tallet 1, og under den Betingelse, at ingen af Faktorerne overskrider Grænsen  $n = (mu)^{\frac{1}{s}}$ . De Tilfælde, hvor netop denne Grænse er naaet, regnes halvt. Herved faar Ligningen (24) Formen

$$X_s^s = \frac{u}{\pi \sqrt[s]{s}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \gamma_n^{s(m)} \frac{\sin\left(2\pi s (mu)^{\frac{1}{s}} + (s-1) \frac{\pi}{4}\right)}{(mu)^{\frac{s+1}{2s}}}, \quad n = (mu)^{\frac{1}{s}}. \quad (25)$$

Den her indførte, ovenfor definerede, Størrelse  $\gamma_n^{s(m)}$  vil kunne bestemmes som Koefficienten til  $m^r$  i Udviklingen

$$(1 + 2^r + 3^r + \dots + (n-1)^r + \frac{1}{2} n^r)^s = 1 + \gamma_n^{s(2)} 2^r + \dots + \gamma_n^{s(m)} m^r + \dots \quad (26)$$

Naar man nu indsætter den saaledes fundne Værdi af  $X_s^s$  for  $B^s(x)$  i Rækken (10) for at erholde den hertil svarende periodiske Del af  $\mathcal{J}(x)$ , saa vil man ved at udføre Regningen numerisk for en given stor Værdi af  $x$  og vilkaarligt valgte Værdier af  $m$  finde, at Leddene med voxende  $s$  efter først at have gennemløbet en ganske uregelmæssig Vexlen af Fortegn efterhaanden samle sig i større og større Grupper med ensartede Fortegn, og at det bliver Summationen af disse Grupper, hvoraf Resultatet i det væsentlige kommer til at afhænge. Betingelsen for Dannelsen af en saadan Gruppe lader sig let paavise.

Der sættes

$$2s (mu)^{\frac{1}{s}} + \frac{s-1}{4} = \theta_s,$$

og det efterfølgende Led bestemmes ved Udviklingen

$$\theta_{s+1} = \theta_s + \frac{d\theta_s}{ds} \cdot \frac{1}{1} + \frac{d^2\theta_s}{ds^2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots$$

Hvis nu  $\frac{d^2\theta_s}{ds^2}$  og de følgende Differentialkoefficienter ere meget smaa Størrelser, og hvis  $\frac{d\theta_s}{ds}$  er et ulige helt, positivt eller negativt, Tal, saa vil der i Rækken (10), hvor Leddene have vekslede Fortegn, omkring det til  $s$  svarende Led danne sig en af de omtalte Grupper.

Her er

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2(mu)^{\frac{1}{s}} \left( 1 - \frac{\log mu}{s} \right) + \frac{1}{4}, \quad \frac{d^2\theta_s}{ds^2} = 2(mu)^{\frac{1}{s}} \frac{(\log mu)^2}{s^3}, \dots$$

eller, naar man sætter  $\frac{\log mu}{s} = y$ ,

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2e^y(1-y) + \frac{1}{4}, \quad \frac{d^2\theta_s}{ds^2} = 2e^y \frac{y^3}{\log mu}, \dots$$

Man skal altsaa have, naar  $p$  er et positivt eller negativt Tal eller 0,

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2e^y(1-y) + \frac{1}{4} = 1 - 2p.$$

Da  $y$  skal være positiv, ville negative Værdier af  $p$  ikke være mulige, og man vil finde

$$\begin{aligned} y = 0,83774 \dots, \quad e^y = 2,31114 \dots \text{ for } p = 0, \\ y = 1,19011 \dots, \quad e^y = 3,28746 \dots \text{ for } p = 1, \\ y = 1,40051 \dots, \quad e^y = 4,05727 \dots \text{ for } p = 2, \\ y = 1,55459 \dots, \quad e^y = 4,73317 \dots \text{ for } p = 3. \end{aligned}$$

Det vil dernæst ses, at i det mindste for de lavere Værdier af  $p$  ville  $\frac{d^2\theta_s}{ds^2}$  og de følgende Differentialkoefficienter blive meget smaa, naar  $\log mu$  er et meget stort Tal. Indenfor praktiske Grænser ( $\log x < 21$ ) og for de lavere Værdier af  $m$  er denne Betingelse vel kun i ringe Grad sket Fyldest, men man vil dog altid, naar  $x$  kommer op i Millionernes Række, med Lethed kunne paavise de til de lavere Værdier af  $p$  svarende Gruppedannelser.

I disse Grupper vil altsaa indgaa

$$\sin \pi \theta_s = \sin \pi \left( \log mu \cdot \frac{2e^y + \frac{1}{4}}{y} - \frac{1}{4} \right),$$

eller naar vi give denne periodiske Funktion Formen

$$\sin \pi \theta_s = \sin 2\pi \left( \frac{\log u}{\lambda} + k_m \right), \quad (26)$$

vil  $\lambda$  være bestemt ved

$$\lambda = \frac{y}{e^y + \frac{1}{8}}. \quad (27)$$

Den til den saaledes betragtede Gruppe svarende Del af  $\theta(x)$  vil altsaa, fremstillet ved en Kurve, hvor  $\log u$  eller, hvad der her er det samme,  $\log x$  tages som Abscisse, vise en konstant Afstand  $\frac{1}{2}\lambda$  imellem to paa hinanden følgende Skjæringspunkter med Abscisseaxen.

Til de ovenfor angivne Værdier af  $y$  svarer henholdsvis

$$\lambda = 0,34388 \dots, \quad 0,34875 \dots, \quad 0,33487 \dots, \quad 0,31999 \dots$$

Man vil imidlertid have bemærket, at det netop er de store Værdier af  $s$ , nemlig dem, som ligge i Nærheden af  $\log mu$ , som Dannelsen af disse store Perioder i  $\mathcal{J}(x)$  skyldes, men denne Omstændighed gjør det nødvendigt atter at komme tilbage til den Beregning, som førte os til Ligningen (25). Det vil da erindres, at vi havde udstrakt Variationen af de Variable  $y_p$  til begge Sider i det uendelige, hvad der kan forsvares, saasnart  $y_p$  blot overskrider visse snævre Grænser. Men naar selve Antallet  $s$  af Variable og Integraler bliver saa stort, at  $u^{\frac{1}{s}}$  ikke længere kan betragtes som et stort Tal, hvilket netop her er Tilfældet, saa tør Variationen af  $y_p$  ikke udstrækkes saa vidt. Følgen heraf maa da blive, at  $\theta_s$  nærmer sig, især for de laveste Værdier af  $p$ , stærkt til sin laveste Grænse, som er  $2s(mu)^{\frac{1}{s}}$  plus en af  $s$  uafhængig Konstant. Gaa vi til selve denne Grænse, ville vi have

$$\frac{d\theta_s}{ds} = 2e^y(1-y) = 1 - 2p,$$

og de heraf beregnede Værdier af  $y$  ville være

$$\begin{aligned} y &= 0,76803 \dots, & e^y &= 2,15553 \dots \text{ for } p = 0, \\ y &= 1,15718 \dots, & e^y &= 3,18097 \dots \text{ for } p = 1, \\ y &= 1,37809 \dots, & e^y &= 3,96731 \dots \text{ for } p = 2, \\ y &= 1,53736 \dots, & e^y &= 4,65232 \dots \text{ for } p = 3. \end{aligned}$$

Perioden  $\lambda$  vil nu være at bestemme af

$$\lambda = ye^{-y}, \tag{28}$$

og til de beregnede Værdier af  $y$  vil svare henholdsvis

$$\lambda = 0,35631 \dots, \quad 0,36378 \dots, \quad 0,34736 \dots, \quad 0,33045 \dots.$$

De sande Værdier af  $\lambda$  ville altsaa ligge imellem disse og de ovenfor beregnede og for de laveste Værdier af  $p$ , hvortil de største Grupper svare, vistnok nærmest de sidste Tal. Iøvrigt ere Perioderne for de lavere Værdier af  $p$  saa lidt forskjellige, at de paa lange Strækninger ville forene sig til en enkelt Periode, som ikke bliver meget forskjellig fra 0,35.

Af Udtrykket (25) kan endvidere slutes, at Koefficienterne til de periodiske trigonometriske Funktioner eller Amplituderne for de største Værdier af  $s$  og altsaa ogsaa af  $\lambda$  meget nær ere af samme Størrelsesorden som  $x^{\frac{1}{2}}$ , og af lavere Orden ved aftagende  $s$  og  $\lambda$ , altsaa for de kortere Perioder. En nærmere Bestemmelse af Amplitude og Fase for de forskellige Perioder turde imidlertid møde meget betydelige Vanskeligheder.

Det Resultat, som ovenstaaende Regning har ført mig til, kan i det væsentlige naaes ved en anden Fremgangsmaade, som jeg her skal meddele, da det forekommer mig, at der ved denne kastes et nyt Lys over Spørgsmaalet.

Der sættes

$$(1 + 2^r + 3^r + \dots)^s = 1 + \gamma^{s(2)} 2^r + \dots \gamma^{s(x)} x^r + \dots, \quad (29)$$

hvor  $\gamma^{s(x)}$  bliver Antallet af Tilfælde, hvori  $x$  kan opløses i  $s$  Faktorer, heri medregnet 1, samt

$$G^s(x) = 1 + \gamma^{s(2)} + \dots \gamma^{s(x)}. \quad (30)$$

Man kan beregne  $\gamma^{s(x)}$  af  $\gamma^{s-1(x)}$  ved at summere alle de Tilfælde, som svare til den ny tilkommende Faktor, og erholder saaledes

$$\gamma^{s(x)} = \sum \gamma^{s-1}\left(\frac{x}{d}\right),$$

idet Summen udstrækkes til alle Divisorer  $d$  i  $x$ . Tillige er, med den Legendre'ske Betegnelse  $E$  for det største hele Tal i den efterfølgende Brøk,

$$\sum \gamma^{s-1}\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{q=1}^{q=x} \left( E \frac{x}{q} - E \frac{x-1}{q} \right) \gamma^{s-1}(q),$$

hvorved altsaa erholdes

$$\gamma^{s(x)} = \sum_{q=1}^{q=x} \left( E \frac{x}{q} - E \frac{x-1}{q} \right) \gamma^{s-1}(q), \quad (31)$$

og heraf atter

$$G^s(x) = \sum_{q=1}^{q=x} E \frac{x}{q} \cdot \gamma^{s-1}(q). \quad (32)$$

Disse Udtryk kunne bringes under analytisk Form ved Ligningerne

$$E \frac{x}{q} - E \frac{x-1}{q} = \sum_{m=1}^{m=q} \frac{\cos 2\pi \frac{mx}{q}}{q}, \quad (33)$$

$$E \frac{x}{q} + \frac{1}{2} = \sum_{m=1}^{m=q} \frac{\sin 2\pi \frac{m(x+\frac{1}{2})}{q}}{2q \sin \pi \frac{m}{q}}, \quad (34)$$

hvis Rigtighed let konstateres ved Udførelsen af Summationerne.

Vi ville nu nærmere undersøge  $\gamma^{s(x)}$  under den saaledes fremkomne Form, nemlig

$$\gamma^{s(x)} = \sum_{q=1}^{q=x} \sum_{m=1}^{m=q} \frac{\cos 2\pi \frac{mx}{q}}{q} \gamma^{s-1}(q) = \sum_{m=1}^{m=x} \sum_{q=m}^{q=x} \frac{\cos 2\pi \frac{mx}{q}}{q} \gamma^{s-1}(q). \quad (35)$$

I det sidste Udtryk sættes

$$q = q_1 q_2 \dots q_{s-1},$$

og Summationen med Hensyn til  $q$  forandres til en  $(s-1)$  dobbelt Summation med Hensyn til  $q_1, q_2, \dots, q_{s-1}$  paa en saadan Maade, at alle de Tilfælde, som tilfredsstille Betingelserne

$$m \leq q_1 q_2 \dots q_{s-1} \leq x, \quad (36)$$

medtages. Idet paa denne Maade Faktoren  $\gamma^{s-1(q)}$  bortfalder, erhoides

$$\gamma^{s(x)} = \sum_{m=1}^{m=x} \sum \sum \dots \frac{\cos 2\pi \frac{mx}{q_1 q_2 \dots q_{s-1}}}{q_1 q_2 \dots q_{s-1}}, \quad (37)$$

hvor Summationstegnene  $\sum \sum \dots$  antyde den under de angivne Betingelser udførte Summation med Hensyn til de  $s-1$  Variable  $q_1, q_2, \dots, q_{s-1}$ .

Vi ville da først betragte den enkelte Summation

$$\sum \frac{a_1}{q_1} \cos 2\pi \frac{a_1}{q_1},$$

hvor  $q_1$  gjennemløber en stor, ikke nærmere bestemt, Række af paa hinanden følgende Tal, og hvor  $a_1$  er et meget stort Tal. Det vil da bemærkes, at der ved enkelte Værdier af  $q_1$ , som vi ville betegne ved  $q_1'$ , danner sig til begge Sider for det til  $q_1'$  svarende Led en Gruppe af Led med ens Fortegn. Betingelserne herfor ere følgende.

Man sætte  $q_1 = q_1' + y_1$  og antage

$$\frac{a_1}{(q_1' + k_1)^2} = m_1,$$

idet  $k_1$  er en ægte Brøk,  $m_1$  et helt Tal. Man vil da kunne danne Udviklingen

$$\frac{a_1}{q_1} = \frac{a_1}{q_1' + k_1} - \frac{a_1(y_1 - k_1)}{(q_1' + k_1)^2} + \frac{a_1(y_1 - k_1)^2}{(q_1' + k_1)^3} - \dots,$$

som ved delvis Elimination af  $k_1$  og  $q_1'$  gaar over til

$$\frac{a_1}{q_1} = 2\sqrt{m_1 a_1} - m_1(y_1 + q_1') + \frac{m_1^{\frac{3}{2}}(y_1 - k_1)^2}{a_1^{\frac{1}{2}}} - \dots$$

Heri er  $m_1(y_1 + q_1')$  et helt Tal, og er nu tillige  $m_1$  meget lille i Sammenligning med  $a_1^{\frac{1}{2}}$ , ere Betingelserne for Dannelsen af den omtalte Gruppe opfyldte. Gaa vi til Grænsen  $a_1 = \infty$  og antages  $m_1$  endelig, kan den enkelte Gruppens Led summeres med fuld Nøjagtighed ved at forandre Summationen til Integration med Hensyn til  $y_1$  imellem Grænserne  $-\infty$  og  $+\infty$ , forudsat dog at Gruppen ikke netop er en Grænsegruppe, som afbrydes af en given Grænse for  $q_1$ . Resultatet af denne Integration bliver

$$\frac{a_1}{\sqrt{2}} \frac{\cos(2\pi \cdot 2(m_1 a_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4})}{(m_1 a_1)^{\frac{1}{4}}}.$$

Ogsaa naar  $a_1$  er endelig, men meget stor, medens  $m_1$  hører til de lavere Tal i Talrækken, vil Gruppeddannelsen finde Sted, og Summen af en Gruppens Led maa meget nær blive den samme som ovenfor er fundet. Men efterhaanden som  $m_1$  i Størrelse nærmer sig til  $a_1^{\frac{1}{2}}$ , ville Gruppens Led aftage i Antal og Udtrykket for deres Sum tabe i

Nøjagtighed, hvorefter Gruppedannelsen fuldstændig ophører. Men naar derefter  $m_1$  voxer yderligere udover Grænsen  $a_1^{\frac{1}{3}}$ , saa kan omvendt ethvert Led med den Variable  $q_1$  betragtes som fremkommet ved Summationen af en Gruppe Led med  $m_1$  som Variabel, i hvilken Gruppe hvert Led netop faar samme Form, som ovenfor er angivet. Om Rigtigheden heraf vil man ved en til den ovenfor udførte tilsvarende Regning let kunne overbevise sig. Hvis man altsaa kan se bort fra de Led, hvor  $m_1$  (ligesom ogsaa  $q_1$ ) er i Nærheden af  $a_1^{\frac{1}{3}}$ , saa kan den angivne Omdannelse af Summationen med  $q_1$  som Variabel til en Summation med  $m_1$  som Variabel betragtes som almindelig gjældende for alle  $q_1$ .

Med denne Indskrænkning med Hensyn til den neutrale Zone, hvor ingen Gruppedannelse finder Sted paa nogen af Siderne, vil man altsaa kunne sætte

$$\sum \frac{a_1}{q_1} \cos 2\pi \frac{a_1}{q_1} = \sum \frac{a_1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \left( 2\pi \cdot 2(m_1 a_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4} \right)}{(m_1 a_1)^{\frac{1}{4}}}, \quad (38)$$

hvor Grænserne i de to Summer kunne udledes af Relationerne imellem de to Variable  $q_1$  og  $m_1$ .

Dernæst sættes heri  $a_1 = \frac{a_2}{q_2}$ , og en Summation tænkes udført paa begge Sider med Hensyn til  $q_2$ , som antages at gennemløbe en Række paa hinanden følgende Tal. Der sættes nu paa højre Side  $q_2 = q_2' + y_2$  og

$$\frac{(m_1 a_2)^{\frac{1}{2}}}{(q_2' + k_2)^{\frac{3}{2}}} = m_2,$$

hvor  $k_2$  er en ægte Brøk,  $m_2$  et helt Tal. Man vil da paa lignende Maade som før kunne danne Udviklingen

$$2 \left( \frac{m_1 a_1}{q_2} \right)^{\frac{1}{2}} = 3(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}} - m_2 (y_2 + q_2') + \frac{3}{4} \frac{m_2^2}{(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}}} (y_2 - k_2)^2 - \dots$$

Heri er  $m_2 (y_2 + q_2')$  et helt Tal, og der vil altsaa danne sig en Gruppe omkring det til  $q_2'$  svarende Led, naar  $m_2^2$  er tilstrækkelig lille i Sammenligning med  $(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}}$ , altsaa  $m_2$  lille imod  $(m_1 a_2)^{\frac{1}{3}}$ . Idet Gruppens Led summeres paa samme Maade som før, erholdes

$$\sum \sum \frac{a_2}{q_1 q_2} \cos 2\pi \frac{a_2}{q_1 q_2} = \sum \sum \frac{a_2}{\sqrt{3}} \frac{\cos \left( 2\pi \cdot 3(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}} + 2\frac{\pi}{4} \right)}{(m_1 m_2 a_2)^{\frac{1}{3}}},$$

hvilken Ligning, paa samme Maade som Ligningen (38), ogsaa kan udstrækkes til at gjælde for meget høje Værdier af  $m_2$ , medens den derimod ophører at være gyldig, naar  $m_2$  (og  $q_2$ ) er i Nærheden af  $(m_1 a_2)^{\frac{1}{3}}$ .

Man vil saaledes paa denne Maade uden Vanskelighed komme til den under samme Indskrænkninger gjældende almindelige Formel

$$\Sigma \Sigma \dots \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_p} \cos 2\pi \frac{a_p}{q_1 q_2 \dots q_p} = \Sigma \Sigma \dots \frac{1}{\sqrt{p+1}} \frac{\cos(2\pi(p+1)(m_1 \dots m_p a_p)^{\frac{1}{p+1}} + p \frac{\pi}{4})}{(m_1 m_2 \dots m_p a_p)^{\frac{p}{2p+2}}}. \quad (39)$$

Forbindelsen imellem de to Sæt af Variable kan tilnærmelsesvis udtrykkes ved

$$\frac{a_1}{q_1^2} = m_1, \quad \frac{(m_1 a_2)^{\frac{1}{2}}}{q_2^{\frac{3}{2}}} = m_2, \quad \frac{(m_1 m_2 a_3)^{\frac{1}{3}}}{q_3^{\frac{4}{3}}} = m_3, \quad \dots,$$

hvor

$$a_1 = \frac{a_2}{q_2}, \quad a_2 = \frac{a_3}{q_3}, \quad \dots$$

Heraf udledes de approximerede Ligninger

$$m_1 q_1 = m_2 q_2 = \dots = m_p q_p = (m_1 m_2 \dots m_p a_p)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (40)$$

Vil man gjøre en Anvendelse heraf paa de i (37) forekommende Summationer, har man kun at sætte  $p = s-1$  og  $a_{s-1} = mx$ , men det maa herved bemærkes, at man paa denne Maade kun ufuldstændig gjengiver det hele Udtryk for  $\gamma^s(x)$ , dels paa Grund af Unøjagtigheden i de Zoner, hvor Grupperdannelserne høre op samtidig paa begge Sider, dels ogsaa paa Grund af Grænsebestemmelserne for de Variable. Hvad det imidlertid her kommer an paa, er at udtage af Udviklingen for  $\gamma^s(x)$  netop de Led, hvoraf Dannelsen af de lange Perioder i Printalrækken afhænger, og i denne Henseende kommer det fornemmelig an paa Bestemmelsen af de lavere Grænser for de nye Variable  $m_1, m_2, \dots$ .

Det fremgaar af Ligningen (40), naar heri sættes  $p = s-1$  og  $a_{s-1} = mx$ , at man tilnærmelsesvis har

$$q_1 q_2 \dots q_{s-1} = \frac{mx}{(m m_1 \dots m_{s-1} x)^{\frac{1}{s}}},$$

og ifølge (36) er den øvre Grænse for dette Produkt  $x$ . Alle de Variable  $m_1, \dots, m_{s-1}$  have altsaa 1 som lavere Grænse, saalænge  $m$  ogsaa er lille og navnlig ikke overskrider Grænsen  $x^{\frac{1}{s-1}}$ .

Vi kunne altsaa af Udtrykket (37) for  $\gamma^s(x)$  udtage en Række af Led, som kunne omdannes til den  $s$ -dobbelte Sum

$$\Sigma \Sigma \dots \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\cos(2\pi \cdot s(m m_1 \dots m_{s-1} x)^{\frac{1}{s}} + (s-1) \frac{\pi}{4})}{(m m_1 \dots m_{s-1} x)^{\frac{s-1}{2s}}}, \quad (42)$$

hvor alle de Variable  $m_1 m_2 \dots m_{s-1}$  gennemløbe Talrækken fra 1 indtil visse Grænser, som vi holde ubestemte.



Ville vi dernæst finde den tilsvarende Række for  $G^s(x)$ , kunne vi først sætte

$$G^s(x) = \sum_{x'=x_0}^{x'=x} \gamma^{s(x')} + G^s(x_0 - 1),$$

og idet saavel  $x_0$  som  $x$  betragtes som meget høje Tal, kan, naar her for  $\gamma^{s(x')}$  indsættes Udviklingen (42), Summationen med Hensyn til  $x'$  forandres til Integration, og denne kan, under Hensyn til at alle de Værdier, som den Variable  $x'$  gennemløber, ere store Tal, let udføres approximativt. Den saaledes udtagne, af  $x$  afhængige, Del af  $G^s(x)$  bliver

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\pi \sqrt{s}} \sum \sum \dots \frac{\sin(2\pi \cdot s(m m_1 \dots m_{s-1} x)^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4})}{(m m_1 \dots m_{s-1} x)^{\frac{s+1}{2s}}}. \quad (43)$$

Dette Udtryk er i Formen, paa Faktoren  $\frac{1}{2}$  nær, ganske det samme, som det vi i Ligning (24) havde fundet for  $X_s^s$ . I begge Tilfælde er den lavere Grænse 1 for alle  $s$  Variable, men hermed ophører ogsaa Ligheden, ligesom ogsaa de to Udviklinger repræsenterer to forskjellige, om end nær beslægtede, periodiske Funktioner.

Da man, tilsvarende Rækken (9), har

$$A^s(x) = G^s(x) - \frac{s}{1} G^{s-1}(x) + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} G^{s-2}(x) - \dots + (-1)^s,$$

vil man ogsaa let kunne danne en med (10) analog Udvikling for  $\vartheta(x)$  af Formen

$$\vartheta(x) = -b_0 + b_1 \frac{G^1(x)}{1} - b_2 \frac{G^2(x)}{2} + \dots \pm b_{s_1} \frac{G^{s_1}(x)}{s_1}, \quad s_1 > \frac{\log x}{\log 2} - 1.$$

Indsættes heri det ved (43) givne Udtryk for  $G^s(x)$ , vil man altsaa erholde den tilsvarende periodiske Del af  $\vartheta(x)$ . Som det let ses, bliver den videre Diskussion heraf i Hovedsagen den samme som tidligere, og Resultatet bliver ligeledes Konstateringen af de store Perioder med  $\log x$  som Variabel og Perioden  $\lambda$ , saaledes som denne er bestemt ved Ligningen (27). Men med Hensyn til den nærmere Bestemmelse af de periodiske Funktioners Amplituder og Faser møder der os ogsaa her de samme Vanskeligheder, skjøndt under en anden Form.

---

Det er allerede i Indledningen omtalt, at de virkelig fundne Printalmængders periodiske Afvigelser fra de efter Riemann's Formel beregnede Værdier efterhaanden for de højere Tals Vedkommende synes at udvikle sig til mere og mere regelmæssige Perioder. Det træffer sig saa heldig, at Dr. Gram allerede i sin, i Indledningen citerede, Afhandling har taget dette Spørgsmaal, set fra det empiriske Standpunkt, under Behandling og herom udtalt sig paa følgende Maade (S. 250):

«Glaisher har for at anskueliggjøre, hvorledes Afvigelserne variere, fremstillet dem grafisk i et Diagram, der er vedføjet den nævnte Afhandling. Der er noget i dette, som kunde tyde paa en Periode afhængig af  $\ln$ , saaledes at Periodetallet, naar  $\log_{10} n$  toges til Argument, omtrent kunde blive 0·17 (for  $\ln$  altsaa 0·39).»

Ved mundtlig Meddelelse har Dr. Gram sat mig i Stand til at supplere denne Angivelse. Gives den periodiske Funktion Formen

$$\sin 2\pi \left( \frac{\log x}{\lambda} + C \right),$$

fandtes Konstanterne af Gram ved en raa geometrisk Udjevning af Diagrammet bestemte ved

$$\lambda = 0,39, \quad C = 0,34.$$

Rigtignok førte denne Formel til betydelige Afvigelser fra Diagrammet for den 9de Million, men disse bleve ikke medtagne, fordi Gram formodede, at de for en Del maatte stamme fra Fejl i de af Dase beregnede Primalstavler, idet Resultatet af Optællingerne vanskelig syntes at kunne forliges med Meissels Beregning af Primalmængden op til 10 Millioner. Derimod udviste Formlen en stor Overensstemmelse med Diagrammet fra 3 indtil 8 Millioner.

Sluttelig kom imidlertid Dr. Gram, saaledes som det ses af hans Afhandling sammesteds, efter at have beregnet Afvigelserne fra Riemann's Formel for Rækken af Primal, svarende til  $\log x$  med Intervallet 0,1, opad indtil  $\log x = 15$  ( $x = 3\ 269\ 017$ ), til det Resultat: «at den i Glaisher's Diagram tilsyneladende regelmæssige Fordeling af de store Maxima og Minima vistnok skyldes en Tilfældighed».

Saalænge Forsøget paa at bestemme Perioderne maatte være saa famlende, som det efter de forholdsvis faa Data, hvoraf endog en Del maatte formodes at være urigtige, nødvendigvis maatte blive, kunde det ogsaa være korrekt at tage det Parti, at opgive det. Men heldigvis har Gram alligevel meddelt Resultaterne af sine Udjevningforsøg, thi det viser sig nu i Theoriens Belysning, at baade hans Formodning om, at  $\log x$  maatte tages som Argument, og at Periodetallet var 0,39, har i Hovedsagen været rigtig, ligesom ogsaa en yderligere Diskussion af det Erfaringsmateriale, hvortil vi endnu ere indskrænkede, bliver ganske unødvendig. Selve den Omstændighed, at de regelmæssige lange Perioder udviskes, naar  $x$  kommer under en vis lavere Grænse, bliver en Stadfæstelse af Theorien.

Med det vundne theoretiske Grundlag vil der herefter være en stærk Opfordring til at gaa videre i den exakte Bestemmelse af Primalmængderne. Navnlig vilde det være i høj Grad af Interesse at faa kontrolleret Dases Beregning af Primalmængden indtil 9 Millioner ved Meissel's eller en lignende Methode, og derefter at faa bestemt en Række Punkter imellem 10 og 100 Millioner, f. Ex. for hver 10 Millioner. Der vilde da være tilvejebragt et fortrinligt Materiale til Støtte for fortsatte theoretiske Undersøgelser.